LXI Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

10— 13 января 2011 года

8 класс

Первый день

1. Сколько среди натуральных чисел от 1 до 999 существует таких чисел n, что сумма цифр в их десятичной записи равна наибольшему общему делителю чисел *n* и п + 6? (Ответ обоснуйте.)

2. В прямоугольном треугольнике длины медиан, проведенных к катетам, равны 19 и 22. Найдите длину гипотенузы этого треугольника.

3. В классе четное число школьников. Каждый дружит не менее, чем с половиной одноклассников. В начале очередного учебного года учительница произвольным .образом рассадила их по два за парты. Но оказалось, что нет ни одной парты, за которой сидели бы друзья. Поэтому учительница разрешила школьникам делать пересадки. В одной пересадке могут участвовать два школьника, сидящих за разными партами.

Всегда ли школьники могут с помощью таких пересадок сесть так, чтобы за каждой партой сидели друзья? (Ответ обоснуйте.)

4. Каждая клетка таблицы 7x7 окрашена в один из трех цветов: красный, синий или зеленый. При этом в каждой строке таблицы число красных клеток не меньше числа синих клеток и не меньше числа зеленых клеток, а в каждом столбце таблицы число синих клеток не меньше числа красных клеток и не меньше числа зеленых клеток.

Сколько зеленых клеток может быть в такой таблице? Ответ обоснуйте и приведите соответствующий пример (примеры).

LXI Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

10- 13 января 2011 года

9 класс

Первый день

1. Пусть $S(n)$ - сумма цифр в десятичной записи натурального числа n. Существуют ли такие натуральные числа n, что

а) n - $S(V) = 3\cdot 2010$?

б) $n-S(n) = 3 \cdot 2011$?

2. Три различных действительных числа удовлетворяют следующему условию: квадрат любого из них равен сумме числа 1-й произведения двух других чисел. Какому числу может равняться сумма трех попарных произведений этих чисел?

3. На стороне AB треугольника ABC отмечены точки K и L так, что $AK = KL = LB$. Точки M и N' - середины сторон AC и BC соответственно. Пусть X - точка пересечения отрезков AN и CK, а Y -точка пересечения отрезков BM и CL. Найдите длину отрезка XY, если длина стороны AB равна 36.

4. Каждая клетка таблицы 7х8 окрашена в один из трех цветов: красный, синий или зеленый. При этом в каждой строке таблицы число красных клеток не меньше числа синих клеток и не меньше числа зеленых клеток, а в каждом столбце таблицы число синих клеток не меньше числа красных клеток и не меньше числа зеленых клеток. Сколько зеленых клеток может быть в такой таблице? Ответ обоснуйте и приведите соответствующий пример (примеры).

LXI Белорусская математическая олимпиада школьников

111 этап

10 - 13 января 2011 года

10 класс

Первый день

1. Для некоторых ненулевых действительных чисел a, *b* и c выполняется равенство

$$\frac{ab}{b-c}+\frac{bc}{c-a}+\frac{ca}{a-b}=\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{c+a}+\frac{ca}{a+b}+6abc.$$

Какие значения может принимать выражение

$$\frac{1}{(a^2-b^2)^2}+\frac{1}{(b^2-c^2)^2}+\frac{1}{(c^2-a^2)^2}?$$

2. Пусть *K* - точка пересечения медиан *AL,* *BM* и *CN*- треугольника *ABC*. Докажите, что $\angle ABM = \angle CAL$, если $\angle BLA = \angle CNA$.

3. Существует ли функция *f,* определённая на множестве R действительных чисел и принимающая действительные значения, для которой при любом действительном *x* выполняется равенство

а) $f(\sin x)+f(\cos x)=1$?

б) $f(\sin x)+f(\cos x)=\sin x$?

4. Каждая клетка таблицы 8x9 окрашена в один из трех цветов: красный, синий или зеленый. При этом в каждой строке таблицы число красных клеток не меньше числа синих клеток и не меньше числа зеленых клеток, а в каждом столбце таблицы число синих клеток не меньше числа красных клеток и не меньше числа зеленых клеток. Какое наибольшее и какое наименьшее число зеленых клеток может быть в такой таблице?

LXI Белорусская математическая олимпиада школьников

111 этап

10— 13 января 2011 года

11 класс

Первый день

1. Про три попарно различных числа известно, что сумма кубов любых двух из них равна разности между квадратом третьего и числом 3/4. Найдите произведение этих чисел.

2. Существует ли функция *f*, определённая на множестве R действительных чисел и принимающая действительные значения, для которой при любом действительном *x* выполняется равенство

а) $f(\sin x) + f(\cos x) = 2$?

б) $f(\sin x) + f(\cos x) = \sin 2x$?

3. В остроугольном треугольнике *ABC* отмечены точки: *M* - середина стороны *BC, N* и *K* - основания высот *AN* и *C К, H* - точка пересечения высот. Биссектриса угла *ACB* пересекает отрезок *AH* в точке *T.* Оказалось, что *CT*||МН, *TH* = 10. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *NBK.*

4. Каждая клетка таблицы 9x10 окрашена в один из трех цветов: красный, синий или зеленый. При этом в каждой строке таблицы число красных клеток не меньше числа синих клеток и не меньше числа зеленых клеток, а в каждом столбце таблицы число синих клеток не меньше числа красных клеток и не меньше числа зеленых клеток. Какое наибольшее и какое наименьшее число зеленых клеток может быть в такой таблице?

LXI Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

10 — 13 января 2011 года

8 класс

Второй день

5. Существуют ли такие целые числа x и у, что $2x^2 - 5y^3 = 2011$?

6. Докажите, что если положительные числа a, b, x, y удовлетворяют неравенствам $ab \geq xa + yb$ и $a \geq b$, то они удовлетворяют и неравенству $x+y \leq a$.

7. На стороне AB треугольника ABC отмечены точки M и K. Оказалось, что $AM = MK$, $CM = CB$, $\angle AKC = 0{,}5\angle CAK + 90°$. Найдите длину стороны AC, если длина отрезка MB равна 8 см.

8. В шахматном турнире участвовало 10 шахматистов. Каждый из участников сыграл с каждым другим одну партию. Никакие два участника не набрали одинакового числа очков. (В шахматах за победу в партии присуждается 1 очко, за проигрыш — 0 очков, за ничью — 0,5 очка). Какое наименьшее число побед могло быть у победителя этого турнира и какое наибольшее число очков мог набрать участник, занявший последнее место?

LXI Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

10—13 января 2011 года

9 класс

Второй день

5. Докажите, что при любом натуральном m число $2^m \cdot 9$ можно представить в виде суммы квадратов трёх натуральных чисел.

6. Докажите, что если положительные числа a, b, x, y удовлетворяют неравенству $ab \geq xa + yb$, то они удовлетворяют и неравенству $ab \geq 4xy$.

7. Пусть M и L — середины основания AB и боковой стороны BC равнобедренного треугольника ABC соответственно $(BC = AC)$. На стороне AC отмечена точка N. Оказалось, что $NA + AM = LN = LM$. Найдите величину угла NLM.

8. В шахматном турнире каждый из участников сыграл с каждым другим одну партию. Никакие два участника не набрали одинакового числа очков. (В шахматах за победу в партии присуждается 1 очко, за проигрыш - 0 очков, за ничью - 0,5 очка.) Участник, занявший последнее место, получил 2 очка. Какое наименьшее число шахматистов могло участвовать в этом турнире?

LXI Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

10—13 января 2011 года

10 класс

Второй день

5. Найдите все натуральные m, при которых число $2^m \cdot 7$ можно представить в виде суммы квадратов трёх натуральных чисел.

6. Докажите, что если положительные числа a, b, x, y удовлетворяют неравенству $ab \geq xa+yb$, то они удовлетворяют и неравенству $\sqrt{a+b} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

7. На сторонах AC и BC треугольника ABC. отмечены точки A_1 и B_1. такие, что $AA_1 + BB_1 = AB$. Пусть I - центр вписанной окружности треугольника ABC, а O — центр описанной окружности треугольника A_1B_1C. Докажите, что прямая OI перпендикулярна прямой A_1B_1.

8. В шахматном турнире каждый из участников сыграл с каждым другим одну партию. Никакие два участника не набрали одинакового числа очков. (В шахматах за победу в партии присуждается 1 очко, за проигрыш - 0 очков, за ничью - 0,5 очка.) Участник, занявший последнее место, получил 2,5 очка. Какое наименьшее число побед могло быть у победителя этого турнира?

LXI Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

10-13 января 2011 года

11 класс

Второй день

5. Существуют ли такие целые числа x и у, что $2x^3 + y^3 = 2011$?

6. В треугольнике ABC угол ACB равен 120°. Точка L на стороне AB такова, что CL -- биссектриса угла ACB. На сторонах AC и BC выбраны точки N и K соответственно, так, что $CN + CK = CL$. Докажите, что треугольник KLN равносторонний.

7. Докажите, что если положительные числа a, b, c, k, n, m удовлетворяют неравенству $abc \geq ka + nb + mc$, то они удовлетворяют и неравенству

$$a+b+c \geqslant \sqrt{3}\left(\sqrt{k}+\sqrt{n}+\sqrt{m}\right).$$

8. В шахматном турнире каждый из участников сыграл с каждым другим одну партию. Никакие два участника не набрали одинакового числа очков. (В шахматах за победу в партии присуждается 1 очко, за проигрыш - 0 очков, за ничью - 0, 5 очка.) Участник, занявший последнее место, получил k очков. Какое наименьшее число побед могло быть у победителя этого турнира?

LXI Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

10 – 13 января 2011 года

РЕШЕНИЯ

Первый день

8 класс

8.1. Ответ: 25.

Поскольку НОД (a, b)=НОД $(a - b, b)$ для любых чисел a и b, то НОД $(n+6, n)$=НОД $(6, n)$. Следовательно, НОД $(n+6, n)$ может принимать лишь четыре значения: 1, 2, 3, 6.

Если НОД $(6, n) = 1$, то число n нечетное, и единственным числом с суммой цифр, равной 1, является число 1 (числа 10 и 100 четные).

Если НОД $(6, n) = 2$, то число n четное, но не делится на 6. Следовательно, последняя цифра числа n четная, т.е. 0,2,4,6,8. Но так как сумма цифр числа n равна 2, то среди однозначных чисел есть только одно число, это число 2, а все двухзначные и трехзначные числа могут оканчиваться лишь 0. Поэтому двузначные числа — 20, трехзначные — 200, 110.

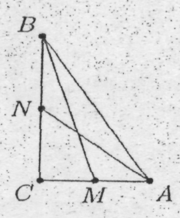
Если НОД $(6, n) = 3$, то число n нечетное, так как не должно делиться на 6. Следовательно, последняя цифра числа n нечетная, т.е. 1,3,5,7,9. Но так как сумма цифр числа n равна 3, то среди однозначных чисел есть только одно число, это число 3, а все двухзначные и трехзначные числа могут оканчиваться лишь 1. Поэтому двузначные числа — 21, трехзначные — 201, 111.

Если НОД $(6, n) = 6$, то число n четное. Следовательно, последняя цифра числа n четная, т.е. 0,2,4,6,8. Но так как сумма цифр числа n равна 6, то среди однозначных чисел есть только одно число, это число 6, а все двухзначные и трехзначные числа могут оканчиваться лишь 0, 2 или 4. Поэтому двузначные числа — 60, 42, 24, трехзначные — 600, 510, 420, 330, 240, 150,402, 312, 222, 132, 204, 114.

Других чисел, удовлетворяющих условию, нет. Следовательно, всего требуемых чисел 25.

8.2. Ответ: 26.

Обозначим $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Пусть $AN = 19$, $BM = 22$. Применяя теорему Пифагора к прямоугольным треугольникам MBC и ANC, получаем



$$a^2 + \frac{b^2}{4} = AN^2 = 19^2 = 361, \quad b^2 + \frac{a^2}{4} = BM^2 = 22^2 = 484.$$

Складывая эти равенства, получим $\frac{5}{4}a^2 + \frac{5}{4}b^2 = 845 = 5 \cdot 169$. Отсюда $a^2 + b^2 = 4 \cdot 169$. Поэтому искомая гипотенуза $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 \cdot 169} = 2 \cdot 13 = 26$.

8.3. Ответ: да, всегда.

Будем называть парту плохой, если за ней сидят не друзья, и хорошей — если за ней сидят друзья. Таким образом, в начале все парты плохие. Покажем, что при любом имеющемся количестве плохих парт их число можно уменьшить с помощью одной пересадки. Пусть в классе $2n$ школьников (и, значит, они занимают n парт). Пусть за плохой партой сидят A и B, это, в частности, означает, что A и B не друзья. Но согласно условию у A не менее n друзей и поэтому они сидят не менее, чем за $\frac{n}{2}$ партами. Точно так же, и друзья B сидят не менее, чем за $\frac{n}{2}$ партами. При этом все они, друзья A и друзья B, сидят за $n-1$ партами (все парты, кроме одной, где сидят A и B), или меньшим числом парт. Поэтому (принцип Дирихле) найдется парта, за которой сидит друг школьника A (пусть, это C) и и друг школьника B (пусть, это D). Пересадим B и C. Получим две хорошие парты: $A \& C$ и $B \& D$. Видим, что в начале после первой же пересадки число плохих парт уменьшается на две. После этого снова выберем какую-либо плохую парту. Для нее снова, рассуждая так же, находим парту (она может оказаться уже хорошей), за которой сидят друзья выбранной плохой парты. Осуществив такую же пересадку, которая описана выше, превратим две рассматриваемые парты в хорошие. Число плохих парт уменьшится по крайней мере на одну. Продолжим этот процесс. Но так как число плохих парт конечно и после каждой такой пересадки оно уменьшается, то рано или поздно не останется ни одной плохой парты.

8.4. Ответ : 7 зеленых клеток.

Заметим, что поскольку в любой строке число красных клеток не меньше числа синих, то общее число красных клеток во всей таблице не меньше числа синих клеток. Точно так же, поскольку в любом столбце число синих клеток не меньше числа красных, то и во всей таблице число синих клеток не меньше числа красных. Тем самым, количества красных клеток и синих клеток во всей таблице одинаковы. Далее, если бы хоть в одной строке число красных клеток было строго больше числа синих, то число красных клеток во всей таблице было бы больше числа синих клеток — противоречие. Поэтому в каждой строке таблицы число красных клеток равно числу синих. Отсюда с учетом условия следует единственная возможность: в каждой строке 3 красных клетки, 3 синих и 1 зеленая. Поэтому число зеленых клеток равно 7. Следующий пример показывает, что окрасить клетки так, как сказано в условии задачи (при этом зеленых клеток действительно 7), можно.

з	с	к	с	к	с	к
к	з	с	к	с	к	с
с	к	з	с	к	с	к
к	с	к	з	с	к	с
с	к	с	к	з	с	к
к	с	к	с	к	з	с
с	к	с	к	с	к	з

9 класс

9.1. Ответ : а) не существуют; б) существуют, например, $n = 6048$.

а) Такие числа не существуют. Действительно, хорошо известно, что число и его сумма цифр имеют одинаковые остатки от деления на 9. Поэтому число $n - S(n)$ делится на 9, а число 2011 не делится на 9.

б) Таким числом, например, является число 6048, так как $S(6048) = 18$ и $6048 - 18 = 6030 = 3 \cdot 2010$.

9.2. Ответ : -1.

Обозначив данные числа через a, b и c, получим согласно условию задачи систему равенств:

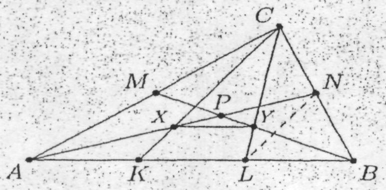
$$a^2 = bc + 1, \qquad b^2 = ac + 1, \qquad c^2 = ab + 1. \qquad (*)$$

Вычитая из первого равенства второе, получим $a^2 - b^2 = c(b - a)$. Так по условию $a \neq b$, то можно сократить обе части полученного равенства на $a - b$. Получим: $a + b = -c$, или $a + b + c = 0$. После возведения этого равенства в квадрат получим: $a^2 + b^2 + c^2 +$

$2ab+2ac+2bc=0$. Заменив в этом равенстве квадраты в соответствии с равенствами $(*)$, получим $bc+1+ac+1ab+1+2ab+2ac+2bc=0$, или $3(ab+ac+bc)+3=0$, откуда $ab+ac+bc=-1$.

9.3. Ответ: 9.

Соединим точки N и L. Так как по условию $KL=LB$ и N — середина BC, то NL — средняя линия треугольника CKB, и поэтому $NL \parallel CK$. Но тогда по теореме Фалеса $AX:XN=AK:KL=1:1$. Следовательно, $AX=0,5AN$. Поскольку P — точка пересечения медиан, то $AP=\frac{2}{3}AN$, тогда $XP=AP-AX=\frac{2}{3}AN-\frac{1}{2}AN=\frac{1}{6}AN=\frac{1}{4}AP$. Аналогично, $YP=\frac{1}{6}BM=\frac{1}{4}BP$. Поэтому треугольники XPY и APB подобны и $XY:AB=1:4$, откуда $XY=\frac{1}{4}AB=\frac{1}{4}\cdot 36=9$.



9.4. Ответ: 8 зеленых клеток.

Заметим, что поскольку в любой строке число красных клеток не меньше числа синих, то общее число красных клеток во всей таблице не меньше числа синих клеток. Точно так же, поскольку в любом столбце число синих клеток не меньше числа красных, то и во всей таблице число синих клеток не меньше числа красных. Тем самым, количества красных клеток и синих клеток во всей таблице одинаковы. Далее, если бы хоть в одном столбце таблицы число синих клеток было строго больше числа красных, то число синих клеток во всей таблице было бы больше числа красных клеток — противоречие. Поэтому в каждом из столбцов таблицы число красных клеток равно числу синих. Отсюда, в частности, следует, что в каждом из 8 столбцов таблицы 3 красных клетки, 3 синих и 1 зеленая. Поэтому число зеленых клеток равно 8. Следующий пример показывает, что окрасить клетки так, как сказано в условии задачи (при этом зеленых клеток, действительно, 8) можно.

з	з	к	с	к	с	к	с
к	с	з	з	с	к	с	к
с	к	с	к	з	з	к	с
к	с	к	с	к	с	з	з
с	к	с	к	с	к	с	к
к	с	к	с	к	с	к	с
с	к	с	к	с	к	с	к

10 класс

10.1. Преобразуем данное в условии равенство:

$$\frac{ab}{b-c}-\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{c-a}-\frac{bc}{c+a}+\frac{ca}{a-b}-\frac{ca}{a+b}=6abc \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad ab\left(\frac{1}{b-c}-\frac{1}{b+c}\right)+bc\left(\frac{1}{c-a}-\frac{1}{c+a}\right)+ca\left(\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}\right)=6abc \quad\Leftrightarrow$$

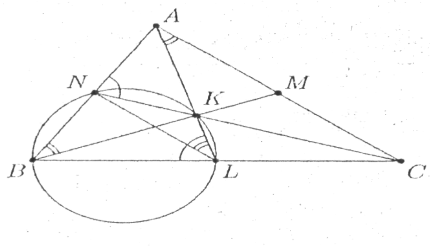
$$\frac{2abc}{(b-c)(b+c)}+\frac{2abc}{(c-a)(c+a)}+\frac{2abc}{(a-b)(a+b)}=6abc \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{a^2-b^2}+\frac{1}{b^2-c^2}+\frac{1}{c^2-a^2}=3.$$

Теперь возведем обе части последнего равенства в квадрат:

$$\frac{1}{(a^2-b^2)^2}+\frac{1}{(b^2-c^2)^2}+\frac{1}{(c^2-a^2)^2}+$$
$$+\frac{2}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}+\frac{2}{(b^2-c^2)(c^2-a^2)}+\frac{2}{(a^2-b^2)(c^2-a^2)}=9 \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{(a^2-b^2)^2}+\frac{1}{(b^2-c^2)^2}+\frac{1}{(c^2-a^2)^2}+\frac{2(c^2-a^2+a^2-b^2+b^2-c^2)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}=9 \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{(a^2-b^2)^2}+\frac{1}{(b^2-c^2)^2}+\frac{1}{(c^2-a^2)^2}=9.$$

10.2. Так как $\angle BNC + \angle BLA = (180^\circ - \angle CNA) + \angle BLA = 180^\circ$, то четырехугольник $BNKL$ вписанный. Поэтому $\angle NBK = \angle NLK$ (как вписанные, опирающиеся на общую дугу NK). Но NL — средняя линия треугольника ABC, поэтому $NL \parallel AC$. Тогда $\angle NLK = \angle CAL$ (внутренние накрестлежащие углы). Следовательно,



$$\angle ABM = \angle NBK = \angle CAL,$$

что и требовалось.

10.3. Ответ: **а)** да, существует; **б)** нет, не существует.

а) Пример функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для которой при любом действительном x выполняется равенство

$$f(\sin x)+f(\cos x)=1, \qquad (*)$$

доставляет функция f, тождественно равная $1/2$, т. е. $f(t)=1/2$ при всех $t\in\mathbb{R}$. Для неё выполнимость тождества $(*)$ очевидна: $1/2+1/2=1$. Другой пример, почти столь же очевидный, как и предыдущий, даёт функция $f(t)=t^2$. В самом деле, для неё при всех действительных x получаем:

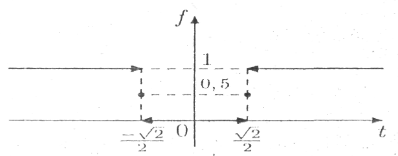
$$f(\sin x)+f(\cos x)=(\sin x)^2+(\cos x)^2=\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

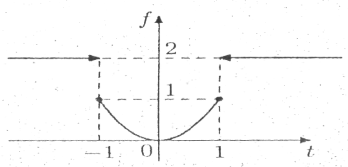
согласно основному тригонометрическому тождеству.

Для решения п. **а)** задачи достаточно привести пример только одной функции. В действительности же функций $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющих тождеству $(*)$, существует бесконечно много. Приведём ещё два из тех примеров таких функций, которые можно задать аналитическим выражением:

$$f(t)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad t\in(-2^{-1/2},2^{-1/2}),\\ 2^{-1}, & \text{если} \quad |t|=2^{-1/2},\\ 1, & \text{если} \quad |t|>2^{-1/2},\end{cases} \qquad f(t)=\begin{cases}t^2, & \text{если} \quad t\in[-1,1],\\ 2, & \text{если} \quad |t|>1.\end{cases} \qquad (**)$$

Графики функций $(**)$ приведены на рисунке.





Вообще, несложно описать все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие тождеству $(*)$. Для этого заметим сначала, что, поскольку $|\sin x| \leqslant 1$ и $|\cos x| \leqslant 1$, значения $f(t)$ функции f при $|t| > 1$ могут быть любыми, если требовать только, чтобы она удовлетворяла тождеству $(*)$. Рассмотрим поэтому функцию f только на отрезке $[-1, 1]$ (или, как ещё говорят, сужение (или ограничение) функции f на отрезок $[-1, 1]$). Докажем, что функция f на отрезке $[-1, 1]$ является чётной. Действительно, заменив в тождестве $(*)$ x на $-x$ и воспользовавшись тем, что функция $\sin$ нечётна, а функция $\cos$ чётна, получим тождество $f(-\sin x) + f(\cos x) = 1$. Почленно вычитая это тождество из тождества $(*)$, получим $f(\sin x) - f(-\sin x) = 0$ при всех x, или, что то же самое, если обозначить $\sin x$ через t, что $f(t) = f(-t)$ для любого $t \in [-1, 1]$.

Так как функция f на отрезке $[-1, 1]$ чётна, то её достаточно рассмотреть только на отрезке $[0, 1]$. При $x = \pi/4$ из тождества $(*)$ находим $f(2^{-1/2}) = 2^{-1}$. Пусть известно значение $f(\sin x)$; тогда, в силу тождества $(*)$, известно и её значение $f(\cos x) = 1 - f(\sin x)$. В частности, если положить $t = \cos x$, где $\pi/4 < x \leqslant \pi/2$, т. е. $2^{-1/2} < t \leqslant 1$, то $f(t) = 1 - f(\sqrt{1-t^2})$ для всех $t \in (2^{-1/2}, 1]$. Когда t пробегает полуинтервал $(2^{-1/2}, 1]$, величина $\sqrt{1-t^2}$ пробегает полуинтервал $[0, 2^{-1/2})$. Поэтому если известно значение $f(t)$ при $t \in [0, 2^{-1/2})$, то известно и значение $f(t)$ при $t \in (2^{-1/2}, 1]$.

Подводя итог, получаем, что функция f на отрезке $[0, 1]$ должна удовлетворять следующим трём условиям: 1) $f(t) \equiv g(t)$ при $t \in [0, 2^{-1/2})$, где g — какая-то функция, определённая на полуинтервале $[0, 2^{-1/2})$, 2) $f(2^{-1/2}) = 2^{-1}$ и 3) $f(t) = 1 - g(\sqrt{1-t^2})$ при $t \in (2^{-1/2}, 1]$. На полуинтервал $[-1, 0)$ функция f продолжается как чётная, а при $|t| > 1$ её значения $f(t)$ могут быть выбраны произвольно.

Обратно, выбрав произвольно какие-либо функции g и G, определённые соответственно только на $[0, 2^{-1/2})$ и $(-\infty, -1) \bigcup (1, +\infty)$, легко убедиться, что функция

$$f(t) = \begin{cases} g(|t|), & \text{если} \quad t \in (-2^{-1/2}, 2^{-1/2}), \\ 2^{-1}, & \text{если} \quad |t| = 2^{-1/2}, \\ 1 - g(\sqrt{1-t^2}), & \text{если} \quad 2^{-1/2} < |t| \leqslant 1, \\ G(t), & \text{если} \quad |t| > 1 \end{cases} \qquad ({}^{*}_{**})$$

удовлетворяет тождеству $(*)$.

Приведённые выше примеры функций $f(t) = 2^{-1}$ и $f(t) = t^2$ получаются по формуле $({}^{*}_{**})$, если в ней выбрать соответственно $g(t) = 2^{-1}$, $G(t) = 2^{-1}$ и $g(t) = t^2$, $G(t) = t^2$. Функции же $(**)$ получаются по формуле $({}^{*}_{**})$, если в ней взять $g(t) = 0$, $G(t) = 1$ и $g(t) = t^2$, $G(t) = 2$ соответственно. Первые два из этих примеров — функции непрерывные, а два других — функции, имеющие только по две точки разрыва. Воспользовавшись формулой $({}^{*}_{**})$, легко привести пример функции f, удовлетворяющей тождеству $(*)$ и разрывной в каждой точке: достаточно в качестве функций g и G взять сужение функции Дирихле на $[0, 2^{-1/2})$ и $(-\infty, -1) \bigcup (1, +\infty)$ соответственно.

б) Докажем, что функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей при любом действительном x равенству

$$f(\sin x) + f(\cos x) = \sin x, \qquad (1)$$

не существует.

Действительно, взяв в тождестве (1) $x = 0$, получим равенство

$$f(0) + f(1) = 0, \qquad (2)$$

а взяв $x = \pi/2$ — равенство

$$f(1) + f(0) = 1. \qquad (3)$$

Но равенства (2) и (3) противоречивы: $0 = f(0) + f(1) = 1$, т. е. $0 = 1$. Следовательно, функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей тождеству (1), не существует.

10.4. Ответ : 8 зеленых клеток; 18 зеленых клеток.

Заметим, что поскольку в любой строке число красных клеток не меньше числа синих, то общее число красных клеток во всей таблице не меньше числа синих клеток. Точно так же, поскольку в любом столбце число синих клеток не меньше числа красных, то и во всей таблице число синих клеток не меньше числа красных. Тем самым, количества красных клеток и синих клеток во всей таблице одинаковы. Далее, если бы хоть в одной строке число красных клеток было строго больше числа синих, то число красных клеток во всей таблице было бы больше числа синих клеток — противоречие. Поэтому в каждой строке таблицы число красных клеток равно числу синих. То же самое верно и для столбцов.

Отсюда следует, что в каждой строке число красных и синих клеток вместе четно, а тогда число зеленых клеток нечетно. Итак, в каждой из 8 строк есть хотя бы по одной зеленой клетке. Поэтому число зеленых клеток в таблице не менее 8.

Наконец, число зеленых клеток в любом из 9 столбцов таблицы не превосходит 2 (иначе, число зеленых клеток в таком столбце было бы больше числа синих клеток, равного числу красных). Поэтому число зеленых клеток в таблице не превосходит $2 \cdot 9 = 18$.

Следующие примеры показывают, что окраски, удовлетворяющие условию задачи с 8 и с 18 зелеными клетками, существуют. Потому наименьшее число зеленых клеток равно 8, а наибольшее — 18.

з	к	с	к	с	к	с	к	с
з	с	к	с	к	с	к	с	к
к	з	с	к	с	к	с	к	с
с	з	к	с	к	с	к	с	к
к	с	з	к	с	к	с	к	с
с	к	з	с	к	с	к	с	к
к	с	к	з	с	к	с	к	с
с	к	с	з	к	с	к	с	к

з	з	з	с	с	с	к	к	к
к	к	к	з	з	з	с	с	с
с	с	с	к	к	к	з	з	з
з	з	з	с	с	с	к	к	к
к	к	к	з	з	з	с	с	с
с	с	с	к	к	к	з	с	к
к	к	к	с	с	с	к	з	с
с	с	с	к	к	к	с	к	з

11 класс

11. 1. Ответ: 1/8.

Пусть a, b, c — данные числа. По условию имеем систему равенств

$$a^3 + b^3 = c^2 - \frac{3}{4}, \quad b^3 + c^3 = a^2 - \frac{3}{4}, \quad c^3 + a^3 = b^2 - \frac{3}{4}. \qquad (1)$$

Вычитая из первого равенства второе, получим $a^3 - c^3 = c^2 - a^2$. Сокращая на $a - c$ (по условию $a \neq c$), получаем $a^2 + ac + c^2 = -(a + c)$. Аналогично можно заключить, что $b^2 + ab + a^2 = -(a + b)$ и $b^2 + bc + c^2 = -(b + c)$, т.е.

$$a^2+ac+c^2 = -(a+c),\ b^2+bc+c^2 = -(b+c),\ b^2+ba+a^2 = -(a+b),\ b^2+bc+c^2 = -(b+c). \qquad (2)$$

Поэтому $(a^2+ac+c^2)-(b^2+bc+c^2) = (b+c)-(a+c)$, откуда $(a^2-b^2)+c(a-b) = -(a-b)$. Сокращая на $a - b$ ($a \neq b$), получаем

$$a + b + c = -1. \qquad (3)$$

Складывая все три равенства (2), получим

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ca) = -2(a + b + c), \quad \text{или} \quad 2(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca) = 2,$$

откуда (см. (3))

$$ab + bc + ca = 0. \tag{4}$$

Далее, возведем в куб обе части равенства (3):

$$-1 = (a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + ab^2 + b^2c + c^b + a^2c + c^2a) + 6abc. \tag{5}$$

Заметим, что

$$(a^2b + ab^2 + b^2c + c^2b + a^2c + c^2a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc \overset{(4)}{=} 0 - 3abc = -3abc.$$

Далее, складывая все три равенства (1), получим

$$2(a^3+b^3+c^3) = a^2+b^2+c^2-\frac{9}{4} = (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)-\frac{9}{4} = (-1)^2-2\cdot 0-\frac{9}{4} = 1-\frac{9}{4} = -\frac{5}{4},$$

откуда $a^3 + b^3 + c^3 = -\frac{5}{8}$. Тогда равенство (5) принимает вид

$$-1 = -\frac{5}{8} + 3\cdot(-3abc) + 6abc = -\frac{5}{8} - 3abc.$$

Тогда $3abc = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$. Следовательно, $abc = \frac{1}{8}$.

Замечание. Можно доказать, с помощью производной, что тройка различных действительных чисел, удовлетворяющих условию задачи, в самом деле существует и определена однозначно, как три корня уравнения $x^3 + x^2 - \frac{1}{8} = 0$.

11. 2. Ответ: **а)** да, существует; **б)** нет, не существует.

а) Пример функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которой при любом действительном x выполняется равенство

$$f(\sin x) + f(\cos x) = 2, \tag{$*$}$$

доставляет функция f, тождественно равная 1, т. е. $f(t) = 1$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Для неё выполнимость тождества $(*)$ очевидна: $1 + 1 = 2$. Другой пример, почти столь же очевидный, как и предыдущий, даёт функция $f(t) = 2t^2$. В самом деле, для неё при всех действительных x получаем:

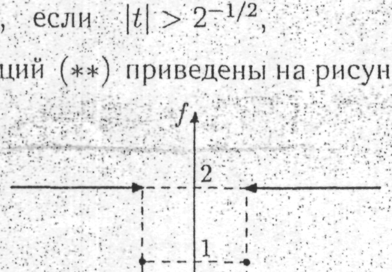
$$f(\sin x) + f(\cos x) = 2(\sin x)^2 + 2(\cos x)^2 = 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2$$

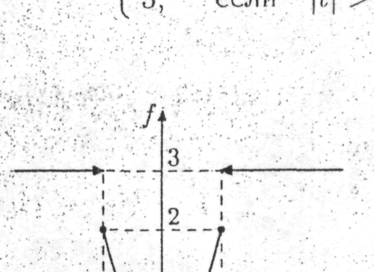
согласно основному тригонометрическому тождеству.

Для решения п. **а)** задачи достаточно привести пример только одной функции. В действительности же функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих тождеству $(*)$, существует бесконечно много. Приведём ещё два из тех примеров таких функций, которые можно задать аналитическим выражением:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ t \in (-2^{-1/2}, 2^{-1/2}), \\ 1, & \text{если } \ |t| = 2^{-1/2}, \\ 2, & \text{если } \ |t| > 2^{-1/2}, \end{cases} \qquad f(t) = \begin{cases} 2t^2, & \text{если } \ t \in [-1, 1], \\ 3, & \text{если } \ |t| > 1. \end{cases} \tag{$**$}$$

Графики функций $(**)$ приведены на рисунке.





Вообще, несложно описать все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие тождеству $(*)$. Для этого заметим сначала, что, поскольку $|\sin x| \leqslant 1$ и $|\cos x| \leqslant 1$, значения $f(t)$ функции f при $|t| > 1$ могут быть любыми, если требовать только, чтобы она удовлетворяла тождеству $(*)$. Рассмотрим поэтому функцию f только на отрезке $[-1,1]$ (или, как ещё говорят, сужение (или ограничение) функции f на отрезок $[-1,1]$). Докажем, что функция f на отрезке $[-1,1]$ является чётной. Действительно, заменив в тождестве $(*)$ x на $-x$ и воспользовавшись тем, что функция $\sin$ нечётна, а функция $\cos$ чётна, получим тождество $f(-\sin x) + f(\cos x) = 2$. Почленно вычитая это тождество из тождества $(*)$, получим $f(\sin x) - f(-\sin x) = 0$ при всех x, или, что то же самое, если обозначить $\sin x$ через t, что $f(t) = f(-t)$ для любого $t \in [-1,1]$.

Так как функция f на отрезке $[-1,1]$ чётна, то её достаточно рассмотреть только на отрезке $[0,1]$. При $x = \pi/4$ из тождества $(*)$ находим $f(2^{-1/2}) = 1$. Пусть известно значение $f(\sin x)$; тогда, в силу тождества $(*)$, известно и её значение $f(\cos x) = 2 - f(\sin x)$. В частности, если положить $t = \cos x$, где $\pi/4 < x \leqslant \pi/2$, т. е. $2^{-1/2} < t \leqslant 1$, то $f(t) = 2 - f(\sqrt{1-t^2})$ для всех $t \in (2^{-1/2}, 1]$. Когда t пробегает полуинтервал $(2^{-1/2}, 1]$, величина $\sqrt{1-t^2}$ пробегает полуинтервал $[0, 2^{-1/2})$. Поэтому если известно значение $f(t)$ при $t \in [0, 2^{-1/2})$, то известно и значение $f(t)$ при $t \in (2^{-1/2}, 1]$.

Подводя итог, получаем, что функция f на отрезке $[0,1]$ должна удовлетворять следующим трём условиям: 1) $f(t) \equiv g(t)$ при $t \in [0, 2^{-1/2})$, где g — какая-то функция, определённая на полуинтервале $[0, 2^{-1/2})$, 2) $f(2^{-1/2}) = 1$ и 3) $f(t) = 2 - g(\sqrt{1-t^2})$ при $t \in (2^{-1/2}, 1]$. На полуинтервал $[-1, 0)$ функция f продолжается как чётная, а при $|t| > 1$ её значения $f(t)$ могут быть выбраны произвольно.

Обратно, выбрав произвольно какие-либо функции g и G, определённые соответственно только на $[0, 2^{-1/2})$ и $(-\infty, -1) \bigcup (1, +\infty)$, легко убедиться, что функция

$$f(t) = \begin{cases} g(|t|), & \text{если } t \in (-2^{-1/2}, 2^{-1/2}), \\ 1, & \text{если } |t| = 2^{-1/2}, \\ 2 - g(\sqrt{1-t^2}), & \text{если } 2^{-1/2} < |t| \leqslant 1, \\ G(t), & \text{если } |t| > 1 \end{cases} \qquad ({}^{*}_{**})$$

удовлетворяет тождеству $(*)$.

Приведённые выше примеры функций $f(t) = 1$ и $f(t) = 2t^2$ получаются по формуле $({}^{*}_{**})$, если в ней выбрать соответственно $g(t) = 1$, $G(t) = 1$ и $g(t) = 2t^2$, $G(t) = 2t^2$. Функции же $(**)$ получаются по формуле $({}^{*}_{**})$, если в ней взять $g(t) = 0$, $G(t) = 2$ и $g(t) = 2t^2$, $G(t) = 3$ соответственно. Первые два из этих примеров — функции непрерывные, а два других — функции, имеющие только по две точки разрыва. Воспользовавшись формулой $({}^{*}_{**})$, легко привести пример функции f, удовлетворяющей тождеству $(*)$ и разрывной в каждой точке: достаточно в качестве функций g и G взять сужение функции Дирихле на $[0, 2^{-1/2})$ и $(-\infty, -1) \bigcup (1, +\infty)$ соответственно.

б) Докажем, что функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей при любом действительном x равенству

$$f(\sin x) + f(\cos x) = \sin 2x, \qquad (1)$$

не существует.

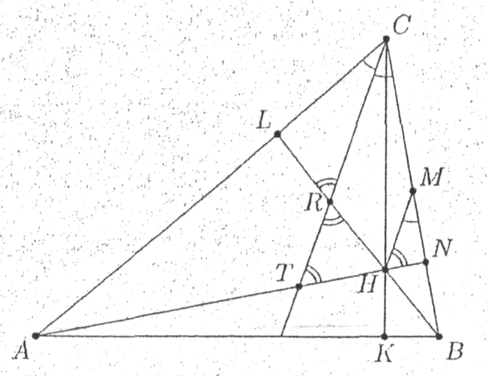
Положим в тождестве (1) последовательно $x = \dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{3\pi}{4}$ и $x = \dfrac{5\pi}{4}$ — получим соответственно равенства

$$\begin{aligned} &f(2^{-1/2}) + f(2^{-1/2}) = 1, \\ &f(2^{-1/2}) + f(-2^{-1/2}) = -1, \\ &f(-2^{-1/2}) + f(-2^{-1/2}) = 1. \end{aligned}$$

Тогда, почленно сложив первое и последнее из этих равенств, получим, $2 \cdot (f(2^{-1/2}) + f(-2^{-1/2})) = 2$, или $f(2^{-1/2}) + f(-2^{-1/2}) = 1$. Но полученное равенство противоречит второму из них: $-1 = f(2^{-1/2}) + f(-2^{-1/2}) = 1$, т. е. $-1 = 1$. Следовательно, функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей тождеству (1), не существует.

11.3. Ответ: 5.

Обозначим $\gamma = \angle ACB$. Проведем высоту BL (она, очевидно, пройдет через точку H). Пусть R — точка пересечения BL и CT. Так как $MH \parallel CT$, то $\angle HMN = \angle TCN = \gamma/2$, $\angle MHN = \angle RTH = 90^\circ - \gamma/2$. Кроме того, так как треугольник RLC прямоугольный, то $\angle LRC = 90^\circ - \angle LCR = 90^\circ - \gamma/2$. Поскольку вертикальные углы TRH и LRC равны, то $\angle TRH = 90^\circ - \gamma/2 = \angle RTH$. Следовательно, треугольник TRH равнобедренный и $RH = TH = 10$. Так как по условию $CM = MB$ и $MH \parallel CT$, то MH — средняя линия треугольника CRB, и, следовательно, $BH = RH = 10$. Остается заметить, что окружность, описанная около треугольника NBK, также описана около четырехугольника $NBKH$ (так как $\angle HNB + \angle HKB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$), а отрезок BH является диаметром этой окружности. Стало быть искомый радиус равен $0,5BH = 5$.



11.4. Ответ: 10 зеленых клеток; 18 зеленых клеток.

Заметим, что поскольку в любой строке число красных клеток не меньше числа синих, то общее число красных клеток во всей таблице не меньше числа синих клеток. Точно так же, поскольку в любом столбце число синих клеток не меньше числа красных, то и во всей таблице число синих клеток не меньше числа красных. Тем самым, количества красных клеток и синих клеток во всей таблице одинаковы. Далее, если бы хоть в одной строке число красных клеток было строго больше числа синих, то число красных клеток во всей таблице было бы больше числа синих клеток — противоречие. Поэтому в каждой строке таблицы число красных клеток равно числу синих. То же самое верно и для столбцов.

Отсюда следует, что в каждом столбце число красных и синих клеток вместе четно, а число зеленых клеток нечетно. Итак, в каждом из 10 столбцов есть хотя бы по одной зеленой клетке. Поэтому число зеленых клеток в таблице не менее 10.

Наконец, число зеленых клеток в любой из 9 строк таблицы не превосходит 2 (иначе, число зеленых клеток в такой строке было бы больше числа синих клеток, равного числу красных). Поэтому число зеленых клеток в таблице не превосходит $2 \cdot 9 = 18$.

Следующие примеры показывают, что окраски, удовлетворяющие условию задачи с 10 и с 18 зелеными клетками, существуют. Потому наименьшее число зеленых клеток равно 10, а наибольшее — 18.

з	з	к	с	к	с	к	с	к	с
к	с	з	з	с	к	с	к	с	к
с	к	с	к	з	з	к	с	к	с
к	с	к	с	к	с	з	з	с	к
с	к	с	к	с	к	с	к	з	з
к	с	к	с	к	с	к	с	к	с
с	к	с	к	с	к	с	к	с	к
к	с	к	с	к	с	к	с	к	с
с	к	с	к	с	к	с	к	с	к

з	з	к	к	с	с	к	к	с	с
з	з	к	к	с	с	к	к	с	с
з	з	к	к	с	с	к	к	с	с
с	с	з	з	к	к	с	с	к	к
с	с	з	з	к	к	с	с	к	к
с	с	з	з	к	к	с	с	к	к
к	к	с	с	з	с	к	з	с	к
к	к	с	с	к	з	с	к	з	с
к	к	с	с	с	к	з	с	к	з

LXI Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

10 — 13 января 2011 года

РЕШЕНИЯ

Второй день

8 класс

8.5. Ответ : нет, не существуют.

Предположим, что такие числа существуют. Тогда легко видеть, что число y должно быть нечетным, и поэтому последняя цифра в десятичной записи числа $5y^3$ будет равна 5. Отсюда следует, что последняя цифра в десятичной записи числа $2x^2 = 2011 + 5y^3$ будет равна 6 (вне зависимости от того является ли число y положительным или отрицательным). Следовательно, последняя цифра в десятичной записи числа x^2 должна быть или 3, или 8. Однако легко проверить, что квадраты чисел не могут оканчиваться ни на 3, ни на 8. Таким образом, целых чисел, удовлетворяющих условию задачи, не существует.

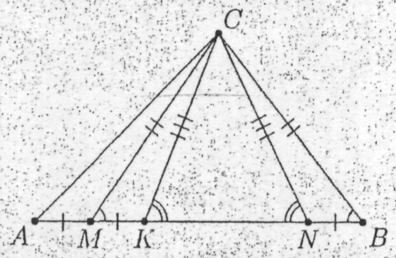
8.6. Так как данные числа положительные, то из условия имеем

$$ab \geqslant xa + yb \geqslant xb + yb, \quad \text{или} \quad ab \geqslant (x+y)b.$$

Сокращая на $b > 0$, получаем $a \geqslant x + y$, что и требовалось.

8.7. Ответ : 8 см.

По условию треугольник MCB равнобедренный, так как $CM = CB$. Поэтому $\angle CMK = \angle CBK$. Отметим на стороне AB точку N так, чтобы $BN = MK (= AM)$. Тогда $AN = MB$. Далее, $\Delta KMC = \Delta NBC$ по двум сторонам и углу между ними. Тогда, в частности, $CK = CN$, и



$$\angle ANC = \angle NKC = 180^\circ - (0,5\angle CAK + 90^\circ) =$$
$$= 90^\circ - 0,5\angle CAK.$$

Тогда в треугольнике ACN находим

$$\angle ACN = 180^\circ - \angle ANC - \angle CAK = 180^\circ - (90^\circ - 0,5\angle CAK) - \angle CAK =$$
$$= 90^\circ - 0,5\angle CAK = \angle ANC.$$

Следовательно, треугольник ACN равнобедренный, и тогда $AC = AN = MB = 8$.

8.8. Ответ : 5 побед и 2 очка, соответственно.

Покажем, что победитель турнира одержал не менее 5 побед. Предположим, что это не так, т. е. у победителя не более 4 побед. Тогда, так как он (как и каждый участник) сыграл 9 партий, то набрал не более $4 \cdot 1 + 5 \cdot 0,5 = 6,5$ очков. Тогда участник, занявший второе место, набрал не более 6 очков, третье место — не более 5,5 и т. д., наконец, аутсайдер — не более $6,5 - 9 \cdot 0,5 = 2$ очка. Тогда все спортсмены вместе набрали не более $6,5 + 6 + 5,5 + \ldots + 2 = 42,5$ очков.

Однако, так как каждый из 10 участников сыграл с каждым одну партию, то каждый сыграл 9 партий и, значит, общее число партий (учитывая, что в каждой партии участвовало ровно два спортсмена) равно $\dfrac{10 \cdot 9}{2} = 45$. В каждой партии при любом ее исходе участники на двоих получают 1 очко. Поэтому общее число очков, набранных всеми участниками во всех партиях, также равно 45. Получаем противоречие.

Итак, победитель выиграл не менее 5 партий. Следующая таблица показывает, что 5 выигранных партий у победителя такого турнира быть могло.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
1	×	·	·	·	·	1	1	1	1	1	7
2	·	×	·	·	·	·	1	1	1	1	6,5
3	·	·	×	·	·	·	·	1	1	1	6
4	·	·	·	×	·	·	·	·	1	1	5,5
5	·	·	·	·	×	·	·	·	·	1	5
6	0	·	·	·	·	×	·	·	·	·	4
7	0	0	·	·	·	·	×	·	·	·	3,5
8	0	0	0	·	·	·	·	×	·	·	3
9	0	0	0	0	·	·	·	·	×	·	2,5
10	0	0	0	0	0	·	·	·	·	×	2

Таким образом, наименьшее возможное число выигранных партий у победителя турнира равно 5. Приведенная таблица показывает, аутсайдер мог набрать 2 очка. Покажем, что это у него наибольшее возможное число очков. Действительно, если бы он набрал не менее 2,5 очка, то участник, занявший предпоследнее место имел бы не менее 3 очков, третий с конца — не менее 3,5 очка и т. д., наконец, победитель — не менее $2,5+9\cdot 0,5=7$ очков. Тогда у всех участников турнира вместе было бы не менее $2,5+3+3,5+\ldots+7=47,5$ очков. Но это невозможно, поскольку, как мы знаем, обще число очков, набранных всеми участниками, равно 45.

9 класс

9.5. Заметим, что

$$9=2^2+2^2+1^2 \quad \text{и} \quad 2\cdot 9=4^2+1^2+1^2. \qquad (*)$$

Из представлений $(*)$ вытекают представления чисел $2^m\cdot 9$ в виде суммы трёх квадратов при любом натуральном m. Действительно, если m чётно, т. е. $m=2k$, где $k\in\mathbb{N}$, то в силу первого равенства в $(*)$ получаем:

$$2^{2k}\cdot 9=(2^k\cdot 2)^2+(2^k\cdot 2)^2+(2^k\cdot 1)^2,$$

а если m нечётно, т. е. $m=2k-1$, где $k\in\mathbb{N}$, то в силу второго равенства в $(*)$ получаем:

$$2^{2k-1}\cdot 9=2^{2(k-1)}\cdot 2\cdot 9=(2^{k-1}\cdot 4)^2+(2^{k-1}\cdot 1)^2+(2^{k-1}\cdot 1)^2.$$

9.6. *Первое решение.* Применив к правой части данного по условию неравенства

$$ab\geqslant xa+yb \qquad (1)$$

неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел (неравенство Коши), получим

$$xa+yb\geqslant 2\sqrt{abxy}. \qquad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) следует, что

$$ab\geqslant 2\sqrt{abxy},$$

откуда, сокращая на $\sqrt{ab}$ и возводя после этого получившееся неравенство в квадрат, получаем требуемое неравенство $ab \geqslant 4xy$.

Второе решение. Заметим сначала, что если

$$ab \geqslant xa + yb \qquad (*)$$

и a, b, x, y — положительные числа, то $x < b$. В самом деле, если $x \geqslant b$, то $xa + yb \geqslant \geqslant ab + yb > ab$, что противоречит $(*)$. Так как $0 < x < b$, то $x = \dfrac{b}{k}$, где $k > 1$. Тогда $y \leqslant \dfrac{k-1}{k}a$. Действительно, если $y > \dfrac{k-1}{k}a$, то $xa + yb > \dfrac{ab}{k} + \dfrac{k-1}{k}ab = ab$, что противоречит $(*)$. Итак, $x = \dfrac{b}{k}$ и $y \leqslant \dfrac{k-1}{k}a$, где $k > 1$.

Поэтому $xy \leqslant \dfrac{k-1}{k^2}ab$, т. е. $ab \geqslant \dfrac{k^2}{k-1}$. Так как при всех $k > 1$ верно неравенство $\dfrac{k^2}{k-1} \geqslant 4$ (поскольку это неравенство очевидно равносильно верному неравенству $(k-2)^2 \geqslant 0$), то $ab \geqslant 4xy$, что и требовалось доказать.

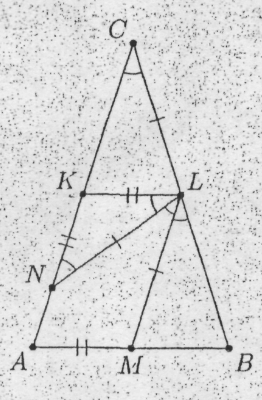
Третье решение. Почленно разделив неравенство $xa + yb \leqslant ab$ на b и перенеся первое слагаемое из левой части в правую, получим $y \leqslant -\dfrac{a}{b}x + a$. Тогда, так как по условию $x > 0$, $y > 0$, имеем

$$4xy \leqslant 4x\left(-\frac{a}{b}x + a\right) = -4\frac{a}{b}x(x-b). \qquad (*)$$

Поскольку $-x(x-b)$ — квадратный трёхчлен, корни которого 0 и b, а коэффициент при его старшем члене отрицателен, то максимум этого квадратного трёхчлена достигается при $x = \dfrac{b}{2}$ и равен $-\dfrac{b}{2}\cdot\left(\dfrac{b}{2} - b\right) = \dfrac{b^2}{4}$. Поэтому, продолжая неравенство $(*)$, получаем $4xy \leqslant 4\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b^2}{4} = ab$, что и требовалось доказать.

9.7. Ответ: 36°.

Пусть K — середина стороны AC. Так как M и L — середины сторон, то ML — средняя линия треугольника ABC, и $ML \parallel AC$, $ML = 0,5AC = AK$. Поэтому $\angle NLM = \angle CNL$ (как внутренние накрестлежащие углы) и $\angle MLB = \angle ACL$ (как односторонние углы). Кроме того, так как LK — средняя линия, то $LK = 0,5AB$, поэтому $NK = 0,5AC - NA = ML - NA = AM = 0,5AB = LK$. Следовательно, треугольник NKL равнобедренный и $\angle KNL = \angle KLN$. Заметим, что треугольник NLC также равнобедренный, поскольку $NL = ML = 0,5AC = 0,5BC = LC$. Значит $\angle CNL = \angle KCL = \angle ACB$.



Таким образом, $\angle BLM = \angle MLN = \angle NLK = \angle ACB$. Но $\angle ABC + 3\angle ACB = \angle ABC + \angle BLK = 180°$ (так как $LK \parallel AB$) и $180° = \angle ACB + \angle ABC + \angle BAC = \angle ACB + 2\angle ABC$. Исключая из двух равенств $\angle ABC + 3\angle ACB = 180°$ и $\angle ACB + 2\angle ABC = 180°$ угол ABC, находим $5\angle ACB = 180°$, откуда $\angle NLM = \angle ACB = 36°$.

9.8. Ответ: 4.

Пусть в турнире участвовало n шахматистов. Так как каждый сыграл с каждым, то каждый из n шахматистов сыграл $n-1$ партий и, значит, общее число партий (учитывая, что в каждой партии участвовало ровно два спортсмена) равно $\dfrac{n(n-1)}{2}$. В каждой

$$2+2,5+3+\ldots+\left(2+\frac{n-1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot(4+5+6+\ldots+(4+n-1))=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4+(3+n)}{2}n=\frac{(7+n)n}{4}.$$

Поэтому неравенство (1) равносильно

$$\frac{n(n-1)}{2}\geqslant\frac{(7+n)n}{4}\quad\Leftrightarrow\quad n-1\geqslant\frac{7+n}{2}\quad\Leftrightarrow\quad 2n-2\geqslant 7+n\quad\Leftrightarrow\quad n\geqslant 9.$$

Итак, в турнире участвовало не менее 9 шахматистов. С другой стороны следующая таблица (с результатами игр, в которой точка означает $0,5$ очка) показывает, что существует турнир, в котором участвовало ровно 9 человек и который удовлетворяет всем условиям задачи.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
1	×	·	·	·	·	1	1	1	1	6
2	·	×	·	·	·	·	1	1	1	5,5
3	·	·	×	·	·	·	·	1	1	5
4	·	·	·	×	·	·	·	·	1	4,5
5	·	·	·	·	×	·	·	·	·	4
6	0	·	·	·	·	×	·	·	·	3,5
7	0	0	·	·	·	·	×	·	·	3
8	0	0	0	·	·	·	·	×	·	2,5
9	0	0	0	0	·	·	·	·	×	2

10 класс

10.5. Ответ : все нечётные натуральные m.

Пусть

$$2^m\cdot 7=a^2+b^2+c^2,\quad\text{где}\quad a,b,c\in\mathbb{N}.\qquad(1)$$

Так как число в левой части этого равенства чётно, то чётным должно быть и число в его правой части. Это возможно только в двух случаях: либо 1) среди чисел a, b, c два нечётных и одно чётно, либо 2) все три числа a, b, c чётные.

Покажем, что в случае 1) равенство (1) возможно только при $m=1$. Пусть, без нарушения общности, числа a и b нечётны, а число c чётно, т. е. $a=2k-1$, $b=2l-1$ и $c=2n$ для некоторых натуральных k, l и n. Тогда равенство (1) принимает вид

$$2^m\cdot 7=4(k^2+l^2-k-l+n^2)+2.\qquad(2)$$

Это равенство, если $m \geqslant 2$, невозможно, поскольку тогда его левая часть делится на 4, а правая нет. Если же $m = 1$, то равенство (2) выполняется, например, при $k = 2$, $l = n = 1$, т. е. при $a = 3$, $b = 1$, $c = 2$.

Рассмотрим случай 2). Пусть 2^q — наибольшая степень двойки, на которую делится каждое из чисел a, b и c, т. е. $a = 2^q a_1$, $b = 2^q b_1$ и $= 2^q{}_1$, где среди чисел a_1, b_1, c_1 хотя бы одно нечётно. Тогда равенство (1) принимает вид

$$2^{m-2q} \cdot 7 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2. \tag{3}$$

Если $m - 2q \geqslant 2$, то, поскольку среди чисел a_1, b_1, c_1 хотя бы одно нечётное, а тогда нечётных среди них ровно два, такое же рассуждение, как и выше, показывает, что равенство (3) невозможно. Поэтому равенство (3) может выполняться только либо при $m - 2q = 0$, либо при $m - 2q = 1$. Если $m - 2q = 0$, то равенство (3) принимает вид $7 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$, и простой перебор показывает, что оно невозможно. Если $m - 2q = 1$, то равенство (3) принимает вид $14 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$, и его решения найдены выше: например, $a_1 = 3$, $b_1 = 2$, $c_1 = 1$.

Таким образом, представление (1) имеет место только при нечётных m.

10.6. *Первое решение.* Разделив последовательно обе части данного по условию неравенства $ab \geqslant xa + yb$ на a и на b, получим соответственно неравенства

$$b \geqslant x + y\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad a \geqslant x\frac{a}{b} + y.$$

Сложив их почленно, придём к неравенству

$$a + b \geqslant x + y + \left(x\frac{a}{b} + y\frac{b}{a}\right). \tag{$*$}$$

Применив к слагаемым в скобках в правой части неравенства $(*)$ неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел (неравенство Коши), получим

$$x\frac{a}{b} + y\frac{b}{a} \geqslant 2\sqrt{x\frac{a}{b} \cdot y\frac{b}{a}} = 2\sqrt{xy}.$$

Поэтому, продолжая неравенство $(*)$, приходим к неравенству

$$a + b \geqslant x + y + 2\sqrt{xy} = \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2,$$

откуда, извлекая квадратный корень из обеих его частей, получаем $\sqrt{a+b} \geqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Заметим сначала, что если

$$ab \geqslant xa + yb \tag{1}$$

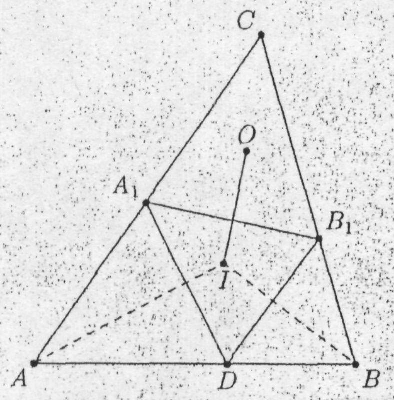
и a, b, x, y — положительные числа, то $x < b$. В самом деле, если $x \geqslant b$, то $xa + yb \geqslant$ $\geqslant ab + yb > ab$, что противоречит (1). Так как $0 < x < b$, то $x = \dfrac{b}{k}$, где $k > 1$. Тогда $y \leqslant \dfrac{k-1}{k}a$. Действительно, если $y > \dfrac{k-1}{k}a$, то $xa + yb > \dfrac{ab}{k} + \dfrac{k-1}{k}ab = ab$, что противоречит (1). Итак, $x = \dfrac{b}{k}$ и $y \leqslant \dfrac{k-1}{k}a$, где $k > 1$.

Поэтому $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{b} + \sqrt{\dfrac{k-1}{k}}\sqrt{a}$. Следовательно, для доказательства требуемого неравенства достаточно доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{b} + \sqrt{\frac{k-1}{k}}\sqrt{a} < \sqrt{a+b}, \tag{2}$$

если $k > 1$. Почленно умножив неравенство (2) на $\sqrt{k}$ и возведя обе части полученного неравенства в квадрат, после очевидных преобразований получим равносильное (2) неравенство $2\sqrt{(k-1)ab} \leqslant a + (k-1)b$, которое очевидно верно, поскольку является неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел.

10.7. Отметим на стороне AB точку D так, чтобы $AD = AA_1$. В силу данного в условии равенства получим, что $BD = BB_1$. Тогда треугольники DAA_1 и DBB_1 равнобедренные. Соединим точки A и B с точкой I. AI и BI — биссектрисы в равнобедренных треугольниках, поэтому AI и BI являются также серединными перпендикулярами к отрезкам A_1D и B_1D соответственно. Точка I, как точка пересечения этих перпендикуляров, являются поэтому центром описанной окружности треугольника A_1B_1D. В частности, точка I лежит и на серединном перпендикуляре к отрезку A_1B_1. Но точка O также лежит на серединном перпендикуляре к этому отрезку как центр описанной окружности треугольника A_1B_1C. Поэтому прямая IO и есть серединный перпендикуляр отрезка A_1B_1. Тем самым $OI \perp A_1B_1$.



10.8. Ответ : 5 побед.

Пусть в турнире участвовало n шахматистов. Если последний (аутсайдер) набрал 2,5 очка, то предпоследний — не менее 3 очков, предпредпоследний — не менее 3,5 очка и т. д., наконец, победитель турнира — не менее $2,5+0,5(n-1) = 2+0,5n$. С другой стороны, если победитель выиграл s партий и t партий свел вничью, то он набрал $s + 0,5t$ очков. Поэтому $2 + 0,5n \leqslant s + 0,5t$. Но так как победитель (как и каждый участник турнира) сыграл $n-1$ партию, то $t \leqslant (n-1) - s$. Поэтому $2+0,5n \leqslant s+0,5(n-1-s)$. Упрощая полученное неравенство, находим:

$$2 + 0,5n \leqslant 0,5s + 0,5n - 0,5 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leqslant 0,5s - 0,5 \quad \Leftrightarrow \quad s \geqslant 5.$$

Итак, победитель турнира выиграл не менее 5 партий. Покажем, что турнир, удовлетворяющий условию задачи, в котором победитель выиграл ровно 5 партий, существует. Для этого оценим предварительно число участников турнира.

Из вышеприведенных рассуждений следует, что все участниками турнира вместе набрали не меньше $2,5+3+3,5+\ldots+(2+0,5n) = \dfrac{4,5+0,5n}{2} \cdot n$ очков. В то же время, так как каждый сыграл с каждым, то каждый из n шахматистов сыграл $n-1$ партий и, значит, общее число партий (учитывая, что в каждой партии участвовало ровно два спортсмена) равно $\dfrac{n(n-1)}{2}$. В каждой партии при любом ее исходе участники на двоих получают 1 очко. Поэтому общее число очков, набранных всеми участниками во всех партиях также равно $\dfrac{n(n-1)}{2}$. В результате получаем неравенство $\dfrac{4,5+0,5n}{2} \cdot n \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$, упрощая которое находим $4,5 + 0,5n \leqslant n - 1 \quad \Leftrightarrow \quad n \geqslant 11$.

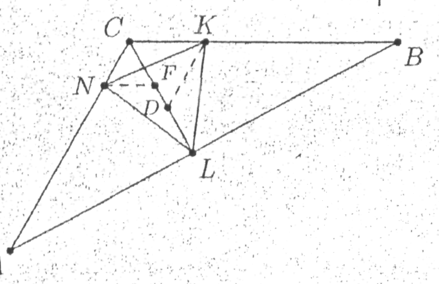
Теперь легко построить нужный пример. Пусть в турнире участвовало 11 спортсменов. Разобьем их на три группы (5 человек в первой группе, 1 — во второй и 5 — в третьей) и Обозначим соответственно: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, B, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5. Укажем только результативные партии, т. е. те, которые закончились не вничью. Пусть A_1 выиграл у всех из третьей группы, т. е. у C_1, C_2, C_3, C_4, C_5. Далее, пусть A_2 выиграл у C_2, C_3, C_4, C_5; спортсмен A_3 выиграл у C_3, C_4, C_5; спортсмен A_4 выиграл у C_4, C_5; спортсмен A_5 выиграл только у C_5. Спортсмен B свел все партии вничью. Все неуказанные партии также закончились вничью. Видим, что A_1 — победитель и выиграл 5 партий. Все спортсмены из группы A набрали разное число очков (у них разное число побед и нет поражений), большее, чем спортсмен B. У спортсменов из группы C также разное число очков (у них разное число поражений и нет побед), меньшее, чем у спортсмена B. Так-что, все условия выполняются.

11 класс

11.5. Ответ : нет, не существуют.

Заметим, что при делении на 9 третьей степени любого целого числа остатками могут быть только числа 0, 1 и 8. Следовательно, по модулю 9 число $2x^3$ сравнимо с одним из чисел $0, 2, -2$, а число y^3 — с одним из чисел $0,\ 1,\ -1$. Поэтому сумма $2x^3 + y^3$ сравнима с одним из чисел $0, 1, -1, 2, 3, 1, -2, -1, -3$. Это означает, что сумма $2x^3 + y^3$ сравнима по модулю 9 с одним из чисел $0, 1, 2, 3, 6, 8$, в то время как $2011 \equiv 4 \pmod 9$. Заключаем, что ни при каких целых x и y равенство, указанное в условии не выполняется.

11.6. Отметим на биссектрисе BL точки F и D так, чтобы $CF = LD = CN$. Тогда в силу равенства из условия $FL = CD = CK$. По выбору этих точек заключаем, что треугольники NCF и DCK равносторонние, так как $\angle NCF = 60°$ и $CN = CF$, а $\angle DCK = 60°$ и $CD = CK$. Отсюда следует, что $\angle NFL = \angle LDK = 180° - 60° = 120°$. Стало быть, три треугольника: NCK, NFL, LDK равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $NK = NL = LK$, т.е. треугольник KLN действительно равносторонний.



11.7. *Первое решение.* Последовательно разделив обе части данного по условию неравенства $abc \geqslant ka + nb + mc$ на a, на b и на c, получим соответственно неравенства

$$bc \geqslant k + n\frac{b}{a} + m\frac{c}{a}, \quad ac \geqslant k\frac{a}{b} + n + m\frac{c}{b} \quad \text{и} \quad ab \geqslant k\frac{a}{c} + n\frac{b}{c} + m.$$

Почленно сложив эти три неравенства и перегруппировав члены в правой части получившегося неравенства, придём к неравенству

$$ab + bc + ac \geqslant k + n + m + \left(k\frac{a}{c} + m\frac{c}{a}\right) + \left(m\frac{c}{b} + n\frac{b}{c}\right) + \left(n\frac{b}{a} + k\frac{a}{b}\right). \qquad (*)$$

Применив к каждой паре слагаемых в скобках в правой части неравенства $(*)$ неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел (неравенство Коши), получим

$$k\frac{a}{c} + m\frac{c}{a} \geqslant 2\sqrt{k\frac{a}{c}\cdot m\frac{c}{a}} = 2\sqrt{km}, \quad m\frac{c}{b} + n\frac{b}{c} \geqslant 2\sqrt{m\frac{c}{b}\cdot n\frac{b}{c}} = 2\sqrt{mn}$$

и

$$n\frac{b}{a} + k\frac{a}{b} \geqslant 2\sqrt{n\frac{b}{a}\cdot k\frac{a}{b}} = 2\sqrt{nk}.$$

Поэтому, продолжая неравенство $(*)$, приходим к неравенству

$$ab + bc + ac \geqslant k + n + m + 2\sqrt{km} + 2\sqrt{mn} + 2\sqrt{nk} = \left(\sqrt{k} + \sqrt{n} + \sqrt{m}\right)^2. \qquad (**)$$

Как известно, для любых чисел a, b, c верно неравенство $(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ac)$ (действительно, это неравенство равносильно неравенству $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$, а последнее неравенство верно: $a^2+b^2+c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{a^2+c^2}{2} \geqslant ab+bc+ac$). Из этого неравенства и неравенства $(**)$ вытекает неравенство

$$(a+b+c)^2 \geqslant 3\left(\sqrt{k}+\sqrt{n}+\sqrt{m}\right)^2,$$

извлекая квадратный корень из обеих частей которого, получаем требуемое неравенство.

Второе решение. Заметим сначала, что если

$$abc \geqslant ka+nb+mc \tag{1}$$

и a, b, c, k, n, m — положительные числа, то $k < bc$. В самом деле, если $k \geqslant bc$, то $ka+nb+mc \geqslant abc+nb+mc > abc$, что противоречит (1). Так как $0 < k < bc$, то $k = \frac{bc}{\lambda}$, где $\lambda > 1$. Тогда из (1) получаем

$$\frac{\lambda-1}{\lambda}abc \geqslant nb+mc. \tag{2}$$

Покажем, что $n < \frac{ac(\lambda-1)}{\lambda}$. В самом деле, если $n \geqslant \frac{ac(\lambda-1)}{\lambda}$, то

$$nb+mc \geqslant \frac{(\lambda-1)}{\lambda}abc+mc > \frac{(\lambda-1)}{\lambda}abc,$$

что противоречит (2). Так как $0 < n < \frac{ac(\lambda-1)}{\lambda}$, то $n = \frac{ac(\lambda-1)}{\lambda}\cdot\frac{1}{\mu}$, где $\mu > 1$. Тогда $m \leqslant \frac{ab(\lambda-1)}{\lambda}\cdot\frac{\mu-1}{\mu}$. Действительно, если $m > \frac{ab(\lambda-1)}{\lambda}\cdot\frac{\mu-1}{\mu}$, то

$$nb+mc > \frac{abc(\lambda-1)}{\lambda}\cdot\frac{1}{\mu} + \frac{abc(\lambda-1)}{\lambda}\cdot\frac{\mu-1}{\mu} = \frac{\lambda-1}{\lambda}abc,$$

что противоречит (2). Итак,

$$k = \frac{bc}{\lambda}, \quad n = \frac{ac(\lambda-1)}{\lambda}\cdot\frac{1}{\mu} \quad \text{и} \quad m \leqslant \frac{ab(\lambda-1)}{\lambda}\cdot\frac{\mu-1}{\mu}.$$

Поэтому

$$\sqrt{k}+\sqrt{n}+\sqrt{m} \leqslant \sqrt{bc}\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \sqrt{\frac{ac(\lambda-1)}{\lambda}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mu}} + \sqrt{\frac{ab(\lambda-1)}{\lambda}}\cdot\sqrt{\frac{\mu-1}{\mu}}. \tag{3}$$

Докажем предварительно следующее неравенство: если $l > 1$ и $x > 0$, $y > 0$, то

$$\sqrt{x}\,\frac{1}{\sqrt{l}} + \sqrt{y}\sqrt{\frac{l-1}{l}} \leqslant \sqrt{x+y}. \tag{4}$$

Действительно, почленно умножив неравенство (4) на $\sqrt{l}$ и возведя обе части полученного неравенства в квадрат, после очевидных преобразований получим равносильное (4) неравенство $2\sqrt{(l-1)xy} \leqslant (l-1)x+y$, которое очевидно верно, поскольку является неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел.

Оценим сверху правую часть неравенства (3) при помощи доказанного неравенства (4). Применяя к двум последним слагаемым правой части (3) неравенство (4), получаем

$$\sqrt{\frac{ac(\lambda-1)}{\lambda}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mu}}+\sqrt{\frac{ab(\lambda-1)}{\lambda}}\cdot\sqrt{\frac{\mu-1}{\mu}}\leqslant\sqrt{\frac{ac(\lambda-1)}{\lambda}+\frac{ab(\lambda-1)}{\lambda}}=$$

$$=\sqrt{ac+ab}\sqrt{\frac{(\lambda-1)}{\lambda}}.$$

Значит, правая часть неравенства (3) не превосходит $\sqrt{bc}\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda}}+\sqrt{ac+ab}\sqrt{\frac{(\lambda-1)}{\lambda}}$. Оценивая последнее выражение при помощи неравенства (4), получаем, что правая часть неравенства (3) не больше $\sqrt{ab+ac+bc}$. Но, в свою очередь, $\sqrt{3}\sqrt{ab+ac+bc}\leqslant$ $\leqslant a+b+c$, как легко убедиться, если возвести обе части этого неравенства в квадрат. Итак, $\sqrt{3}\left(\sqrt{k}+\sqrt{n}+\sqrt{m}\right)\leqslant a+b+c$, что и требовалось доказать.

11.8. Ответ: $2k$ побед.

Пусть в турнире участвовало n шахматистов. Если последний (аутсайдер) набрал k очка, то предпоследний — не менее $k+0,5$ очка, предпредпоследний — не менее $k+1$ очка и т. д., наконец, победитель турнира — не менее $k+0,5(n-1)$. С другой стороны, если победитель выиграл s партий и t партий свел вничью, то он набрал $s+0,5t$ очков. Поэтому $k+0,5(n-1)\leqslant s+0,5t$. Но так как победитель (как и каждый участник турнира) сыграл $n-1$ партию, то $t\leqslant(n-1)-s$. Поэтому $k+0,5(n-1)\leqslant s+0,5(n-1-s)$. Упрощая полученное неравенство, находим:

$$k+0,5n-0,5\leqslant 0,5s+0,5n-0,5\quad\Leftrightarrow\quad s\geqslant 2k.$$

Итак, победитель турнира выиграл не менее $2k$ партий. Покажем, что турнир, удовлетворяющий условию задачи, в котором победитель выиграл ровно $2k$ партий, существует. Для этого оценим предварительно число участников турнира.

Из вышеприведенных рассуждений следует, что все участниками турнира вместе набрали не меньше

$$k+(r+0,5)+(k+1)+\ldots+(k+0,5(n-1))=\frac{k+k+0,5(n-1)}{2}\cdot n=nk+\frac{n(n-1)}{4}$$

очков. В то же время, так как каждый сыграл с каждым, то каждый из n шахматистов сыграл $n-1$ партий и, значит, общее число партий (учитывая, что в каждой партии участвовало ровно два спортсмена) равно $\frac{n(n-1)}{2}$. В каждой партии при любом ее исходе участники на двоих получают 1 очко. Поэтому общее число очков, набранных всеми участниками во всех партиях также равно $\frac{n(n-1)}{2}$. В результате получаем неравенство

$$nk+\frac{n(n-1)}{4}\leqslant\frac{n(n-1)}{2},$$

упрощая которое, находим $nk\leqslant\frac{n(n-1)}{4}\quad\Leftrightarrow\quad k\leqslant\frac{n-1}{4}\quad\Leftrightarrow\quad n\geqslant 4k+1$.

Теперь легко построить нужный пример. Пусть в турнире участвовало $4k+1$ или $2m+1$ спортсменов, где $m=2k$ — натуральное число. Разобьем данное количество спортсменов на три группы (m человек в группе A, 1 — в группе B и m — в группе C) и Обозначим соответственно: A_1, A_2, A_3, ..., A_m, B, C_1, C_2, C_3, ..., C_m. Укажем только результативные партии, т. е. те, которые закончились не вничью. Пусть A_1 выиграл у всех m спортсменов из группы C; A_2 выиграл у всех $m-1$ спортсменов из группы C, начиная со второго; A_3 выиграл у всех $m-2$ спортсменов из группы C, начиная с третьего; и т. д., наконец A_m выиграл только у C_m. Спортсмен B свел все партии вничью. Все неуказанные партии также закончились вничью. Видим, что A_1 — победитель и выиграл $m = 2k$ партий. Все спортсмены из группы A набрали разное число очков (у них разное число побед и нет поражений), большее, чем спортсмен B. У спортсменов из группы C также разное число очков (у них разное число поражений и нет побед), меньшее, чем у спортсмена B. Так-что, все условия выполняются.