1 и n — число $n-1$. Поскольку числа $m-1$ и $n-1$ — это соседние числа, полученные на первом шаге, то на втором шаге Петя запишет между ними число $|(m-1)-(n-1)| = |m-n|$, отличное от нуля, поскольку $m \neq n$. Итак, ни на первом, ни на втором шагах у Пети не могут получиться все числа равными нулю.

Покажем, что Петя первоначально может записать числа так, чтобы на третьем шаге у него все числа оказались равными нулю. Расположим числа на окружности по ходу часовой стрелки, начав с 1, в следующем порядке:

$$1, \quad 2, \quad 7, \quad 8, \quad 3, \quad 4, \quad 9, \quad 10, \quad 5, \quad 6.$$

Легко убедиться, что при такой первоначальной расстановке чисел все числа на третьем шаге будут равны нулю.

LXIII Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

14 — 18 января 2013 года

Решения

Первый день

8 класс

8.1. Ответ: а) да, может; б) цифры 3.

Первое решение. а) Сумма чисел, составленных Машей, может равняться 2013. Например, $460+571+982 = 2013$, — в записи чисел левой части равенства использована по разу каждая из девяти цифр: 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

б) Мы используем следующий известный факт: при делении на 9 любое натуральное число даёт такой же остаток, что и его сумма цифр.

Тогда из условия задачи следует, что сумма образованных Машей трёх чисел (т. е. число 2013) даёт такой же остаток при делении на 9, что и сумма всех девяти выбранных Машей цифр. Эта сумма равна $0+1+2+\ldots+9-M = 45-M$, где M — цифра, которую Маша не выбрала. С другой стороны, остаток от деления 2013 на 9 равен 6. Поэтому число $45-M$ даёт остаток 6 при делении на 9. Отсюда однозначно $M=3$.

Второе решение. Возможны только два случая: либо 1) все три числа, составленные Машей, трёхзначные, либо 2) одно из чисел четырёхзначное, одно трёхзначное и одно двузначное. Во всех остальных случаях, как легко видеть, сумма трёх Машиных чисел больше 2013.

1) Обозначим буквами выбранные Машей цифры и запишем сложение образованных из них чисел "столбиком":

$$\begin{array}{rr} + & a\;b\;c \\ + & d\;e\;f \\ & g\;h\;k \\ \hline & 2\;0\;1\;3 \end{array}$$

Сумма цифр в разряде единиц $c+f+k$ может равняться только либо 3, либо 13, либо 23. Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев.

Пусть сумма цифр в разряде единиц $c+f+k=3$. Тогда либо а) сумма цифр в разряде десятков $b+e+h=11$, а значит, сумма цифр в разряде сотен $a+d+g=19$, либо б) $b+e+h=21$, а значит, $a+d+g=18$. В случае а) сумма всех использованных цифр равна $3+11+19=33$, что невозможно, поскольку сумма всех десяти цифр равна 45 и тогда неиспользованная цифра должна была бы быть равна $45-33=12$. В случае б) сумма всех использованных цифр равна $3+21+18=42$, и, значит, не использована цифра $45-42=3$. (Пример легко построить: $460+571+982=2013$.)

Пусть сумма цифр в разряде единиц $c+f+k=13$. Тогда либо а) сумма цифр в разряде десятков $b+e+h=10$, а значит, $a+d+g=19$, либо б) $b+e+h=20$, а значит, $a+d+g=18$. В случае а) сумма всех использованных цифр равна $13+10+19=42$, и поэтому не использована цифра $45-42=3$ (например: $210+846+957=2013$; приводить этот пример необязательно, поскольку пример с отсутствующей цифрой 3 приведён нами выше). В случае б) сумма всех использованных цифр равна $13+20+18=51>45$, что невозможно.

Пусть сумма цифр в разряде единиц $c+f+k=23$. Тогда либо а) сумма цифр в разряде десятков $b+e+h=9$, а значит, $a+d+g=19$, либо б) $b+e+h=19$, а значит, $a+d+g=18$. В случае а) сумма всех использованных цифр равна $23+9+19=51>45$, что невозможно. В случае б) сумма всех использованных цифр равна $23+19+18=60>45$, что также невозможно.

2) Снова запишем сложение чисел "столбиком":

$$\begin{array}{r} a\,b\,c\,d \\ +\quad c\,f\,g \\ +\quad\; h\,k \\ \hline 2\,0\,1\,3 \end{array}$$

Тогда $a=1$, поскольку сумма цифр в разряде сотен $b+e>0$ (цифры b и e различны, поэтому хотя бы одна из них ненулевая) и, значит, должен быть перенос цифры 1 из разряда сотен в разряд тысяч. Далее рассмотрим цифры единиц. Сумма цифр в разряде единиц $d+g+k$ может равняться только либо 3, либо 13, либо 23. Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев.

Пусть сумма цифр в разряде единиц $d+g+k=3$. Тогда либо а) сумма цифр в разряде десятков $c+f+h=11$, а значит, сумма цифр в разряде сотен $b+e=9$, либо б) $c+f+h=21$, а значит, $b+e=8$. В случае а) сумма всех использованных цифр равна $3+11+9+1=$ $=24$, что невозможно, поскольку тогда неиспользованная цифра должна была бы быть равной $45-24=21$. В случае б) сумма всех использованных цифр равна $3+21+8+1=33$, что также невозможно по той же причине.

Пусть сумма цифр в разряде единиц $d+g+k=13$. Тогда либо а) сумма цифр в разряде десятков $c+f+h=10$, а значит, $b+e=9$, либо б) $c+f+h=20$, а значит, $b+e=8$. В случае а) сумма всех использованных цифр равна $13+10+9+1=33$, что невозможно. В случае б) сумма всех использованных цифр равна $13+20+8+1=42$, и поэтому не использована цифра $45-42=3$ (например: $1250+674+89=2013$; приводить этот пример также необязательно, поскольку пример с отсутствующей цифрой 3 приведён выше).

Пусть, наконец, сумма цифр в разряде единиц $d+g+k=23$. Тогда либо а) сумма цифр в разряде десятков $c+f+h=9$, а значит, $b+e=9$, либо б) $c+f+h=19$, а значит, $b+e=8$. В случае а) сумма всех использованных цифр равна $23+9+9+1=42$, и поэтому снова не использована цифра $45-42=3$ (например: $1206+748+59=2013$). В случае б) сумма всех использованных цифр равна $23+19+8+1=51>45$, что невозможно.

8.2. Ответ: $(1;-3)$, $(4;3)$, $(16;-9)$ и $(67;-33)$.

Разложим на множители левую часть данного уравнения:

$$x^3+3x^2y-4y^3=x^3-x^2y+4x^2y-4y^3=x^2(x-y)+4y(x^2-y^2)=$$
$$=x^2(x-y)+4y(x-y)(x+y)=(x-y)\big(x^2+4y(x+y)\big)=$$
$$=(x-y)(x^2+4xy+4y^2)=(x-y)(x+2y)^2.$$

Таким образом, данное уравнение равносильно уравнению

$$(x-y)(x+2y)^2=100.$$

Так как $100=2^2\cdot5^2$, то множитель $(x+2y)$ может принимать только следующие восемь значений: ±1, ±2, ±5 и ±10. Рассмотрим отдельно каждый из этих восьми случаев.

1) $\begin{cases} x+2y=1, \\ x-y=100. \end{cases}$ Вычитая из первого уравнения системы второе её уравнение, получаем $3y=-99$, откуда $y=-33$, и тогда из, например, второго уравнения находим $x=67$. В этом случае решение $(x;y)=(67;-33)$.

2) $\begin{cases} x+2y=-1, \\ x-y=100. \end{cases}$ Тогда, действуя как и в случае 1), получаем $3y=-101$. Видим, что число y — не целое, и поэтому в этом случае решений нет.

$f(0)=f(0)f(-1)+f(0)$, т. е., поскольку $f(-1)\neq0$, верно равенство $f(0)=0$. Проведённые рассуждения и равенство (2) показывают, что в случае 2) функция $f(\cdot)$, удовлетворяющая условию задачи, должна иметь вид

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\geqslant0, \\ \beta & \text{при} \quad x<0, \end{cases} \qquad (5)$$

где β — некоторое действительное число.

Для завершения решения п. б) задачи, остаётся убедиться, что каждая из функций (4) и (5) удовлетворяет равенству (1) при всех действительных x и всех ненулевых действительных y.

Проверим это вначале для функции (4). Если $x\neq0$ и $y\neq0$, то аргументы функций, входящие в равенство (1), отличны о нуля, а значит, в силу (4), значения этих функций нулевые, и поэтому равенство (1) в этом случае выполнено. Если $x=0$ и $y\neq0$, то равенство (1) принимает вид $f(0)=f(0)f(y)+f(0)$, т. е. $f(0)f(y)=0$, которое очевидно верно, поскольку согласно (4) $f(y)=0$ при $y\neq0$. Таким образом, функция (4) при любом $\alpha\in\mathbb{R}$ удовлетворяет равенству (1) для всех действительных x и ненулевых действительных y.

Поскольку для функции (5) при всех $x\in\mathbb{R}$ верно равенство $f(x^2)=0$, то для функции (5) вместо выполнимости равенства (1) при всех действительных x и ненулевых действительных y достаточно проверить выполнимость при этих x и y равенства $f(xy^2)=f(x)$. Так как $y\neq0$, то числа xy^2 и x либо оба нулевые, либо имеют одинаковый знак. Но в любом из этих случаев равенство $f(xy^2)=f(x)$ для функции (5) при любом $\beta\in\mathbb{R}$ очевидно выполнено.

11.4. Ответ: б) третий шаг.

а) Допустим, что на некотором k-ом шаге все числа оказались равными нулю. Это означает, что на предыдущем $(k-1)$-ом шаге все числа равны некоторому одному и тому же числу q. Докажем, что q чётно. Пусть при движении по ходу часовой стрелки по окружности, вдоль которой записаны числа, на $(k-1)$-ом шаге оказались последовательно записанными числа $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_{11}$. Тогда на k-ом шаге числа, записанные Петей, — это следующие одиннадцать чисел: $|n_2-n_1|$, $|n_3-n_2|$, $\ldots$, $|n_{11}-n_{10}|$, $|n_1-n_{11}|$, — а, значит, их сумма равна $\Sigma=|n_2-n_1|+|n_3-n_2|+\ldots+|n_{11}-n_{10}|+|n_1-n_{11}|$. Но чётность Σ такая же, как и чётность суммы $(n_2-n_1)+(n_3-n_2)+\ldots+(n_{11}-n_{10})+(n_1-n_{11})$, а последняя чётна, поскольку равна нулю. Поэтому чётна и сумма Σ. С другой стороны, $\Sigma=11\cdot q$, поэтому q чётно, что и утверждалось.

Рассмотрим $(k-2)$-ой шаг. Так как q чётно, то все числа, полученные на этом шаге, имеют одинаковую чётность (их разность чётна). Если они нечётны, то чётности чисел, полученных на $(k-3)$-ем шаге, должны при движении по окружности последовательно чередоваться. Но это невозможно, поскольку всего чисел нечётное (11) количество. Если же числа, полученные на $(k-2)$-ом шаге, чётны, то и все числа, полученные на $(k-3)$-ем шаге, имеют одинаковую чётность. Отсюда, так же, как и выше, получаем, что числа, полученные на $(k-4)$-шаге должны быть чётными. И так далее — на каждом шаге получившиеся числа должны быть чётными, но тогда первоначально записанные числа должны иметь одинаковую чётность, что не так. Полученное противоречие показывает, что при $n=11$ ни на каком шаге получившиеся числа не могут быть все нулями.

б) Докажем, что ни на первом, ни на втором шагах у Пети не могут получиться все числа равными нулю.

Для первого шага это очевидно — более того: поскольку среди первоначально записанных чисел нет совпадающих, то никакое число, полученное на первом шаге, не может равняться нулю. Докажем, что на втором шаге все числа не могут оказаться равными нулю. Пусть при первоначальной записи чисел соседями 1 являются числа m и n. Так как 1 — наименьшее из записанных чисел, то на первом шаге Петя между 1 и m запишет число $m-1$, а между

11.3. Ответ: б) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq 0, \\ \alpha & \text{при } x = 0 \end{cases}$ и $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \geqslant 0, \\ \beta & \text{при } x < 0, \end{cases}$ где α и β — любые действительные числа.

а) Так как по условию равенство

$$f(xy^2) = f(x^2)\,f(y) + f(x) \qquad (*)$$

верно при любых действительных x и y, то, положив в нём $x = y = 1$, получим $f(1) = f^2(1) + f(1)$, т. е. $f(1) = 0$.

Положим теперь в равенстве $(*)$ $x = 1$. Получим $f(y^2) = f(1)f(y) + f(1)$, т. е., поскольку $f(1) = 0$, верно равенство $f(y^2) = 0$ при всех $y \in \mathbb{R}$. Другими словами,

$$f(t) = 0 \quad \text{при всех} \quad t \geqslant 0. \qquad (**)$$

Положив в равенстве $(*)$ $x = -1$, получим $f(-y^2) = f(1)f(y) + f(-1)$, т. е., поскольку $f(1) = 0$, при всех $y \in \mathbb{R}$ верно равенство $f(-y^2) = f(-1)$. В частности, взяв в этом равенстве $y = 0$, найдём $f(0) = f(-1)$, а значит, в силу $(**)$ $f(-1) = 0$. Другими словами,

$$f(t) = 0 \quad \text{при всех} \quad t \leqslant 0. \qquad ({}^{\,*}_{**})$$

Из равенств $(**)$ и $({}^{\,*}_{**})$ заключаем, что функцией, удовлетворяющей условию п. а) задачи, может быть только тождественно нулевая функция.

С другой стороны, очевидно, что тождественно нулевая функция удовлетворяет равенству $(*)$ при всех $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$.

б) Так как по условию равенство

$$f(xy^2) = f(x^2)\,f(y) + f(x) \qquad (1)$$

верно при всех действительных x и ненулевых действительных y, то, взяв в нём $x = y = 1$, получим $f(1) = f^2(1) + f(1)$, т. е. $f(1) = 0$.

Положим теперь в равенстве (1) $x = 1$. Получим $f(y^2) = f(1)f(y) + f(1)$, т. е., поскольку $f(1) = 0$, равенство $f(y^2) = 0$ верно при всех действительных $y \neq 0$. Другими словами,

$$f(t) = 0 \quad \text{при всех} \quad t > 0. \qquad (2)$$

Положив в равенстве (1) $x = -1$, получим $f(-y^2) = f(1)f(y) + f(-1)$, т. е., поскольку $f(1) = 0$, верно равенство

$$f(-y^2) = f(-1) \quad \text{при всех действительных} \quad y \neq 0. \qquad (3)$$

Могут представиться только две возможности: либо 1) $f(-1) = 0$, либо 2) $f(-1) \neq 0$. Рассмотрим отдельно каждую из них.

Если $f(-1) = 0$, то из равенства (3) заключаем, что $f(t) = 0$ при всех $t < 0$. Отсюда и из равенства (2) заключаем, что в случае 1) функция $f(\cdot)$, удовлетворяющая условию задачи, должна иметь вид

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq 0, \\ \alpha & \text{при } x = 0, \end{cases} \qquad (4)$$

где α — некоторое действительное число.

Пусть $f(-1) = \beta \neq 0$. Тогда из равенства (3) заключаем, что $f(t) = \beta$ при всех $t < 0$. Чтобы определить значение $f(0)$, возьмём в равенстве (1) $x = 0$ и $y = -1$. Тогда получим

3) $\begin{cases} x + 2y = 2, \\ x - y = 25. \end{cases}$ Тогда $3y = -23$, снова y — не целое, и, значит, решений нет.

4) $\begin{cases} x + 2y = -2, \\ x - y = 25. \end{cases}$ Тогда $3y = -27$, откуда $y = -9$, и из второго уравнения системы находим $x = 16$. Получаем решение $(x; y) = (16; -9)$.

5) $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ x - y = 4. \end{cases}$ Тогда $3y = 1$, т. е. y — не целое и, значит, решений нет.

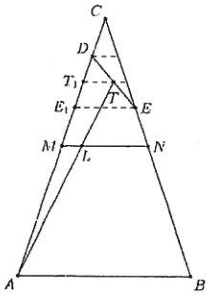
6) $\begin{cases} x + 2y = -5, \\ x - y = 4. \end{cases}$ Тогда $3y = -9$, откуда $y = -3$, и поэтому из второго уравнения находим $x = 1$. Получаем решение $(x; y) = (1; -3)$.

7) $\begin{cases} x + 2y = 10, \\ x - y = 1. \end{cases}$ Тогда $3y = 9$, откуда $y = 3$, и из второго уравнения системы $x = 4$. Получаем решение $(x; y) = (4; 3)$.

8) $\begin{cases} x + 2y = -10, \\ x - y = 1. \end{cases}$ Тогда $3y = -11$, т. е. y — не целое и, значит, решений нет.

8.3. Ответ: 8.

Через точки T и E проведём прямые, параллельные прямой MN (и, значит, параллельные прямой AB). Пусть проведённые прямые пересекают сторону AC в точках T_1 и E_1 соответственно (см. рис.). Тогда отрезок TT_1 — средняя линия треугольника DE_1E и, значит, $DT_1 = T_1E_1$. Далее, $\triangle CE_1E$ равнобедренный ($CE_1 = CE$), поскольку $EE_1 \parallel AB$, а значит, углы этого треугольника при стороне E_1E равны, как соответственные, углам равнобедренного $\triangle ABC$ при основании AB. По этой же причине равнобедренным является и $\triangle CMN$ ($CM = CN$). Поэтому $E_1M = CM - CE_1 = CN - CE = EN$. Но по условию $EN = CD$, а значит, $E_1M = CD$. Следовательно,



$$CT_1 = CD + DT_1 = E_1M + T_1E_1 = T_1M.$$

Поэтому $T_1M = 0,5 \cdot CM = 0,5 \cdot AM$. Тогда по теореме Фалеса также $TL = 0,5 \cdot AL$, и, так как по условию $LT = 4$, то $AL = 8$.

8.4. Ответ: 18.

Рассмотрим синие числа, записанные Петей. Пусть, двигаясь от 1 к 10 по ходу часовой стрелки по окружности, вдоль которой записаны числа, мы пройдём дугу S_1, а двигаясь от 10 к 1 по ходу часовой стрелки — дугу S_2. Пусть при движении по дуге S_1, начиная с 1, мы последовательно встретим синие числа $1, n_1, \ldots, n_k, 10$, а двигаясь по дуге S_2, начиная с 10, — последовательно синие числа $10, n_{k+1}, \ldots, n_8, 1$ (одно из множеств чисел $\{n_1, \ldots, n_k\}$ или $\{n_{k+1}, \ldots, n_8\}$, возможно, может оказаться пустым). Тогда красные числа, записанные Петей и расположенные на дуге S_1, — это $|n_1 - 1|, |n_2 - n_1|, \ldots, |n_k - n_{k-1}|, |10 - n_k|$, а красные числа, записанные Петей и расположенные на дуге S_2, — это $|10 - n_{k+1}|, |n_{k+1} - n_{k+2}|, \ldots, |n_8 - 1|$. Так как

$$(n_1 - 1) + (n_2 - n_1) + \ldots + (n_k - n_{k-1}) + (10 - n_k) = 10 - 1 = 9,$$

то отсюда, поскольку модуль суммы не более суммы модулей слагаемых, получаем, что

$$9 = \left|(n_1 - 1) + (n_2 - n_1) + \ldots + (n_k - n_{k-1}) + (10 - n_k)\right| \leqslant$$

$$\leqslant |n_1 - 1| + |n_2 - n_1| + \ldots + |n_k - n_{k-1}| + |10 - n_k|,$$

т. е. сумма красных чисел на дуге S_1 не менее 9. Точно так же показывается, что сумма красных чисел на дуге S_2 не менее 9. Следовательно, сумма красных чисел, записанных Петей, не может быть менее $9 + 9 = 18$.

С другой стороны, синие числа можно расположить по окружности так, чтобы сумма красных чисел была равна 18 — например, начав с 1, расположить числа от 1 до 10 по ходу часовой стрелки в порядке возрастания.

9 класс

9.1. Ответ: $(x; y) = (2; 2)$.

Заметим, что если $y \geqslant 3$, то число 14^y делится на 8. Поскольку $47 \equiv -1 \pmod 8$ и $2013 \equiv 5 \pmod 8$, то из исходного уравнения получаем $(-1)^x + 0 \equiv 5 \pmod 8$, что не возможно ни при каком натуральном x.

Кроме того, при $y = 1$ имеем $47^x = 2013 + 14 = 2027$, что также невозможно ни при каком натуральном x, так как $47 < 2027 < 47^2$.

Осталось рассмотреть случай, когда $y = 2$. Имеем $47^x = 2013 + 14^2 = 2013 + 196 = 2209$. Разделив 2209 на 47, получим 47. Поэтому $x = 2$. Окончательно, $x = y = 2$.

9.2. Ответ: $1/2$ часть.

Поскольку число девочек-участниц математической олимпиады не более $1/7$ от общего числа её участников, то оно не превосходит $1/6$ от числа мальчиков-участников этой олимпиады. Тем более, это число не превосходит $1/6$ от числа всех мальчиков этой школы. Аналогично заключаем, что число девочек-участниц физической олимпиады не превосходит $1/3$ от числа всех мальчиков этой школы, а число девочек-участниц химической олимпиады не превосходит $1/2$ от числа всех мальчиков этой школы. Так как каждая девочка приняла участие хотя бы в одной олимпиаде, то общее число девочек не превосходит $\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{1}$ части от числа всех мальчиков школы. Таким образом, общее число девочек в этой школе не превосходит числа мальчиков, т. е. не более половины всех учащихся.

Покажем, что число девочек в школе действительно может составлять половину всех учащихся. Например, пусть в школе учится 6 девочек и 6 мальчиков. Пусть в олимпиаде по математике приняла участие одна из девочек и все 6 мальчиков, в олимпиаде по физике — две другие девочки и все 6 мальчиков, а в олимпиаде по химии — оставшиеся три девочки и опять все 6 мальчиков.

9.3. Пусть S_1 и S_2 — площади треугольников $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_2B_2C_2$ соответственно, а их стороны $B_1C_1 = a_1$, $A_1C_1 = b_1$, $A_1B_1 = c_1$ и $B_2C_2 = a_2$, $A_2C_2 = b_2$, $A_2B_2 = c_2$.

Первое решение. Достаточность. Пусть треугольники $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_2B_2C_2$ таковы, что $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_2C_2$ и $\dfrac{a_1^2}{a_2^2} = \dfrac{S_1}{S_2}$. Докажем, что $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$.

Обозначим $\lambda = \dfrac{a_1}{a_2}$. Тогда в силу данного по условию равенства будет $\lambda^2 = \dfrac{S_1}{S_2}$. Рассмотрим $\triangle A_3B_3C_3$, подобный треугольнику $\triangle A_2B_2C_2$ с коэффициентом подобия λ (перечисление вершин соответственное). Тогда, в частности, $\angle B_3A_3C_3 = \angle B_2A_2C_2 = \angle B_1A_1C_1$ и $\dfrac{B_3C_3}{B_2C_2} = \lambda$. Из последнего равенства вытекает, что $B_3C_3 = \lambda \cdot B_2C_2 = \lambda a_2$, т. е. $B_3C_3 = B_1C_1$. Кроме того, так как отношение площадей подобных треугольников равно квадрату их коэффициента подобия, то $\dfrac{S_3}{S_2} = \lambda^2$, где S_3 — площадь $\triangle A_3B_3C_3$. Значит, $S_3 = S_1$.

первого из них последняя цифра периодически принимает значения 7, 9, 3, 1 (а значит, равна 9 только при $x = 4k - 2$, $k \in \mathbb{N}$), а для второго — всегда равна 6. Поскольку последняя цифра их разности 3, то это возможно только при $x = 4k - 2$, $k \in \mathbb{N}$, — в частности, при x чётном.

Перепишем теперь равенство (1) в виде

$$1007^x - (1007 - 1)^y = 2 \cdot 1007 - 1 \iff 1007^x - 2 \cdot 1007 = (1007 - 1)^y - 1.$$

Так как левая часть полученного равенства делится на 1007, то и правая его часть должна делиться на 1007, что возможно лишь при чётном y, т. е. $y = 2m$, $m \in \mathbb{N}$ (поскольку $(1007 - 1)^l \equiv (-1)^l \pmod{1007}$, $l \in \mathbb{N}$).

Таким образом, равенство (1) принимает вид $1007^{2k} - 1006^{2m} = 2013$, или, равносильно,

$$2013 = (1007^k)^2 - (1006^m)^2 = (1007^k + 1006^m)(1007^k - 1006^m). \qquad (2)$$

Очевидно, что сумма $(1007^k + 1006^m)$ как при $k > 1$, $m \geqslant 1$, так и при $k \geqslant 1$, $m > 1$ больше 2013, а модуль разности $|1007^k - 1006^m|$ всегда не меньше 1. Поэтому равенство (2) возможно лишь при $k = m = 1$, что в действительности и имеет место. Окончательно, $x = y = 2$.

11.2. Ответ: $KN : NM = 2 : 1$.

Пусть R — середина отрезка KL. Проведём через точку R прямую, параллельную BE.

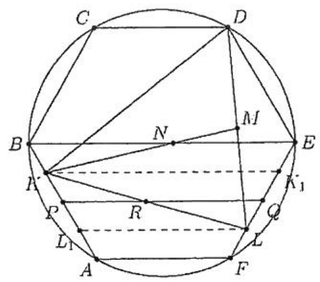


Рис. 1

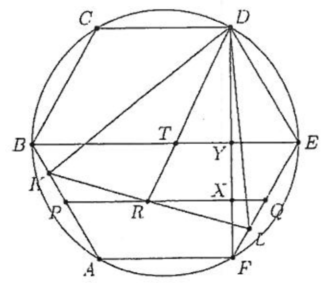


Рис. 2

Пусть эта прямая пересекает стороны AB и EF в точках P и Q соответственно. Пусть $KK_1 \| LL_1 \| BE$ (см. рис. 1). Так как $AB = FE$, то $BK = FL$ ($BK : KA = FL : LE$). Кроме того, поскольку трапеция $ABEF$ равнобедренная, то $BK = EK_1$, $KP = K_1Q$, $PL_1 = QL$, $AL_1 = FL$, а так как RQ — средняя линия в треугольнике LKK_1, то $LQ = QK_1$. Значит,

$$FQ = FL + LQ = FL + QK_1 = BK + QK_1 = EK_1 + QK_1 = QE,$$

т. е. PQ — средняя линия трапеции $ABEF$.

Пусть T и Y — точки пересечения отрезка BE с отрезками DR и DF соответственно (см. рис. 2). Очевидно, что $DY = YF$, поэтому, если X — точка пересечения отрезков DF и PQ, имеем равенства: $YX = XF = 0{,}5 \cdot YF = 0{,}5 \cdot DY$, и, следовательно $DY : YX = 2 : 1$. Тогда в силу параллельности прямых RQ и BE из теоремы Фалеса следует, что $DT : TR = DY : YX = 2 : 1$. Это, поскольку DR — медиана треугольника KDL, означает, что точка T — точка пересечения медиан треугольника KDL, и, следовательно принадлежит и медиане KM. Но поскольку T лежит на диагонали BE, на которой лежит и точка N, то эти точки, T и N, совпадают. Следовательно, N — точка пересечения медиан треугольника KDL, откуда $KN : NM = 2 : 1$.

10.4. Ответ: 4.

Докажем вначале, что сумма Σ зелёных чисел чётна. Пусть, двигаясь по ходу часовой стрелки по окружности, вдоль которой записаны числа, мы последовательно встретим красные числа n_1, n_2, $\ldots$, n_{10}. Тогда зелёные числа, записанные Петей, — это следующие десять чисел: $|n_2-n_1|$, $|n_3-n_2|$, $\ldots$, $|n_{10}-n_9|$, $|n_1-n_{10}|$, — а, значит, сумма Σ зелёных чисел равна $\Sigma=|n_2-n_1|+|n_3-n_2|+\ldots+|n_{10}-n_9|+|n_1-n_{10}|$. Но чётность Σ такая же, как и чётность суммы $(n_2-n_1)+(n_3-n_2)+\ldots+(n_{10}-n_9)+(n_1-n_{10})$, а последняя чётна, поскольку равна нулю. Поэтому чётна и сумма Σ.

Докажем, что $\Sigma\neq 0$. Рассмотрим синюю 1, и пусть её синие соседи — это числа m и n. Так как 1 — наименьшее из синих чисел, то между 1 и m записано красное число $m-1$, а между 1 и n — красное число $n-1$. Поскольку красные числа $m-1$ и $n-1$ — соседние, то между ними записано зелёное число $|(m-1)-(n-1)|=|m-n|$, отличное от нуля, поскольку $m\neq n$. Следовательно, $\Sigma\neq 0$.

Докажем, что $\Sigma\neq 2$. Допустим противное: $\Sigma=2$. Рассмотрим синие числа. Пусть S_1 — та дуга окружности, вдоль которой записаны числа, которую мы пройдём, двигаясь от синей 1 к синей 10 по ходу часовой стрелки, а S_2 — дуга, дополняющая дугу S_1 до целой окружности. Пусть также m и n — синие соседи синей 1 (без нарушения общности считаем, что $m\in S_1$ и $n\in S_2$), а a и b — синие соседи синей 10. При рассмотрении возможности $\Sigma=0$ мы доказали, что синяя 1 и её синие соседи m и n порождают зелёное число $|m-n|$, отличное от нуля. Точно так же показывается, что синяя 10 и её синие соседи a и b порождают зелёное число $|a-b|$, отличное от нуля. Поэтому если $\Sigma=2$, то зелёные числа $|m-n|$ и $|a-b|$ равны по 1, а все остальные зелёные числа равны нулю. Это для красных чисел означает, что на дуге S_1 стоят одинаковые красные числа и на дуге S_2 стоят одинаковые красные числа. Красные числа, стоящие на дуге S_1, равны $m-1$ (модулю разности между синей 1 и её синим соседом $m\in S_1$), а красные числа на дуге S_2 равны $n-1$ (модулю разности между синей 1 и её синим соседом $n\in S_2$). Так как $|m-n|=1$, то числа $m-1$ и $n-1$ имеют разную чётность. Пусть, без нарушения общности, число $m-1$ чётно. Пусть при движении по дуге S_1, начиная с 1, мы последовательно встретим синие числа 1, n_1, n_2, $\ldots$, n_k, 10. Тогда $n_1=1+(m-1)$, $n_2=n_1+(m-1)=1+2\cdot(m-1)$, $\ldots$, $n_k=1+k(m-1)$, $10=1+(k+1)(m-1)$. Но последнее равенство невозможно: в его левой части стоит чётное число, а в правой — число нечётное. Полученное противоречие доказывает неравенство $\Sigma\neq 2$.

Покажем, что синие числа можно расставить по окружности так, чтобы сумма зелёных чисел равнялась 4. Расставим синие числа по ходу часовой стрелки в следующем порядке:

$$1,\quad 2,\quad 4,\quad 6,\quad 8,\quad 10,\quad 9,\quad 7,\quad 5,\quad 3.$$

Легко видеть, что для такой расстановки синих чисел сумма зелёных чисел равна 4.

11 класс

11.1. Ответ: $(x;y)=(2;2)$.

Разложим число 2013 на простые множители: $2013=3\cdot 11\cdot 61$. Так как $1007\equiv -1 \pmod 3$ и $1006\equiv 1 \pmod 3$, то из исходного равенства

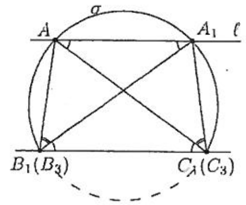
$$1007^x-1006^y=2013 \tag{1}$$

следует, что

$$(-1)^x-1^y\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3) \iff (-1)^x\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3).$$

Следовательно, x — чётное число, т. е. $x=2k$, $k\in\mathbb{N}$. Доказать, что x чётно, можно было бы и рассмотрев последние цифры чисел 1007^x и 1006^y (т. е. их остатки по mod 10). Для

Докажем равенство треугольников $\triangle A_3B_3C_3$ и $\triangle A_1B_1C_1$, что и будет означать подобие треугольников $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_2B_2C_2$. Так как $B_3C_3=B_1C_1$, то совместим сторону B_3C_3 треугольника $\triangle A_3B_3C_3$ со стороной B_1C_1 треугольника $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина B_3 совпала с вершиной B_1, а вершина C_3 — с вершиной C_1, и вершины A_3 и A_1 лежали в одной полуплоскости относительно прямой B_1C_1 (см. рис.). Найдём положение вершины A_3. Поскольку $B_3C_3=B_1C_1$ и $S_3=S_1$, то точка A_3 должна лежать на прямой ℓ, проходящей через точку A_1 параллельно прямой B_1C_1. Далее, поскольку $\angle B_3A_3C_3=\angle B_1A_1C_1$, то точка A_3 должна лежать на той дуге σ окружности, описанной вокруг $\triangle A_1B_1C_1$, которая лежит в той же полуплоскости относительно прямой B_1C_1, что и вершина A_1. Стало быть, вершина A_3 принадлежит пересечению прямой ℓ и дуги σ. Прямая ℓ и дуга σ пересекаются в двух точках — точке A_1 и точке A (см. рис.), т. е. либо $A_3=A_1$, либо $A_3=A$. Но очевидно, что $\triangle AB_1C_1=\triangle A_1B_1C_1$, поэтому $\triangle A_3B_3C_3=\triangle A_1B_1C_1$. Достаточность утверждения задачи доказана.



Необходимость. Если треугольники $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_2B_2C_2$ подобны, то их углы соответственно равны. Так как в подобных треугольниках отношение квадратов соответственных линейных элементов равно отношению площадей этих треугольников, то, в частности, отношение квадратов сторон, противолежащих равному углу в этих треугольниках, равно отношению площадей соответствующих треугольников. Необходимость утверждения задачи доказана.

Второе решение. Достаточность. Пусть треугольники $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_2B_2C_2$ таковы, что $\angle B_1A_1C_1=\angle B_2A_2C_2=\alpha$ и $\dfrac{a_1^2}{a_2^2}=\dfrac{S_1}{S_2}$. Докажем, что $\triangle A_1B_1C_1\sim\triangle A_2B_2C_2$.

Поскольку $S_i=\dfrac{1}{2}b_ic_i\sin\alpha$, $i=1,2$, то равенство $\dfrac{a_1^2}{a_2^2}=\dfrac{S_1}{S_2}$ равносильно равенству $\dfrac{a_1^2}{a_2^2}=\dfrac{b_1c_1}{b_2c_2}$. С другой стороны, по теореме косинусов $a_i^2=b_i^2+c_i^2-2b_ic_i\cos\alpha$, $i=1,2$. Поэтому $\dfrac{b_1^2+c_1^2-2b_1c_1\cos\alpha}{b_2^2+c_2^2-2b_2c_2\cos\alpha}=\dfrac{b_1c_1}{b_2c_2}$, или, равносильно, $b_2c_2(b_1^2+c_1^2)=b_1c_1(b_2^2+c_2^2)$. Раскроем в последнем равенстве скобки и, перенеся слагаемые в левую часть, сгруппируем члены: $b_2c_2b_1^2-b_1c_1b_2^2+b_2c_2c_1^2-b_1c_1c_2^2=0$. Вынося за скобки из первых двух слагаемых левой части множитель b_1b_2, а из двух последних — множитель c_1c_2, придём к равенству

$$b_1b_2(b_1c_2-b_2c_1)+c_1c_2(b_2c_1-b_1c_2)=0,\qquad\text{или}\qquad (b_1b_2-c_1c_2)(b_1c_2-b_2c_1)=0.$$

Значит, либо $b_1b_2-c_1c_2=0$, т. е. $\dfrac{b_1}{c_1}=\dfrac{c_2}{b_2}$, либо $b_1c_2-b_2c_1=0$, т. е. $\dfrac{b_1}{c_1}=\dfrac{b_2}{c_2}$. В любом из этих случаев треугольники $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_2B_2C_2$ подобны по второму признаку подобия треугольников. Достаточность утверждения задачи доказана.

Необходимость утверждения задачи доказывается так же, как и в первом решении.

9.4. Ответ: 50.

Рассмотрим синие числа, записанные Петей. Выберем из них какое-либо число n_1, и пусть, начав с числа n_1 и двигаясь по ходу часовой стрелки по окружности, вдоль которой записаны числа, мы последовательно встретим числа n_1, n_2, $\ldots$, n_{10}. Тогда красные числа, записанные Петей, — это следующие десять чисел: $|n_2-n_1|$, $|n_3-n_2|$, $\ldots$, $|n_{10}-n_9|$, $|n_1-n_{10}|$, — и, значит, сумма Σ красных чисел равна

$$\Sigma=|n_2-n_1|+|n_3-n_2|+\ldots+|n_{10}-n_9|+|n_1-n_{10}|.$$

Раскрывая модули в каждом слагаемом, мы получим алгебраическую сумму двадцати чисел $n_1,\ n_1,\ n_2,\ n_2,\ \ldots,\ n_9,\ n_9,\ n_{10},\ n_{10}$, в которой каких-то десять из этих чисел будут взяты со знаком „ + “, а остальные десять — со знаком „ − “. Но $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_{10}$ — это, в каком-то порядке, числа $1,\ 2,\ \ldots,\ 10$. Поэтому сумма Σ не может быть больше разности между удвоенной суммой пяти самых больших из них и удвоенной суммой пяти самых маленьких из них, т. е.

$$\Sigma \leqslant 2\cdot(10+9+8+7+6-1-2-3-4-5)=50.$$

С другой стороны, синие числа можно расположить по окружности так, чтобы сумма красных чисел была равна 50. Действительно, пронумеруем места, на которых стоят синие числа, последовательно по ходу часовой стрелки числами от 1 до 10. Запишем на нечётных местах числа 1, 2, 3, 4, 5 (в любом порядке), а на чётных местах — числа 6, 7, 8, 9, 10 (в любом порядке). Легко непосредственно убедиться, что для такой расстановки синих чисел сумма красных чисел равна 50.

10 класс

10.1. Ответ: $(x;y)=(15;4)$.

Докажем, что при $x\geqslant 9$ выполняется двойное неравенство

$$x^3<x^3+x^2+x+481<(x+2)^3.$$

Его левая часть очевидно выполнена при всех действительных x. Правая же часть равносильна неравенству $x^2+x+481<(x+2)^3-x^3$, т. е. квадратному неравенству $5x^2+11x-473>0$, которое заведомо верно при $x\geqslant 9$, поскольку наибольший корень квадратного трёхчлена $5x^2+11x-473$ меньше 9. Следовательно, поскольку y^6 — куб натурального числа, имеется единственная возможность, чтобы при $x\geqslant 9$ данное по условию задачи равенство натуральных чисел имело место: $y^6=(x+1)^3$. Значит, $(x+1)^3=x^3+x^2+x+481$, или, равносильно, $x^2+x-240=0$, откуда $x=15$. Тогда $y=\sqrt{x+1}=\sqrt{16}=4$.

Осталось рассмотреть случай $1\leqslant x\leqslant 8$. При $1\leqslant x\leqslant 5$ имеем двойное неравенство $2^6=64<x^3+x^2+x+481\leqslant 636<729=3^6$. Поэтому при натуральных $1\leqslant x\leqslant 5$ данное уравнение решений не имеет. При $x=6$ получаем $x^3+x^2+x+481=6^3+6^2+6+481=739$ — не является шестой степенью натурального числа, а при $x=7$ или $x=8$ верно неравенство $3^6=729<x^3+x^2+x+481\leqslant 1065<4^6$. Следовательно, при $1\leqslant x\leqslant 8$ данное уравнение решений не имеет.

10.2. Ответ: $f(x)=x^2$ и $f(x)=-x^2$.

Подставим в исходное равенство

$$f\big(f(x)\big)-f\big(f(y)\big)=\big(x^2-f(y)\big)\big(y^2+f(x)\big) \tag{1}$$

значение $y=x$. Получим $f\big(f(x)\big)-f\big(f(x)\big)=\big(x^2-f(x)\big)\big(x^2+f(x)\big)$, т. е.

$$\big(x^2-f(x)\big)\big(x^2+f(x)\big)=0 \quad \text{при всех} \quad x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Другими словами, функция f принимает при каждом значении x либо значение $(-x^2)$, либо значение x^2; в частности, $f(0)=0$. (Заметим, что это вовсе не означает выполнение при всех $x\in\mathbb{R}$ либо тождества $f(x)\equiv -x^2$, либо тождества $f(x)\equiv x^2$. Если школьник делает такой вывод только на основании равенства (2), то это ошибка, и его ответ на поставленный вопрос: $f(x)=x^2$, $f(x)=-x^2$ — нельзя считать обоснованным.) Таким образом, искомая функция необходимо имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если} \quad x\in M,\\ -x^2, & \text{если} \quad x\notin M,\end{cases}$$

где M — некоторое подмножество множества $\mathbb{R}$ действительных чисел.

Покажем теперь, что либо $M=\mathbb{R}$, либо $M=\varnothing$. Это и будет означать, что либо $f(x)=x^2$ для всех $x\in\mathbb{R}$, либо $f(x)=-x^2$ для всех $x\in\mathbb{R}$.

Полагая в равенстве (1) $y=0$, получим

$$f\big(f(x)\big)-f\big(f(0)\big)=\big(x^2-f(0)\big)\big(0+f(x)\big),$$

или, учитывая, что $f(0)=0$,

$$f\big(f(x)\big)=x^2f(x) \quad \text{при всех} \quad x\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Теперь раскроем скобки в правой части равенства (1) и, воспользовавшись равенством (3), приведём подобные члены:

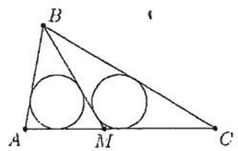
$$f\big(f(x)\big)-f\big(f(y)\big)=x^2y^2-y^2f(y)+x^2f(x)-f(y)f(x)=$$

$$=x^2y^2-f\big(f(y)\big)+f\big(f(x)\big)-f(y)f(x) \Longrightarrow f(x)f(y)=x^2y^2 \quad \text{для всех} \quad x,y\in\mathbb{R}.$$

Следовательно, если существует отличное от нуля значение x, такое, что $f(x)=x^2$, то для этого x и любого y будет $x^2y^2=f(x)f(y)=x^2f(y)$, откуда следует, что для всех действительных значений y выполнено равенство $f(y)=y^2$, т. е. $M=\mathbb{R}$. Совершенно аналогично, если существует $x\notin M$, $x\neq 0$ (т. е. для него $f(x)=-x^2$), то для этого x и всех y выполнено равенство $x^2y^2=f(x)f(y)=-x^2f(y)$. Значит, в этом случае $f(y)=-y^2$ при всех действительных y, т. е. $M=\varnothing$.

Таким образом, равенству (1) могут удовлетворять лишь две функции: либо $f(x)=x^2$ для всех $x\in\mathbb{R}$, либо $f(x)=-x^2$ для всех $x\in\mathbb{R}$. Непосредственная проверка показывает (такая проверка является необходимой частью полного решения), что обе эти функции удовлетворяют равенству (1) при всех действительных x и y.

10.3. Вычислим удвоенные площади треугольников ABM, CBM и ABC. Имеем:



$$2S_{ABM}=r(AB+BM+MA),\ 2S_{CBM}=r(MB+BC+CM),$$

$$2S_{ABC}=R(AB+BC+CA).$$

Так как $S_{ABC}=S_{ABM}+S_{CBM}$, то

$$R(AB+BC+CA)=r(AB+BM+MA)+r(MB+BC+CM)=$$

$$=r(AB+BC+(CM+MA)+2BM)=r(AB+BC+CA+2BM).$$

Поэтому

$$\frac{R}{r}=\frac{AB+BC+CA+2BM}{AB+BC+CA}=1+\frac{2BM}{AB+BC+CA}. \tag{1}$$

Воспользовавшись неравенством треугольника, получаем $MA+AB>BM$ и $MC+CB>$ $>BM$, откуда

$$2BM<AB+CB+(MA+MC)=AB+BC+AC.$$

Тогда из равенства (1) вытекает, что $\dfrac{R}{r}<1+1=2$, что и требовалось доказать.

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В. А. БУДКЕВИЧ

20 декабря 2012 г.

LXIII Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

14 – 18 января 2013 года

8 класс

Первый день

1. Маша выбрала девять различных цифр и составила из них три числа, используя каждую цифру ровно один раз.

а) Может ли сумма этих чисел равняться 2013?

б) Если сумма этих чисел действительно оказалась равной 2013, то какой цифры могло не быть среди цифр, выбранных Машей?

2. Найдите все пары $(x;\ y)$ целых чисел x и y, удовлетворяющих равенству

$$x^3 + 3x^2y - 4y^3 = 100.$$

3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = CB$) точки M и N — середины сторон AC и CB соответственно. На отрезках CM и CN отмечены соответственно точки D и E так, что $CD = EN$. Точка T — середина отрезка DE, а L — точка пересечения отрезка AT и средней линии MN треугольника ABC.

Найдите длину AL, если известно, что $LT = 4$.

4. Петя записал на бумаге синим фломастером натуральные числа от 1 до 10 по кругу в некотором порядке, каждое число — по одному разу. Затем между каждыми двумя соседними синими числами он записал красным фломастером число, равное разности между бо́льшим и меньшим из них.

Какое наименьшее значение может принимать сумма красных чисел?

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 4,5 часа

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В. А. БУДКЕВИЧ

20 декабря 2012 г.

LXIII Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

14 – 18 января 2013 года

9 класс

Первый день

1. Найдите все пары $(x; y)$ натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству

$$47^x - 14^y = 2013.$$

2. Каждый ученик школы № 2013 (независимо от его возраста) принял участие хотя бы в одной из трёх школьных олимпиад — по математике, по физике и по химии. Известно, что среди участников математической олимпиады девочек было не более $1/7$ части от общего числа участников этой олимпиады, среди участников физической олимпиады — не более $1/4$ части от общего числа участников этой олимпиады, а среди участников химической — не более $1/3$ от общего числа участников этой олимпиады.

Какую наибольшую часть могут составлять девочки от всех учащихся этой школы?

3. Докажите следующий признак подобия треугольников: два треугольника подобны тогда и только тогда, когда у них есть по равному углу и отношение квадратов сторон, противолежащих этому углу, равно отношению площадей соответствующих треугольников.

4. Петя записал на листке синим фломастером натуральные числа от 1 до 10 по кругу в каком-то порядке (каждое число записано им по разу). Затем он между каждыми двумя соседними из синих чисел записал красным фломастером число, равное разности между бо́льшим и меньшим из них.

Какое наибольшее значение может принимать сумма красных чисел?

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады
Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В.А. БУДКЕВИЧ

20 декабря 2012 г.

LXIII Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

14 – 18 января 2013 года

10 класс
Первый день

1. Найдите все пары $(x; y)$ натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству
$$y^6 = x^3 + x^2 + x + 481.$$

2. Найдите все функции f, определённые на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения, для которых равенство
$$f\big(f(x)\big) - f\big(f(y)\big) = \big(x^2 - f(y)\big)\big(y^2 + f(x)\big)$$
выполнено при всех действительных x и y.

3. В треугольнике ABC на стороне AC отмечена точка M так, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABM и CBM, равны r. Пусть R – радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Докажите, что $\dfrac{R}{r} < 2$.

4. Петя записал на листке синим фломастером натуральные числа от 1 до 10 по кругу в каком-то порядке (каждое число записано им по разу). Затем он между каждыми двумя соседними из синих чисел записал красным фломастером число, равное модулю их разности, и стёр все синие числа. После этого Петя между каждыми двумя соседними из красных чисел записал зелёным фломастером число, равное модулю их разности.

Какое наименьшее значение может принимать сумма зелёных чисел?

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В. А. БУДКЕВИЧ

20 декабря 2012 г.

LXIII Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

14 – 18 января 2013 года

11 класс

Первый день

1. Найдите все пары $(x; y)$ натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству $1007^x - 1006^y = 2013$.

2. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ на сторонах AB и EF отмечены точки K и L соответственно, так, что $AK : KB = EL : LF$. Медиана KM треугольника KDL пересекает диагональ BE в точке N.

Найдите отношение $KN : NM$.

3. а) Докажите, что единственной функцией $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей при всех действительных x и y равенству

$$f(xy^2) = f(x^2)\, f(y) + f(x), \qquad (*)$$

является тождественно нулевая функция.

б) Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие равенству $(*)$ при всех действительных x и всех ненулевых действительных y.

4. Петя записал на листке синим фломастером натуральные числа от 1 до n включительно по кругу в каком-то порядке (каждое число записано им по разу). На первом шаге он между каждыми двумя соседними из синих чисел записывает красным фломастером число, равное модулю их разности, и затем стирает все синие числа. На втором шаге Петя между каждыми двумя соседними из красных чисел записывает синим фломастером число, равное модулю их разности, и затем стирает все красные числа. И так далее — на каждом шаге Петя между каждыми двумя соседними из записанных чисел записывает фломастером другого цвета число, равное модулю их разности, и затем стирает числа предыдущего шага.

а) Докажите, что если $n = 11$, то при любой первоначальной расстановке чисел ни на каком шаге все числа не могут оказаться равными нулю.

б) Докажите, что если $n = 10$, то найдётся такая первоначальная расстановка чисел, что на некотором шаге все числа будут равны нулю. Найдите наименьший возможный номер такого шага.

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В.А. БУДКЕВИЧ

20 декабря 2012 г.

LXIII Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

14 – 18 января 2013 года

8 класс

Второй день

5. Миша перемножил несколько простых чисел (не обязательно различных) и получил число X. Коля уменьшил каждое из этих простых чисел на 2, перемножил полученные числа и получил число Y. Оказалось, что $X : Y = 707$.

Каким могло быть число X ?

6. На прямой отмечено конечное число (не менее двух) синих точек и n красных точек так, что расстояние между двумя любыми различными красными точками больше расстояния между любой красной и любой синей точками, а расстояние между любыми двумя синими точками меньше расстояния между любой красной и любой синей точками.

а) Какое наибольшее значение может принимать n ?

б) Может ли расстояние между какими-то двумя красными точками равняться 25 см, если известно, что существуют две синие точки на расстоянии 10 см друг от друга ?

7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы улов A и C параллельны, а биссектрисы углов B и D пересекаются под углом $30°$.

Найдите острый угол между биссектрисами углов A и B.

8. В некотором городе, в котором все знакомы друг с другом, живут лжецы, которые всегда лгут, и правдивые, которые всегда говорят правду. В город прибыл инспектор и каждому жителю задал вопрос о том, является ли лжецом или правдивым некоторый житель города. При этом ни об одном горожанине инспектор не спрашивал дважды. После опроса все жители, названные лжецами, были арестованы и высланы из города. Хотя, конечно, не все они действительно были лжецами, но число всех высланных оказалось равно реальному числу лжецов. После высылки число лжецов среди оставшихся жителей стало в 3 раза больше числа правдивых.

Во сколько раз число лжецов было больше числа правдивых первоначально?

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 4,5 часа

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В.А. БУДКЕВИЧ

20 декабря 2012 г.

LXIII Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

14 – 18 января 2013 года

9 класс

Второй день

5. Петя перемножил несколько простых чисел (не обязательно различных) и получил число A. Вася уменьшил каждое из этих простых чисел на 1, тоже перемножил полученные числа и получил число B. Оказалось, что $A : B = 2013$.

Сколько всего чисел перемножал Петя?

6. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL, а в треугольнике ALC – биссектриса LM. Известно, что $AM = ML$ и $BC = AC\sqrt{3}$.

Найдите углы треугольника ABC.

7. а) Докажите, что не существует такой четвёрки $(a; b; c; d)$ ненулевых чисел a, b, c, d, среди которых нет равных, что какие-то два из этих чисел являются корнями уравнения $x^2 - ax + b = 0$, а два другие – корнями уравнения $x^2 - bx + c = 0$.

б) Найдите все такие четвёрки $(a; b; c; d)$ чисел a, b, c, d, среди которых нет равных (но возможно есть нулевое), что какие-то два из этих чисел являются корнями уравнения $x^2 - ax + b = 0$, а два другие – корнями уравнения $x^2 - bx + c = 0$.

8. На окружности отмечено $s \geqslant 2$ синих точек и $k \geqslant 2$ красных точек. Оказалось, что расстояние между любыми двумя различными красными точками больше расстояния между любыми двумя точками разного цвета, а расстояние между любыми двумя синими точками меньше расстояния между любыми двумя точками разного цвета.

Найдите наибольшее возможное значение числа k.

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады
Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В. А. БУДКЕВИЧ

20 декабря 2012 г.

LXIII Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

14 – 18 января 2013 года

10 класс
Второй день

5. Известно, что a и b — действительные числа, удовлетворяющие следующим двум условиям:

1) график функции $y = x^2 + 2bx + a$ получается из графика функции $y = (ax + b)^2$ некоторым сдвигом параллельно оси ординат Oy;

2) прямая $y = ax + b$ имеет с графиком функции $y = x^2 + 2bx + a$ единственную общую точку.

Найдите все такие пары $(a; b)$ действительных чисел.

6. Найдите все четвёрки $(k; l; m; n)$ натуральных чисел k, l, m и n, удовлетворяющих равенствам

$$(k + l)(m + n) = 9 + 2lm = 19 + 2kn.$$

7. Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Лучи BB_1 и AA_1 пересекают окружность, описанную около треугольника ABC, в точках B_2 и A_2 соответственно. Пусть N — точка пересечения отрезков B_1A_2 и A_1B_2. Прямая HN пересекает отрезок A_1B_1 в точке M.

Найдите значение отношения $A_1M : B_1M$.

8. Пусть $n \geqslant 2$ — натуральное число. Какое наибольшее число точек на окружности можно отметить и покрасить их в n цветов, так, чтобы присутствовали точки каждого цвета и чтобы расстояние между любыми двумя различными точками одного цвета было больше расстояния между любыми двумя точками разного цвета?

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады
Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В.А. БУДКЕВИЧ

20 декабря 2012 г.

LXIII Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

14 – 18 января 2013 года

11 класс

Второй день

5. Найдите все тройки $(a; b; c)$ действительных попарно различных чисел a, b и c, если известно, что каждое из них является корнем многочлена $x^3 - \dfrac{5a}{4}x^2 + bx + c$.

6. В параболу $y = x^2$ вписана равнобедренная трапеция $ABCD$, основания которой AD и BC параллельны оси абсцисс, а угол между диагональю и боковой стороной равен 90°. Известно также, что нижнее основание BC трапеции равно боковой стороне.

Найдите площадь трапеции.

7. Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Пусть l — касательная к окружности, описанной около треугольника ABC, в точке C. Лучи BB_1 и AA_1 пересекают l в точках B_2 и A_2 соответственно. Пусть N — точка пересечения отрезков B_1A_2 и A_1B_2. Прямая HN пересекает отрезок A_2B_2 в точке M.

Найдите значение отношения $A_2M : B_2M$.

8. На плоскости отмечено n красных и n синих точек. Оказалось, что расстояние между любыми двумя различными красными точками больше расстояния между любой красной и любой синей точками, а расстояние между любой красной и любой синей точками больше расстояния между любыми двумя синими точками.

Какое наибольшее значение может принимать число n?

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

LXIII Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

14 – 18 января 2013 года

Решения

Второй день

8 класс

8.5. Ответ: 9 449 055.

Так как $X = 707\cdot Y$ и $707 = 101\cdot 7$, где 101 и 7 — простые числа, то 101 и 7 — одни из Мишиных множителей и, значит, $99 = 101-2$ и $5 = 7-2$ — одни из множителей Коли. Тогда

$$707 = \frac{X}{Y} = \frac{101\cdot 7\cdot x}{99\cdot 5\cdot y},$$

где x — произведение остальных простых множителей Миши, а y — произведение остальных множителей Коли. Так как число $\frac{X}{Y}$ целое, то x содержит все простые множители, которые необходимы, чтобы при упрощении дроби $\frac{X}{Y}$ числа 99 и 5 сократились. То есть, $x = 99\cdot 5\cdot a = 11\cdot 5\cdot 3\cdot 3\cdot a$ и тогда, соответственно, $y = 9\cdot 3\cdot 1\cdot 1\cdot b$, где a и b — некоторые целые числа. Имеем:

$$707 = \frac{X}{Y} = \frac{101\cdot 7\cdot 11\cdot 5\cdot 3\cdot 3\cdot a}{99\cdot 5\cdot 9\cdot 3\cdot 1\cdot 1\cdot b}.$$

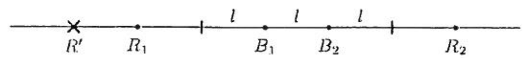
Снова, поскольку $\frac{X}{Y}$ — целое число, новые обнаруженные множители числа Y, т. е. 9 и 3 должны сокращаться с множителями числа a. Следовательно, $a = 9\cdot 3\cdot c = 3\cdot 3\cdot 3\cdot c$, и тогда, соответственно, $b = 1\cdot 1\cdot 1\cdot d$, где c и d — некоторые натуральные числа. В результате,

$$707 = \frac{X}{Y} = \frac{101\cdot 7\cdot 11\cdot 5\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot c}{99\cdot 5\cdot 9\cdot 3\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot d}.$$

Поскольку после сокращения числовых множителей получаем $707 = \frac{X}{Y} = \frac{707c}{d}$, то $c = d$. Если бы число c имело простые делители: $c = p_1\cdot\ldots\cdot p_k$, где $p_1, \ldots, p_k$ — простые, то согласно условию $d = (p_1-2)\cdot\ldots\cdot(p_k-2)$, — и равенство $c = d$ невозможно. Поэтому $c = 1$ и, значит, $X = 101\cdot 11\cdot 7\cdot 5\cdot 3^5 = 9\,449\,055$.

8.6. Ответ: а) 2; б) нет, не может.

Рассмотрим две синие точки B_1 и B_2, расстояние между которыми наибольшее среди



расстояний между синими точками (см. рис.); пусть расстояние B_1B_2 между ними равно l. Тогда согласно условию каждая красная точка должна быть расположена на расстоянии большем l от каждой из точек B_1 и B_2. В частности, нет ни одной красной точки между B_1 и B_2 и красные точки могут быть только на расстоянии большем l левее точки B_1 или правее точки B_2. Пусть R_1 — красная точка, ближайшая к B_1, расположенная левее B_1. Предположим, что левее R_1 есть ещё красная точка R'. Тогда очевидно $R'B_1 > R'R_1$, что противоречит условию задачи (расстояние между любыми двумя различными красными точками должно быть больше расстояния между любой красной и любой синей точками). Следовательно, левее B_1 может быть не более одной красной точки. Аналогично, правее B_2 также может быть не более одной красной точки. И значит, $n \leqslant 2$. С другой стороны, если две красные точки R_1 и R_2 расположены так, как показано на рисунке (т. е. на расстоянии, большем l от ближайшей синей точки), то все условия задачи очевидно выполняются. Поэтому наибольшее значение n равно 2, что является ответом на вопрос п. **а)** задачи. Наконец, если имеются две синие точки на расстоянии 10 см, то $l = B_1B_2 \geqslant 10$ и, значит, $R_1R_2 > 3l \geqslant 30$. Поэтому красные точки не могут находиться на расстоянии 25 см, что является ответом на вопрос п. **б)** задачи.

8.7. Ответ: $75°$.

Без ограничения общности можно считать, что биссектриса угла C пересекает сторону AD; пусть A_1 — соответствующая точка пересечения (см. рис. 1).

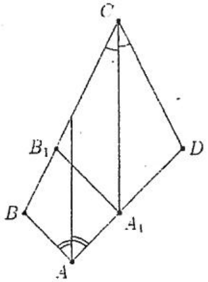


Рис. 1

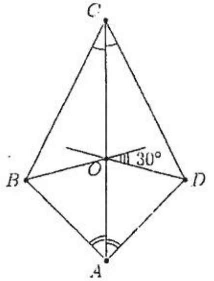


Рис. 2

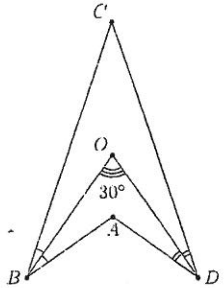


Рис. 3

Проведём $A_1B_1 \| AB$. Поскольку стороны четырёхугольника $ABCD$ соответственно параллельны сторонам четырёхугольника A_1B_1CD, то и биссектрисы соответственных углов этих четырёхугольников параллельны друг другу. Поэтому вместо четырёхугольника $ABCD$ можно рассмотреть четырёхугольник A_1B_1CD, или, что то же самое, считать, что в четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой углов A и C (см. рис. 2). Тогда, легко видеть, что $\triangle ABC = \triangle ADC$ (по общей стороне AC и прилегающим углам). Поэтому четырёхугольник $ABCD$ симметричен относительно диагонали AC (точки B и D совмещаются при перегибании листа вдоль прямой AC). Значит, точка пересечения биссектрис углов B и D — точка O — находится на диагонали AC. Угол $\angle BOD$ либо тупой (без ограничения общности можно считать, что $AB < BC$) и тогда согласно условию равен $150° = 180° - 30°$ (см. рис. 2), либо равен $30°$. Тогда, очевидно, в первом случае $\angle BOA = 0,5 \cdot \angle BOD = 75°$. А второй случай невозможен, поскольку в этом случае четырёхугольник $ABCD$ — не выпуклый. Действительно, если $\angle BOD = 30°$, то внутренний угол четырёхугольника $OBCD$ при вершине O равен $360° - 30° = 330°$ (см. рис. 3). Поэтому сумма остальных трёх углов этого четырёхугольника равна $30°$. А так как $\angle CBA = 2\angle CBO$ и $\angle CDA = 2\angle CDO$, то $\angle BCD + \angle CBA + \angle CDA < 2 \cdot 30° = 60°$. Но тогда внутренний угол четырёхугольника $ABCD$ при вершине A больше $360° - 60° = 300°$, а значит, четырёхугольник $ABCD$ не является выпуклым.

8.8. Ответ: в 1,5 раза.

Пусть у x лжецов спрашивалось их мнение о правдивых, а у y лжецов — о лжецах. Значит, x лжецов назвали x правдивых горожан лжецами, а y лжецов назвали y лжецов правдивыми.

как угол между касательной и хордой, проведённой в точку касания. Следовательно, $\angle B_1A_1C = \angle BCA_2$, поэтому $B_1A_1 \| B_2A_2$ и четырёхугольник $A_1A_2B_2B_1$ — трапеция. Воспользуемся теперь тем хорошо известным фактом, что в любой трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей, а также точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой. Применяя этот факт к трапеции $A_1A_2B_2B_1$, получаем, что точка M делит отрезок B_2A_2 пополам.

11.8. Ответ: $n = 5$.

Обозначим точки: $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — красные и $s_1, s_2, \ldots, s_n$ — синие. Пусть m — наименьшее из попарных расстояний между различными красными точками, т. е. $m = \min\{k_ik_j : i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \neq j\}$, а M — наибольшее из попарных расстояний между красными и синими точками, т. е. $M = \max\{k_is_j : i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$. Согласно условию $m > M$. Возьмём какую-либо синюю точку — например, s_1. Пусть K — круг радиуса M с центром в точке s_1. Тогда все красные точки лежат в круге K. Действительно, если бы нашлась некоторая красная точка k_i вне круга K, то $s_1k_i > M$, что противоречит определению числа M.

Докажем, что красных точек не более пяти. Допустим, что это не так, т. е. красных точек не мене шести. Возьмём первых шесть $k_1, k_2, \ldots, k_6$ и рассмотрим шесть лучей s_1k_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$. Так как точки $k_1, k_2, \ldots, k_6$ лежат в круге K, радиус которого меньше m, а попарные расстояния между различными из точек $k_1, k_2, \ldots, k_6$ не меньше m, то соседние (по ходу часовой стрелки) лучи s_1k_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, должны составлять угол, больший $60°$. Но это невозможно. Следовательно, $n \leqslant 5$.

Остаётся привести пример расположения пяти красных и пяти синих точек, удовлетворяющий условию задачи. Рассмотрим две концентрические окружности C_1 и C_2 радиусов 1 и r соответственно (число $r < 1$ выберем позже). В окружность C_1 впишем правильный пятиугольник $k_1k_2\ldots k_5$, а в окружность C_2 — какой-либо пятиугольник $s_1s_2\ldots s_5$. Вершины $k_1, k_2, \ldots, k_5$ покрасим в красный цвет, а вершины $s_1, s_2, \ldots, s_5$ — в синий. Наименьшее из попарных расстояний между различными красными точками равно стороне пятиугольника $k_1k_2\ldots k_5$, т. е. равно $2\sin 36°$, что больше $2\sin 30° = 1$ (т. е. $2\sin 36° - 1 > 0$). Расстояние между любой красной и любой синей точками не менее минимального расстояния $1 - r$ между точками окружностей C_1 и C_2 и не более максимального расстояния $1+r$ между точками этих окружностей. Наибольшее из попарных расстояний между синими точками не превосходит $2r$ — максимального расстояния между точками окружности C_2. Поэтому для такой конфигурации пяти красных и пяти синих точек условие задачи будет выполнено, если величину r мы выберем удовлетворяющей следующим неравенствам

$$2r < 1 - r \quad \text{и} \quad 1 + r < 2\sin 36°,$$

т. е., другими словами, если взять $r < \min\{1/3, 2\sin 36° - 1\}$, построенная конфигурация удовлетворяет условию задачи.

Пусть у a правдивых спрашивалось их мнение о лжецах, а у b правдивых — о правдивых. Значит, a правдивых назвали a лжецов лжецами, а b правдивых назвали b правдивых правдивыми.

Следовательно, при опросе ровно $x + a$ горожан были названы лжецами и затем выселены из города. Согласно условию число выселенных равно действительному числу лжецов-горожан, т. е. $x + a = x + y$, откуда $a = y$.

Поскольку было выселено $a = y$ действительных лжецов, то $(x + y) - y = x$ действительных лжецов осталось в городе. С другой стороны, в городе осталось ровно y действительных лжецов (в точности тех, которых лжецы назвали правдивыми). Поэтому $x = y$. Следовательно, $a = y = x$.

Итак, первоначально в городе было $x+y = 2a$ лжецов и $a+b$ правдивых. После выселения осталось a лжецов и b правдивых. Согласно условию $a = 3b$. Поэтому до выселения число лжецов было больше числа правдивых в $2a : (a + b) = 6b : 4b = 1,5$ раза.

9 класс

9.5. Ответ: 15 чисел.

Так как $A = 2013 \cdot B$ и $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, где 3, 11 и 61 — простые числа, то 3, 11 и 61 — одни из Петиных множителей и, значит, $2 = 3 - 1$, $10 = 11 - 1$ и $60 = 61 - 1$ — одни из множителей Васи. Тогда

$$2013 = \frac{A}{B} = \frac{61 \cdot 11 \cdot 3 \cdot x}{60 \cdot 10 \cdot 2 \cdot y},$$

где x — произведение остальных простых множителей Пети, а y — произведение остальных множителей Васи. Так как число $\dfrac{A}{B}$ целое, то x содержит все простые множители, которые необходимы, чтобы при упрощении дроби $\dfrac{A}{B}$ числа 60, 10 и 2 сократились. То есть $x = 60 \cdot 10 \cdot 2 \cdot a = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a$, и тогда, соответственно, $y = 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot b$, где a и b — некоторые целые числа. Имеем:

$$2013 = \frac{A}{B} = \frac{61 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a}{60 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot b}.$$

Снова, поскольку $\dfrac{A}{B}$ — целое число, новые обнаруженные множители числа B, т. е. 4, 4 и 2 должны сокращаться с множителями числа a. Следовательно, $a = 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot c = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot c$, и тогда, соответственно, $b = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot d$. В результате,

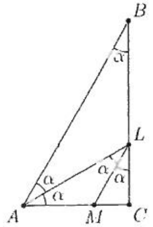
$$2013 = \frac{A}{B} = \frac{61 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot c}{60 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot d}.$$

Поскольку после сокращения числовых множителей получаем $2013 = \dfrac{A}{B} = \dfrac{2013c}{d}$, то $c = d$. Если бы число c имело простые делители: $c = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$, где $p_1, \ldots, p_k$ — простые, то согласно условию $d = (p_1 - 1) \cdot \ldots \cdot (p_k - 1)$, — и равенство $c = d$ невозможно. Поэтому $c = 1$ и, значит, $A = 61 \cdot 11 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 2^9 = 277\,299\,200$. В частности, Петя перемножил 15 чисел.

9.6. Ответ: $\angle B = 30°$, $\angle A = 60°$, $\angle C = 90°$.

Пусть $\angle BAC = 2\alpha$, тогда $\angle BAL = \angle LAM = \alpha$ (так как AL — биссектриса). Поскольку по условию $AM = ML$, то $\angle ALM = \angle LAM = \alpha$. Поэтому $\angle BAL = \alpha = \angle ALM$, и, следовательно, $LM \parallel AB$. Тогда треугольники MLC и ABC подобны, и $LC : MC =$

$= BC : AC = \sqrt{3}$, откуда $LC = MC\sqrt{3}$. Поэтому по теореме Фалеса ($LM \parallel AB$) получаем $BL : AM = LC : MC = \sqrt{3}$, т. е. $BL = \sqrt{3}AM$. Так как по условию LM — биссектриса $\angle ALC$, то $\angle ALM = \alpha = \angle MLC$. Значит, $\angle ABC = \angle MLC = \alpha$ (как соответственные углы при параллельных прямых AB и ML и их секущей BC). Так как в $\triangle ABL$ углы при стороне AB равны, он равнобедренный и $AL = BL = \sqrt{3}AM$. Рассмотрим равнобедренный треугольник ALM : его основание $AL = 2\cos\alpha \cdot AM$, и, следовательно, $2\cos\alpha = \sqrt{3}$. Значит, $\alpha = 30^\circ$. Окончательно, $\angle A = 2\alpha = 60^\circ$, $\angle B = \alpha = 30^\circ$ и $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 90^\circ$.



9.7. Ответ: **б)** $b = 0$, $c = -1$, $d = 1$, a — любое действительное число, отличное от чисел 0, -1, 1.

Так как a, b, c, d — корни уравнений

$$x^2 - ax + b = 0, \tag{1}$$

$$x^2 - bx + c = 0, \tag{2}$$

то, как следует из теоремы Виета,

$$a + b + c + d = a + b, \tag{3}$$

$$abcd = bc. \tag{4}$$

а) Поскольку среди чисел a, b, c, d нет нулевых, то из (4) следует

$$ad = 1. \tag{5}$$

Кроме того, число b не может быть корнем уравнения (2), ибо в противном случае второй корень α этого уравнения был бы равен 0 (по теореме Виета $\alpha + b = -(-b)$), а по условию среди корней уравнений (1) и (2) нет нулевых. Следовательно, b — корень уравнения (1). Тогда второй корень β этого уравнения равен 1 (по теореме Виета $\beta b = b$, $b \neq 0$). Если бы вторым корнем уравнения (1) было число a или d, например, $a = \beta = 1$, то из (5) следовало бы $d = 1$, но $a \neq d$, противоречие. Аналогично получаем противоречие при предположении $d = \beta = 1$. Следовательно, вторым корнем уравнения (1) является число c, т. е. $c = \beta = 1$. Но тогда из (3) следует, что $d = -c = -1$ и из (5) теперь следует, что $a = -1$, т. е. $a = d$, противоречие.

Таким образом указанной в условии четвёрки чисел, не содержащей нуля, не существует.

б) Ни число a, ни число d не могут быть нулевыми, ибо тогда, в силу (4), по крайней мере ещё одно из чисел b или c было бы равно нулю, в противоречие с тем, что среди a, b, c, d нет равных чисел.

Предположим, что $c = 0$. Тогда $b \neq 0$, так как $b \neq c$. Число c не является корнем уравнения (1), ибо в противном случае произведение корней этого уравнения было бы равно 0, а по теореме Виета оно равно $b \neq 0$. Следовательно, c — корень уравнения (2), которое будет иметь вид $x^2 - bx = 0$, и, значит, второй корень этого уравнения равен b. Поэтому a — корень уравнения (1), но тогда $a^2 - a \cdot a + b = 0$, откуда $b = 0$, противоречие

Итак, остался возможным лишь случай $b = 0$. Тогда $c \neq 0$, так как $b \neq c$. Число b не является корнем уравнения (2), ибо в противном случае произведение корней этого уравнения было бы равно 0, а по теореме Виета оно равно $c \neq 0$. Следовательно, b — корень уравнения (1), которое будет иметь вид $x^2 - ax = 0$, и, значит, второй корень этого уравнения равен a. Поэтому числа c и d — корни уравнения (2), которое имеет вид $x^2 + c = 0$. По теореме Виета $cd = c$, откуда $d = 1$ ($c \neq 0$), но тогда $1^2 + c = 0$, откуда $c = -1$.

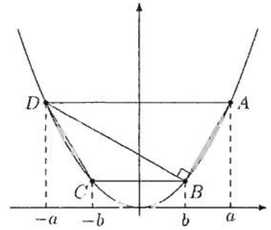
которого $b = -1$ и $b = \dfrac{1}{2}$.

Если $b = -1$, то $a = \dfrac{-1}{b} = 1$, а $c = \dfrac{1}{4}a - b = \dfrac{1}{4} - (-1) = \dfrac{5}{4}$. Легко проверяется, что тройка $(a; b; c) = \left(1; -1; \dfrac{5}{4}\right)$ удовлетворяет условию задачи.

Если $b = \dfrac{1}{2}$, то $a = \dfrac{-1}{b} = -2$, а $c = \dfrac{1}{4}a - b = \dfrac{1}{4} \cdot (-2) - \dfrac{1}{2} = -1$. Опять же, легко проверяется, что тройка $(a; b; c) = \left(-2; \dfrac{1}{2}; -1\right)$ удовлетворяет условию задачи.

11.6. Ответ: $\sqrt{3}$.

Обозначим координаты вершин трапеции $A(a; a^2)$, $B(b; b^2)$, $C(-b; b^2)$, $D(-a; a^2)$ $(a > b > 0)$. Так как $\angle DBA = 90^\circ$, то $DB^2 + BA^2 = AD^2$. Заменяя расстояния в последнем равенстве по формуле расстояния между точками на координатной плоскости, получим $(a+b)^2 + (a^2-b^2)^2 + (a-b)^2 + (a^2-b^2)^2 = (2a)^2$, откуда после несложных равносильных преобразований получаем $(a^2-b^2)^2 = a^2 - b^2$. Из этого равенства, учитывая, что $a^2 - b^2 \neq 0$, находим $a^2 - b^2 = 1$. Заметим, что тогда высота h трапеции равна $h = y_A - y_B = a^2 - b^2 = 1$.

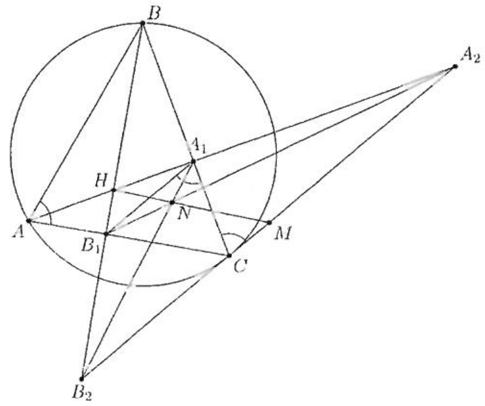


Далее, по условию $BC = AB$, или $2b = \sqrt{1 + (a-b)^2}$, т. е. $4b^2 = 1 + a^2 - 2ab + b^2$, а значит, поскольку $b^2 + 1 = a^2$, получаем уравнение $a^2 - ab - 2b^2 = 0$. Решая последнее уравнение относительно a, получим $a = 2b$ (так как $a, b > 0$). Тогда $1 = a^2 - b^2 = 3b^2$, откуда $b = 1/\sqrt{3}$, $a = 2/\sqrt{3}$. Поэтому площадь трапеции равна

$$S = \frac{1}{2}(AD + BC)h = \frac{1}{2}(2a + 2b) \cdot 1 = a + b = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

11.7. Ответ: 1.

Поскольку $\angle AB_1B = \angle AA_1B = 90^0$, то четырёхугольник ABA_1B_1 — вписанный. Отсюда имеем $\angle B_1A_1C = 180^\circ - \angle BA_1B_1 = \angle B_1AB = \angle CAB$. В то же время, $\angle BCA_2 = \angle CAB$



цвета). Так как покрашенные одним цветом точки диаметрально противоположны, то расстояние между одноцветными точками равно диаметру описанной вокруг $2n$ -угольника окружности. Любые две точки, покрашенные в различные цвета, являются концами хорды, отличной от диаметра. Следовательно, расстояние между любыми двумя точками одного цвета больше расстояния между любыми двумя точками разного цвета.

11 класс

11.5. Ответ: $\left(1;\frac{1}{4};0\right)$, $\left(1;-1;\frac{5}{4}\right)$ и $\left(-2;\frac{1}{2};-1\right)$.

Так как по условию числа a, b, c попарно различны и являются корнями многочлена $x^3-\frac{5a}{4}x^2+bx+c$ со старшим коэффициентом 1, то этот многочлен равен

$$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем равенства

$$a+b+c=\frac{5a}{4}, \qquad (1)$$

$$ab+bc+ca=b, \qquad (2)$$

$$abc=-c. \qquad (3)$$

Из равенства (3) следует, что могут представиться только две возможности: либо 1) $c=0$, либо 2) $c\neq 0$ и $ab=-1$. Рассмотрим отдельно каждую из них.

1) Пусть $c=0$. Тогда равенство (2) принимает вид $ab=b$, откуда, поскольку $b\neq c=0$, находим $a=1$. Подставляя в равенство (1) значения $c=0$ и $a=1$, получим $1+b+0=\frac{5}{4}$, откуда $b=\frac{1}{4}$. Легко видеть, что тройка $(a;b;c)=\left(1;\frac{1}{4};0\right)$ удовлетворяет условию задачи.

2) Пусть $c\neq 0$ и $ab=-1$. Тогда равенство (2) принимает вид $b+1=bc+ca$. Далее, из (1) найдём $c=\frac{1}{4}a-b$ и подставим в последнее равенство, получим

$$b+1=(b+a)\left(\frac{1}{4}a-b\right)=\frac{1}{4}a^2-b^2-\frac{3}{4}ab=\frac{1}{4}a^2-b^2+\frac{3}{4},$$

или $b^2+b-\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}=0$. Домножив обе части этого равенства на b^2, получим, что $b^4+b^3-\frac{1}{4}(ab)^2+\frac{1}{4}b^2=0$, или, учитывая равенство $ab=-1$, — что

$$b^4+b^3+\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{4}=0 \iff (b+1)\left(b^3+\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}\right)=0.$$

В полученном уравнении рациональный корень второго многочлена-сомножителя легко находится (или угадывается): $b=\frac{1}{2}$. Поэтому, раскладывая этот многочлен на сомножители, получаем равносильное уравнение $(b+1)\left(b-\frac{1}{2}\right)\left(b^2+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\right)=0$, действительные корни

Таким образом, окончательно получаем, что указанными в условии четвёрками чисел могут быть лишь $(a;b;c;d)=(a;0;-1;1)$, где a — любое действительное число, отличное от чисел 0, -1 и 1. Легко проверить, что любая такая четвёрка удовлетворяет условию, поскольку числа a и $b=0$ являются корнями уравнения $x^2-ax=0$, а числа $c=-1$ и $d=1$ являются корнями уравнения $x^2-1=0$.

9.8. Ответ: $k=2$.

Пусть B_1 и B_2 — пара синих точек, расстояние между которыми наибольшее

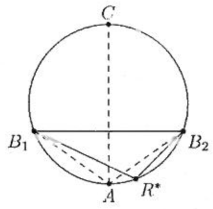


Рис. 1

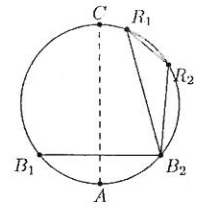


Рис. 2

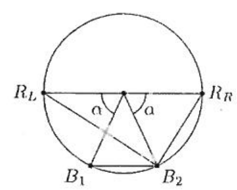


Рис. 3

из всех расстояний между любыми двумя синими точками (если таких пар точек несколько, возьмём любую из них). Пусть AC — диаметр окружности, перпендикулярный хорде B_1B_2 (и, следовательно, проходящий через её середину). Поскольку хорда B_1B_2 не может быть диаметром (тогда бы расстояние B_1B_2 было не меньше расстояния между любыми двумя разноцветными точками), то эта хорда делит окружность на две дуги — большую и меньшую. Не нарушая общности, считаем, что $\smile B_1AB_2 < \smile B_1CB_2$, тогда $\angle B_1AB_2 > 90^\circ$ (см. рис. 1). Легко видеть, что никакая красная точка R^* не может лежать на дуге B_1AB_2, поскольку тогда $\angle B_1R^*B_2=\angle B_1AB_2>90^\circ$, и, значит $B_1B_2>B_1R^*$, что противоречит условию.

Если бы на дуге B_1CB_2 между точками C и B_2 было отмечено по крайней мере две красные точки R_1 и R_2, то очевидно $\smile R_1R_2B_2 > \smile R_1R_2$, что приводит к неравенству $R_1R_2 < R_1B_2$ — в противоречие с условием (см. рис. 2). Таким образом, на дуге B_1CB_2 между точками C и B_2 отмечено не более одной красной точки. Аналогично, на дуге B_1CB_2 между точками C и B_1 также отмечено не более одной красной точки. Следовательно, на окружности отмечено не более двух красных точек.

Осталось показать, что на окружности действительно можно отметить две красные точки и несколько синих с соблюдением условия задачи. Указанная конструкция изображена на рис. 3, где угол $60^\circ<\alpha<90^\circ$. Красные точки R_L и R_R диаметрально противоположны, поэтому расстояние R_LR_R больше расстояния между любыми двумя другими точками. Кроме того, так как $90^\circ>\alpha>60^\circ$, то $\smile R_LB_1B_2=\alpha+(180^\circ-2\alpha)>90^\circ>\alpha>180^\circ-2\alpha=\smile B_1B_2$, и, значит, $R_LR_R>R_LB_2>R_RB_2>B_1B_2$. Аналогично получаем $R_LR_R>R_LB_2>R_LB_1>B_1B_2$.

10 класс

10.5. Ответ: $\left(1;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Условие 1) из формулировки задачи равносильно условию: найдётся такое действительное h, что при всех действительных x верно равенство

$$(ax+b)^2+h=x^2+2bx+a. \qquad (1)$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях равенства (1), получим равносильную ему систему

$$\begin{cases} a^2 = 1, \\ 2ab = 2b, \\ b^2 + b = a. \end{cases} \qquad (2)$$

Из второго уравнения этой системы следует, что могут представиться только две возможности: либо а) $b = 0$, либо б) $b \neq 0$ и $a = 1$.

Условие 2) из формулировки задачи равносильно условию: уравнение

$$ax + b = x^2 + 2bx + a \qquad (3)$$

имеет единственное решение. Поскольку уравнение (3) — это квадратное уравнение $x^2 + (2b - a)x + a - b = 0$, то оно имеет единственное решение тогда и только тогда, когда его дискриминант $D = (2b - a)^2 - 4(a - b) = 4b^2 - 4ab + a^2 - 4a + 4b$ равен нулю, т. е.

$$4b^2 - 4ab + a^2 - 4a + 4b = 0. \qquad (4)$$

Для нахождения значений a и b, удовлетворяющих уравнению (4), воспользуемся найденными ранее условиями а) и б).

Если выполнено условие а) $b = 0$, то, подставляя в (4) вместо b нуль, получим уравнение $a^2 - 4a = 0 \iff a = 0$ или $a = 2$. Ни одно из этих значений a невозможно, поскольку они противоречат первому уравнению системы (1).

Если выполнено условие б) $b \neq 0$ и $a = 1$, то, подставляя в (4) вместо a единицу, получим уравнение $4b^2 - 3 = 0 \iff b = -\sqrt{3}/2$ или $b = \sqrt{3}/2$.

Итак, либо $(a; b) = (1; -\sqrt{3}/2)$, либо $(a; b) = (1; \sqrt{3}/2)$.

Обе найденные пары $(a; b)$ удовлетворяют условию задачи, поскольку, как это следует из проведённых рассуждений, удовлетворяют системе (2) и уравнению (4), а они, в свою очередь, равносильны соответственно условиям 1) и 2) из формулировки задачи. Отметим, что при выполнении первых двух уравнений системы (2) и уравнения (4) третье уравнение системы (2) выполняется автоматически.

10.6. Ответ: $(1; 4; 2; 3)$ и $(3; 2; 4; 1)$.

Запишем заданную систему в привычном виде

$$\begin{cases} (k + l)(m + n) = 9 + 2lm, \\ (k + l)(m + n) = 19 + 2kn, \end{cases}$$

или, раскрыв скобки и приведя подобные члены, — в равносильном виде

$$\begin{cases} km + kn - lm + ln = 9, \\ km - kn + lm + ln = 19. \end{cases}$$

Заменив уравнения последней системы их суммой и разностью, получим равносильную систему

$$\begin{cases} km + ln = 14, \\ kn - lm = -5. \end{cases} \qquad (*)$$

Возведём обе части каждого уравнения системы $(*)$ в квадрат и сложим получившиеся уравнения, получим

$$k^2m^2 + l^2n^2 + k^2n^2 + l^2m^2 = 14^2 + (-5)^2 = 221 = 13 \cdot 17,$$

или, равносильно,

$$(k^2 + l^2)(m^2 + n^2) = 13 \cdot 17. \qquad (**)$$

Так как по условию числа k, l, m и n натуральные, то оба сомножителя в левой части равенства $(**)$ натуральные и больше 1. Поэтому это равенство может быть выполнено только в двух случаях:

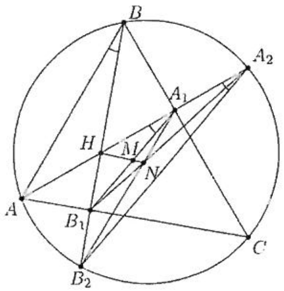
либо 1) $k^2 + l^2 = 13$, $m^2 + n^2 = 17$, либо 2) $k^2 + l^2 = 17$, $m^2 + n^2 = 13$.

В случае 1) имеем: либо $k = 2$, $l = 3$, либо $k = 3$, $l = 2$. Подставляя значения $k = 2$, $l = 3$ в систему $(*)$, видим, что её решения m и n не целые. Поэтому при этих значениях k и l исходная система выполняться не может. Подставляя же в систему $(*)$ значения $k = 3$, $l = 2$, находим, что $m = 4$ и $n = 1$ (равенство $m^2 + n^2 = 17$ случая 1) проверять не нужно, так как оно выполнено автоматически, поскольку m и n удовлетворяют системе $(*)$ и $k^2 + l^2 = 13$). Итак, в случае 1) имеем единственное решение $(k; l; m; n) = (3; 2; 4; 1)$ (оно является решением, поскольку удовлетворяет системе $(*)$, которая равносильна исходной системе).

Разбирая аналогично случай 2), находим, что и в этом случае имеется единственное решение $(k; l; m; n) = (1; 4; 2; 3)$.

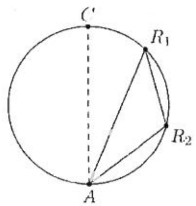
10.7. Ответ: 1.

Поскольку $\angle AB_1B = \angle AA_1B = 90^0$, то четырёхугольник ABA_1B_1 — вписанный. Значит, $\angle AA_1B_1 = \angle ABB_1$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу. В то же время, $\angle AA_2B_2 = \angle ABB_2$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу (см. рис.). Следовательно, $\angle AA_1B_1 = \angle AA_2B_2$, и поэтому $A_1B_1 \parallel A_2B_2$. Воспользуемся теперь тем хорошо известным фактом, что в любой трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей, а также точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой. Применяя этот факт к трапеции $A_1A_2B_2B_1$, получаем, что точка M делит отрезок B_1A_1 пополам.



10.8. Ответ: $2n$ точек.

Рассмотрим на окружности произвольную точку A некоторого цвета, например, синего. Пусть точка C диаметрально противоположна точке A (см. рис.). Если бы на правой дуге AC было отмечено по крайней мере две точки R_1 и R_2 одного и того же цвета, отличного от синего, то, поскольку $\angle AR_2R_1 \geqslant 90°$, в треугольнике AR_1R_2 сторона AR_1 была бы наибольшей, что приводит к неравенству $R_1R_2 < AR_1$ в противоречие с условием. Следовательно, на правой полуокружности AC лежит не более одной точки, цвет которой отличен от синего. Аналогично, на левой полуокружности AC лежит не более одной точки, цвет которой отличен от синего. Следовательно, на окружности отмечено не более двух точек одинакового цвета, отличного от синего.



Поскольку синий цвет был выбран произвольно, то всего на окружности отмечено не более двух точек каждого цвета. Таким образом, на окружности отмечено и покрашено в n цветов не более $2n$ точек.

Отметить и покрасить в n цветов $2n$ точек с соблюдением условия задачи можно. Для этого впишем в окружность правильный $2n$-угольник и покрасим диаметрально противоположные его вершины в один и тот же цвет (разные пары противоположных вершин — в различные