УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В.А. БУДКЕВИЧ

17 декабря 2013 г.

LXIV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

13 – 17 января 2014 года

8 класс

Первый день

1. Существуют ли такие 100 различных натуральных чисел, что каждое из них является делителем суммы всех остальных (девяноста девяти) чисел?

2. Точка M – середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. Отрезок CM пересекает диагональ BD в точке K, а прямая AK пересекает сторону CD в точке N.

Найдите отношение $CN : ND$.

3. а) Даны 8 отрезков. Верно ли, что из этих отрезков всегда можно выбрать три таких, из которых можно составить треугольник?

б) Даны 8 отрезков. Известно, что из любых четырёх из них можно составить выпуклый четырёхугольник.

Докажите, что из данных отрезков заведомо можно выбрать три таких, из которых можно составить треугольник.

4. Клетчатая доска 7×8 замощается плитками двух типов: L-образными (см. рис. 1)

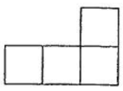


Рис. 1

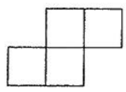


Рис. 2

и Z-образными (см. рис. 2). Плитки разрешается поворачивать и переворачивать. Каждая плитка состоит из четырёх клеток, равных по размеру клеткам доски.

Какое наименьшее число L-образных плиток может участвовать в замощении?

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 4,5 часа

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В.А. БУДКЕВИЧ

17 декабря 2013 г.

LXIV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

13 – 17 января 2014 года

9 класс

Первый день

1. Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел x и y, которые удовлетворяют равенству

$$x^4 - 9^y = 2400.$$

2. Точка N-середина стороны BC прямоугольника $ABCD$. На диагонали AC этого прямоугольника отмечена точка K и на отрезке AK отмечена точка L так, что $\angle CKD = \angle NLD = 90°$.

Докажите, что точка L – середина отрезка AK.

3. Существуют ли отличные от тождественно постоянных функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, определённые при всех действительных значениях аргумента, такие, что

$$f(g(x)) - g(f(x)) = 2014?$$

4. Даны $n \geqslant 4$ отрезков. Известно, что из любых четырёх из них можно составить выпуклый четырёхугольник.

Найдите наименьшее значение n, при котором из данных отрезков заведомо можно выбрать три таких, из которых можно составить треугольник.

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В.А. БУДКЕВИЧ

17 декабря 2013 г.

LXIV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

13 – 17 января 2014 года

10 класс

Первый день

1. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) отмечены точки K и L соответственно, так, что $\angle BCK = \angle ACK$ и $\angle CAL = \angle DAL$. Оказалось, что прямые KL и AD параллельны.

Найдите длину диагонали AC, если известно, что $BC = 4$, $AD = 9$.

2. Найдите все натуральные k, для которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y+z}{y^2+z+x} + \dfrac{y^2+z+x}{z^2+x+y} = k+2, \\ \dfrac{x^2-z^2+z-x}{z^2+x+y} = k^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y; z)$ в целых попарно различных числах.

3. Найдите все функции f, определённые на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения, которые при всех действительных x и y удовлетворяют равенству

$$f(x+xy) = f(x)(2y+1) + f(xy).$$

4. Даны $n \geqslant 4$ отрезков. Известно, что из любых четырёх из них можно составить выпуклый четырёхугольник.

Найдите наименьшее значение n, при котором из данных отрезков заведомо можно выбрать три таких, из которых можно составить остроугольный треугольник.

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В.А. БУДКЕВИЧ

17 декабря 2013 г.

LXIV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

13 – 17 января 2014 года

11 класс

Первый день

1. Диагонали трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ пересекаются в точке M. На стороне DC отмечены точки K и L, так, что $\angle CBK = \angle DBK$ и $\angle CAL = \angle DAL$. Оказалось, что $CK = DL$.

Докажите, что отрезки CM и MD равны.

2. Найдите все функции f, определённые на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения, которые при всех действительных x и y удовлетворяют равенству

$$f(x+y) = f(x)\cos y + f(y)\cos x.$$

3. Даны n отрезков ($n \geqslant 4$). Известно, что из любых k ($4 \leqslant k \leqslant n$) из них можно составить выпуклый k-угольник.

Найдите наименьшее (в зависимости от k) значение n, при котором из данных отрезков заведомо можно выбрать три таких, из которых можно составить треугольник.

4. Клетчатая доска 10×10 замощается плитками двух типов: L-образными (см. рис. 1) и T-образными (см. рис. 2). Плитки разрешается поворачивать и переворачивать. Каждая плитка состоит из четырёх клеток, равных по размеру клеткам доски.

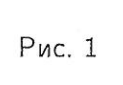


Рис. 1

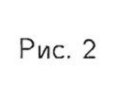


Рис. 2

Какое наибольшее число L-образных плиток может участвовать в замощении?

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

LXIV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

13 – 17 января 2014 года

Решения

Первый день

8 класс

8.1. Ответ: да, существуют.

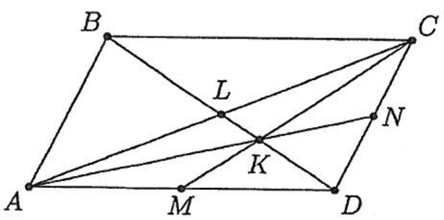
Докажем более общее утверждение: для любого $n \geqslant 3$ существуют n различных натуральных чисел, таких, что каждое из них является делителем суммы всех остальных $(n-1)$ чисел.

Предположим, что имеется набор из m таких чисел. Покажем, как этот набор можно увеличить, получив набор с бо́льшим количеством чисел, удовлетворяющий сформулированном выше условию. Пусть сумма имеющихся m чисел равна S. Добавим тогда к набору число S. Ясно, что оно отличается от всех имевшихся m чисел, так как оно больше каждого из них. Кроме того, добавленное число S делится на сумму всех остальных чисел, которая равна S. Пусть теперь a — какое-то число, которое уже́ было в исходном наборе из m чисел. Это значит, что a делит $S-a$, а значит, делит и S. Тогда a делит $2S-a$ — сумму всех чисел, кроме a, в новом наборе чисел. Таким образом, новый набор чисел удовлетворяет условию задачи.

Теперь заметим, что тройка чисел 1, 2, 3 удовлетворяет условию задачи. Согласно доказанному выше, добавляя к этим числам их сумму 6, затем сумму 12 получившейся четвёрки чисел, затем сумму 24 получившейся пятёрки чисел и т. д., будем получать наборы чисел, удовлетворяющие нужным условиям. Когда чисел станет 100, получим в точности тот набор, о котором говорится в условии задачи.

8.2. Ответ: $CN : ND = 1 : 1$.

Пусть L — точка пересечения диагоналей AC и BD. Поскольку диагонали параллелограмма точкой их пересечения делятся пополам, то L — середина AC, а значит, DL — медиана треугольника ACD. Так как по условию M — середина AD, то CM — медиана треугольника ACD, т. е. K — точка пересечения медиан DL и CM треугольника ACD. Поэтому, поскольку все три медианы треугольника пересекаются в одной точке, отрезок AN — также медиана треугольника ACD. Следовательно, $CN = ND$ и $CN : ND = 1 : 1$.



8.3. Ответ: **а)** нет, не верно.

Как хорошо известно, из трёх отрезков с длинами $a \leqslant b \leqslant c$ можно составить треугольник, если и только если выполняется неравенство $c < a + b$ (неравенство треугольника).

а) Возьмём восемь отрезков, длины которых, например, равны 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. Легко убедиться, что ни для каких трёх из них неравенство треугольника не выполняется, а значит, ни из каких трёх из них составить треугольник нельзя.

б) Пусть длины данных восьми отрезков равны $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_8$. Так как по условию из любых четырёх из них можно составить (выпуклый) четырёхугольник, то, в частности, четырёхугольник можно составить из отрезков a_1, a_2, a_3 и a_8, а значит,

$$a_8 < a_1 + a_2 + a_3, \qquad (*)$$

(длина ломаной, соединяющей концы отрезка, больше длины этого отрезка).

Докажем, что среди этих восьми отрезков обязательно найдутся три таких, из которых можно составить треугольник. Предположим противное. Тогда для любых трёх из этих отрезков должны выполняться неравенства, противоположные неравенству треугольника; в частности:

$$a_1 + a_2 \leqslant a_3, \quad a_2 + a_3 \leqslant a_4, \quad a_3 + a_4 \leqslant a_5, \quad a_4 + a_5 \leqslant a_6, \quad a_5 + a_6 \leqslant a_7, \quad a_6 + a_7 \leqslant a_8.$$

Почленно сложив эти неравенства, получим $a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \leqslant a_8$, а значит, $a_1 + a_2 + a_3 < a_8$. Но это неравенство противоречит неравенству $(*)$. Следовательно, среди данных восьми отрезков всегда найдутся три, из которых можно составить треугольник.

8.4. Ответ: 4.

Покрасим доску полосами в чёрный и белый цвет (см. рис. 1). В такой раскраске 32 клетки чёрные и 24 — белые. Легко видеть, что любая L-образная плитка накрывает либо 3 белых и 1 чёрную клетку (обозначим число участвующих в замощении таких плиток через d), либо 3 чёрных и 1 белую клетку (обозначим число участвующих в замощении таких плиток через f). Кроме того, любая Z-образная плитка накрывает 2 белые и 2 чёрные клетки (обозначим число участвующих в замощении Z-образных плиток через a).

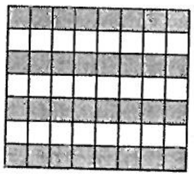


Рис. 1

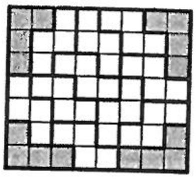


Рис. 2

Тогда общее число белых клеток на доске можно записать как $3d + f + 2a$, а общее число чёрных клеток — как $d + 3f + 2a$. Таким образом, имеем систему равенств $3d + f + 2a = 24$, $d + 3f + 2a = 32$. Вычитая первое равенство из второго, получим $2f - 2d = 8$, откуда $f = 4 + d \geqslant 4$. В частности, число L-образных плиток на доске не менее 4.

Пример на рисунке 2 показывает, что это число может быть равно 4.

9 класс

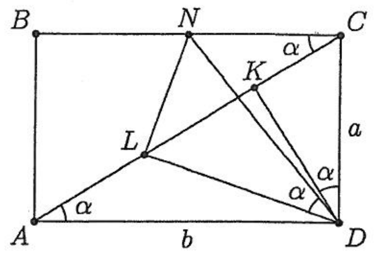
9.1. Ответ: $(7; 0)$ и $(-7; 0)$.

Заметим, что при $y \geqslant 1$ числа 9^y и 2400 делятся на 3, и, следовательно, $x^4 \vdots 3$. Поскольку 3 — простое число, то тогда и $x \vdots 3$, а значит $x^4 \vdots 3^4 = 81$. Поэтому левая часть исходного равенства $x^4 - 9^y \vdots 9$, в то время как его правая часть — число 2400 — на 9 не делится, противоречие.

Легко также видеть, что ни одно отрицательное y не может удовлетворять данному в условии равенству, поскольку в этом случае левая часть этого равенства — число не целое.

Итак, остаётся рассмотреть случай $y = 0$. В этом случае $x^4 = 2401$ и тогда $x = 7$ или $x = -7$.

9.2. *Первое решение.* Пусть $a = CD$, $b = AD$, $\alpha = \angle CAD$. Тогда $\angle NCL = \angle CDK = \alpha$. Кроме того, поскольку $\angle NCD = \angle NLD = 90°$, то точки L, N, C и D лежат на одной окружности (с диаметром ND), и поэтому $\angle NCL = \angle NDL = \alpha$ (как углы, опирающиеся на одну дугу). Теперь имеем



$$LK^2 = LD^2 - DK^2 = [LD = ND\cos\alpha] =$$
$$= ND^2\cos^2\alpha - DK^2 = [DK = a\cos\alpha, ND^2 = a^2 + b^2/4] =$$
$$(a^2 + b^2/4)\cos^2\alpha - a^2\cos^2\alpha = \frac{1}{4}b^2\cos^2\alpha =$$
$$= [AK = b\cos\alpha] = \frac{1}{4}AK^2,$$

откуда $LK = AK/2$, что и требовалось.

Второе решение. Заметим, что поскольку $\angle MCD + \angle MLD = 90° + 90° = 180°$, то четырёхугольник $LMCD$ вписанный. Отсюда, в частности, следует, что $\angle MDL = \angle MCL$. Но $\angle MCL = \angle DAC$, так как $BC \parallel AD$. Таким образом, $\angle DAC = \angle MDL$. Далее, $\triangle ADM$, очевидно, равнобедренный ($AM = MD$), поскольку точка M — середина стороны BC. Поэтому $\angle MAD = \angle ADM$. Получаем, что

$$\angle MAL = \angle MAD - \angle DAC = \angle ADM - \angle MDL = \angle ADL.$$

Получаем, что $\triangle ALD \sim \triangle CMA$ по двум углам. Отсюда $\dfrac{AL}{AD} = \dfrac{CM}{AC}$. С другой стороны, прямоугольные треугольники AKD и CBA подобны по острому углу, так что $\dfrac{AK}{AD} = \dfrac{CB}{AC}$. Но тогда $\dfrac{CB}{AC} = \dfrac{2\cdot CM}{AC} = \dfrac{2\cdot AL}{AD}$. Следовательно, $AK = 2\cdot AL$, что и требовалось доказать.

9.3. Ответ: да, существуют.

Можно найти бесконечно много таких функций среди линейных. Пусть $f(x) = ax + b$ и $g(x) = cx + d$, где a, b, c, d — некоторые числа. Тогда $f(g(x)) - g(f(x)) = a(cx + d) + b - c(ax + b) - d = ad + b - cb - d$. Легко подобрать такие значения a, b, c, d, чтобы выполнялось равенство $ad + b - cb - d = 2014$. Можно выбрать произвольные значения для трёх из этих коэффициентов, а значение четвёртого вычислить из получившегося уравнения. Например, пусть $b = c = d = 1$, тогда $a = 2015$. Это даёт функции $f(x) = 2015x + 1$ и $g(x) = x + 1$, удовлетворяющие условию задачи.

Разумеется, парами линейных функций далеко не исчерпываются пары $(f(\cdot), g(\cdot))$ функций, доставляющие решение задачи. Из большого многообразия таких пар приведём ещё только два типа пар.

Пусть $f(\cdot)$ — произвольная периодическая функция с периодом 2014 (т. е. для всех действительных x верно равенство $f(x + 2014) = f(x)$), а функция $g(x) = x - 2014$. Тогда $f(g(x)) - g(f(x)) = f(x - 2014) - f(x) + 2014 = 2014$ для всех действительных x.

Приведём примеры кусочно-постоянных функций. Положим

$$f(x) = \begin{cases} 2015, & \text{если} \quad x \geqslant 0, \\ -1, & \text{если} \quad x < 0 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad g(x) = \begin{cases} -2015, & \text{если} \quad x \geqslant 0, \\ 1, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Тогда, если $x \geqslant 0$, имеем $f(g(x)) - g(f(x)) = f(-2015) - g(2015) = -1 - (-2015) = 2014$. Если же $x < 0$, то $f(g(x)) - g(f(x)) = f(1) - g(-1) = 2015 - 1 = 2014$. Таким образом, $f(g(x)) - g(f(x)) = 2014$ при всех действительных x.

9.4. Ответ: 5.

Напомним вначале одно хорошо известное утверждение: из трёх отрезков с длинами $a \leqslant b \leqslant c$ можно составить треугольник, если и только если выполняется неравенство $c < a+b$ (неравенство треугольника). Перейдём к решению задачи.

Пусть длины данных n отрезков равны $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Так как по условию из любых четырёх из них можно составить (выпуклый) четырёхугольник, то, в частности, четырёхугольник можно составить из отрезков a_1, a_2, a_3 и a_5, а значит,

$$a_5 < a_1 + a_2 + a_3 \qquad (*)$$

(длина ломаной, соединяющей концы отрезка, больше длины этого отрезка).

Докажем, что при $n \geqslant 5$ обязательно найдутся три отрезка, из которых можно составить треугольник. Предположим противное. Тогда, в частности, ни из каких трёх из первых пяти отрезков a_1, a_2, $\ldots$, a_5 нельзя составить треугольник. Значит, должны выполняться неравенства, противоположные неравенству треугольника:

$$a_1 + a_2 \leqslant a_3, \quad a_2 + a_3 \leqslant a_4, \quad a_3 + a_4 \leqslant a_5.$$

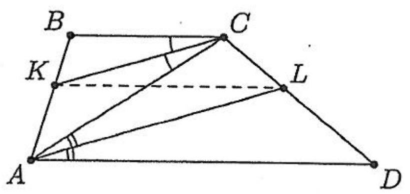
Почленно сложив эти неравенства, получим $a_1 + 2a_2 + a_3 \leqslant a_5$, а значит, $a_1 + a_2 + a_3 < a_5$. Но это неравенство противоречит неравенству $(*)$. Следовательно, если $n = 5$, среди данных отрезков найдутся три таких, из которых можно составить треугольник.

Для завершения решения остаётся лишь привести пример для $n = 4$, когда такие отрезки выбрать нельзя. Возьмём четыре отрезка, длины которых равны, например, 1, 1, 2, 3. Так как $1 + 1 + 2 > 3$, то из них можно составить (выпуклый) четырёхугольник. Легко убедиться, что ни из каких трёх из этих четырёх отрезков составить треугольник нельзя, поскольку ни для каких трёх из них не выполняется неравенство треугольника.

10 класс

10.1. Ответ: 6.

Поскольку CK является биссектрисой внутреннего угла ACB в треугольнике ABC,



то $AK : KB = AC : BC$. Аналогично, поскольку AL является биссектрисой внутреннего угла DAC в треугольнике ACD, то $DL : LC = AD : AC$. Кроме того, из теоремы Фалéса следует, что $AK : KB = DL : LC$. Таким образом,

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC} = \frac{AD}{AC},$$

откуда $AC^2 = AD \cdot BC$, или согласно условию $AC^2 = 9 \cdot 4$, т. е. $AC = 6$.

10.2. Ответ: $k = 1$.

Обозначим дроби в левой части первого из уравнений системы:

$$\frac{x^2 + y + z}{y^2 + z + x} = a \quad \text{и} \quad \frac{y^2 + z + x}{z^2 + x + y} = b. \qquad (1)$$

Тогда это уравнение примет вид: $a + b = k + 2$. Далее, так как

$$a \cdot b = \frac{x^2 + y + z}{y^2 + z + x} \cdot \frac{y^2 + z + x}{z^2 + x + y} = \frac{x^2 + y + z}{z^2 + x + y},$$

а левая часть второго уравнения заданной системы преобразуется к виду

$$\frac{x^2 - z^2 + z - z}{z^2 + x + y} = \frac{x^2 + y + z - z^2 - x - y}{z^2 + x + y} = \frac{x^2 + y + z}{z^2 + x + y} - 1 = ab - 1,$$

то второе её уравнение принимает вид: $ab = k^2+1$. Итак, в обозначениях (1) заданная в условии задачи система запишется в виде

$$\begin{cases} a+b=k+2, \\ ab=k^2+1. \end{cases} \tag{2}$$

По обратной теореме Виета решения a и b системы (2) совпадают с корнями квадратного относительно t уравнения

$$t^2-(k+2)t+k^2+1=0. \tag{3}$$

Но квадратное уравнение (3) имеет действительные корни, если и только если его дискриминант D неотрицателен: $D=(k+2)^2-4(k^2+1)=-3k^2+4k=k(-3k+4)\geqslant 0$. Для натуральных k последнее неравенство имеет только при $k=1$. Итак, для того чтобы система из условия задачи имела решения, необходимо, чтобы $k=1$.

Докажем, что при $k=1$ система из условия задачи имеет целочисленные попарно различные решения. При $k=1$ корни уравнения (3) равны 1 и 2; значит, могут представиться только две возможности: либо 1) $a=1$, $b=2$, либо 2) $a=2$, $b=1$. Для завершения решения достаточно показать, что, например, в случае 1) система (1) имеет целочисленные попарно различные решения $(x;y;z)$, а значит, такие решения имеет и система из условия задачи.

В случае 1) имеем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y+z}{y^2+z+x}=1, \\ \dfrac{y^2+z+x}{z^2+x+y}=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y+z=y^2+z+x, \\ y^2+z+x=2(z^2+x+y) \end{cases} \iff \begin{cases} (x-y)(x+y-1)=0, \\ y^2-2y-x=2z^2-z. \end{cases}$$

Поскольку для искомых решений $x\neq y$, то первое уравнение примет вид: $x+y=1$, а последняя система перепишется в виде

$$\begin{cases} x+y=1, \\ y^2-y=2z^2-z+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=1, \\ (y-2)(y+1)=(z-1)(2z+1). \end{cases}$$

Второе уравнение последней системы выполняется, например, если

$$\begin{cases} y-2=z-1, \\ y+1=2z+1 \end{cases} \iff \begin{cases} y=z+1, \\ z+2=2z+1 \end{cases} \iff \begin{cases} y=2, \\ z=1. \end{cases}$$

Тогда $x=1-y=1-2=-1$. Таким образом, тройка $(x;y;z)=(-1;2;1)$ доставляет решение системы из условия задачи при $k=1$ в целых попарно различных числах.

Замечание. В случае $k=1$ найденные (далеко не единственные) значения x, y и z достаточно просто указать, не описывая способ их нахождения.

10.3. Ответ: $f(x)=ax^2$, где a — любое действительное число.

Так как по условию равенство

$$f(x+xy)=f(x)(2y+1)+f(xy) \tag{1}$$

выполнено при всех действительных x и y, то, подставляя в него $x=1$, получим, что при любом действительном y имеет место равенство $f(y+1)=f(1)(2y+1)+f(y)$, или, переобозначая в нём y через x, что

$$f(x+1)=f(1)(2x+1)+f(x) \tag{2}$$

при всех действительных x.

Далее, подставляя в равенство (1) $y = 1/x$, получим $f(x+1) = f(x)\Big(\dfrac{2}{x}+1\Big) + f(1)$ для любого $x \neq 0$. Сравнивая это равенство с равенством (2), находим

$$f(1)(2x+1) + f(x) = f(x)\Big(\frac{2}{x}+1\Big) + f(1) \quad \Longrightarrow \quad 2xf(1) = \frac{2}{x}f(x) \quad \Longrightarrow \quad f(x) = f(1)x^2$$

при всех $x \neq 0$. Обозначив $f(1) = a$, получим $f(x) = ax^2$ для любого $x \neq 0$. Поскольку при $y = 0$ из (1) получаем $f(x) = f(x) + f(0)$, то $f(0) = 0$. Следовательно, $f(x) = ax^2$ для любого действительного x.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что для всякого $a \in \mathbb{R}$ функция $f(x) = ax^2$ действительно удовлетворяет равенству (1) при всех действительных x и y.

10.4. Ответ: 7.

Отметим вначале, что из трёх отрезков с длинами $a \leqslant b \leqslant c$ можно составить остроугольный треугольник, если и только если $c^2 < a^2 + b^2$. Действительно, в одну сторону: если треугольник со сторонами a, b, c остроугольный, то $c^2 < a^2 + b^2$, — утверждение легко вытекает из теоремы косинусов. Пусть теперь $c^2 < a^2 + b^2$. Тогда $c < a + b$, а значит, из отрезков a, b, c можно составить треугольник. Для этого треугольника по теореме косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle(a,b)$, откуда $\cos(a,b) = (a^2 + b^2 - c^2)/2ab > 0$. Значит, угол $\angle(a,b)$ острый, а поскольку сторона c в этом треугольнике не меньше любой другой, то угол $\angle(a,b)$ не меньше любого из двух других углов треугольника. Поэтому этот треугольник является остроугольным. Перейдём к решению задачи.

Докажем, что при $n \geqslant 7$ обязательно найдутся три отрезка, из которых можно составить остроугольный треугольник. Пусть длины данных n отрезков равны $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Так как по условию из любых четырёх из них можно составить (выпуклый) четырёхугольник, то, в частности, четырёхугольник можно составить из отрезков a_1, a_2, a_3 и a_7, а значит,

$$a_7 < a_1 + a_2 + a_3 \tag{1}$$

(длина ломаной, соединяющей концы отрезка, больше длины этого отрезка).

Предположим, что ни из каких трёх из этих $n \geqslant 7$ отрезков нельзя составить остроугольный треугольник. Тогда, в частности, ни из каких трёх из первых семи отрезков a_1, a_2, $\ldots$, a_7 нельзя составить остроугольный треугольник. Значит, должны выполняться неравенства

$$a_1^2 + a_2^2 \leqslant a_3^2, \quad a_2^2 + a_3^2 \leqslant a_4^2, \quad a_3^2 + a_4^2 \leqslant a_5^2, \quad a_4^2 + a_5^2 \leqslant a_6^2, \quad a_5^2 + a_6^2 \leqslant a_7^2. \tag{2}$$

Почленно сложив эти пять неравенств, получим:

$$a_1^2 + 2a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 \leqslant a_7^2. \tag{3}$$

Возведём неравенство (1) в квадрат: $a_7^2 < a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3$. Из этого неравенства и неравенства (3) получаем:

$$a_2^2 + a_4^2 + a_5^2 < 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3. \tag{4}$$

Оценим снизу левую часть неравенства (4), воспользовавшись неравенствами (2):

$$a_2^2 + a_4^2 + a_5^2 \geqslant a_2^2 + (a_2^2 + a_3^2) + (a_3^2 + a_4^2) = a_4^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2 \geqslant$$

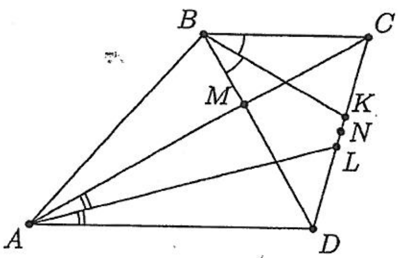
$$\geqslant (a_2^2 + a_3^2) + 2a_2^2 + 2a_3^2 \geqslant 2a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2 \geqslant 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3,$$

— получили противоречие с неравенством (4).

Для завершения решения остаётся лишь привести пример для $n = 6$, когда такие отрезки выбрать нельзя. Возьмём шесть отрезков, длины которых, например, равны 1, 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$. Сумма длин любых трёх из них больше длины любого четвёртого, а значит, из любых четырёх отрезков можно составить четырёхугольник. Однако любые три из них, из которых можно составить треугольник, образуют либо тупоугольный, либо прямоугольный треугольник.

11 класс

11.1. *Первое решение.* Поскольку BK является биссектрисой внутреннего угла CBD в $\triangle CBD$, то по свойству биссектрисы $CK : KD = BC : BD$. Поскольку AL является биссектрисой внутреннего угла DAC в $\triangle DAC$, то, аналогично, $DL : LC = AD : AC$. Пусть точка N — середина CD. Имеем



$$\frac{BC}{BD} = \frac{CK}{KD} = \frac{CN-KN}{ND+KN} = [CN = ND = 0,5CD] =$$

$$= \frac{0,5CD-KN}{0,5CD+KN} = [KN = CN - CK = DN - DL = NL] =$$

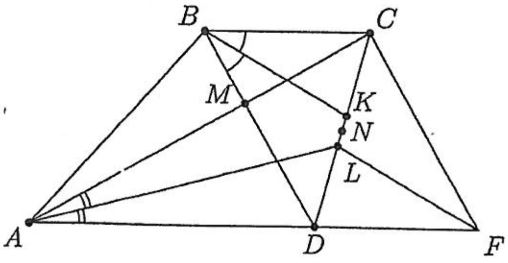
$$= \frac{0,5CD-NL}{0,5CD+NK} = \frac{ND-NL}{NL+NL} = \frac{DL}{LC} = \frac{AD}{AC}. \qquad (1)$$

Далее, $\dfrac{MC}{AC} = \dfrac{S(MCD)}{S(ACD)}$, так как высоты из вершины D у треугольников MCD и ACD на стороны MC и AC равны. Аналогично, $\dfrac{MD}{BD} = \dfrac{S(MCD)}{S(BCD)}$, так как высоты из вершины C у треугольников MCD и BCD на стороны MD и BC равны. Кроме того, $\dfrac{S(ACD)}{S(BCD)} = \dfrac{AD}{BC}$, так как высота из вершины D треугольника BCD равна высоте из вершины C треугольника ACD (и равна высоте трапеции). Следовательно,

$$\frac{MC}{AC} = \frac{S(MCD)}{S(ACD)} = \frac{S(MCD)}{S(BCD)} \cdot \frac{BC}{AD} = \frac{MD}{BD} \cdot \frac{BC}{AD}.$$

Поэтому $\dfrac{MC}{MD} = \dfrac{AC}{BD} \cdot \dfrac{BC}{AD} = [\text{в силу (1)}] = 1$, откуда и следует равенство MC и MD.

Второе решение. Достроим треугольник DBC до параллелограмма $DBCF$, проведя $CF \parallel BD$ до пересечения с AD в точке F. Так как треугольники DBC и CFD центральносимметричны относительно точки N, и BK — биссектриса угла B, то FL — биссектриса угла F. Таким образом, L — точка пересечения биссектрис треугольника ACF. Поэтому CD — тоже биссектриса, и тогда $\angle ACD = \angle FCD = \angle BDC$, т.е. треугольник DMC равнобедренный, $MD = MC$.



11.2. Ответ: $f(x) = a\sin x$, где a — любое действительное число.

Подставляя $y = 0$ в исходное равенство

$$f(x+y) = f(x)\cos y + f(y)\cos x, \tag{1}$$

находим, что при любом действительном x имеет место равенство $f(x) = f(x) + f(0)\cos x$, откуда $f(0) = 0$. Подставляя в (1) $y = x$, получим $f(2x) = 2f(x)\cos x$, откуда

$$f(\pi) = f(2\cdot\pi/2) = 2f(\pi/2)\cos(\pi/2) = 0. \tag{2}$$

Далее, подставляя в (1) $y = \pi$, получаем $f(x+\pi) = f(x)\cos\pi + f(\pi)\cos x =$ [см. (2)] $= -f(x)$ при всех действительных x.

Окончательно,

$$f(x) = -f(x+\pi) = -f((x+\pi/2)+\pi/2) =$$

$$= -f(x+\pi/2)\cos(\pi/2) - f(\pi/2)\cos(x+\pi/2) = -f(x+\pi/2)\cdot 0 + f(\pi/2)\sin x = f(\pi/2)\sin x$$

при всех действительных x. Значит, обозначив $f(\pi/2) = a$, получим, что $f(x) = a\sin x$ при всех действительных x.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что для всякого $a \in \mathbb{R}$ функция $f(x) = a\sin x$ действительно удовлетворяет равенству (1) при всех действительных x и y.

11.3. Ответ: $k+1$.

Напомним, что из трёх отрезков с длинами $a \leqslant b \leqslant c$ можно составить треугольник, если и только если выполняется неравенство $c < a+b$ (неравенство треугольника).

Пусть длины данных отрезков равны $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Так как по условию и любых k из них можно составить (выпуклый) k-угольник, то, в частности, k-угольник можно составить из отрезков $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{k-1}$ и a_n, а значит,

$$a_n < a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} \tag{*}$$

(длина ломаной, соединяющей концы отрезка, больше длины этого отрезка). Докажем, что при $n \geqslant k+1$ обязательно найдутся три отрезка, образующих треугольник. Предположим противное. Тогда для любых трёх из этих отрезков должны выполняться неравенства, противоположные неравенству треугольника; в частности: $a_1 + a_2 \leqslant a_3,\ a_2 + a_3 \leqslant a_4,\ \ldots,\ a_{n-2} + a_{n-1} \leqslant a_n$. Сложим эти $n-2$ неравенств: $a_1 + 2a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} \leqslant a_n$. Но согласно неравенству (*) $a_n < a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}$. Видим, что при $n \geqslant k+1$ это приводит к противоречию.

Для завершения решения остаётся только привести пример для $n = k$, когда такие отрезки выбрать нельзя. Возьмём k отрезков, длины которых, например, равны $1,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ F_k$, где F_m - m-ое по счёту число Фибоначчи. Поскольку $1 + 1 + \ldots + F_{k-1} > F_k$ при $k \geqslant 4$, то из этих отрезков можно составить выпуклый k-угольник. С другой стороны, очевидно, что ни для каких трёх из этих отрезков неравенство треугольника не выполняется, а значит, ни из каких трёх из них составить треугольник нельзя.

11.4. Ответ: 23.

Покрасим доску в шахматном порядке (см. рис. 1). Тогда всякая T-образная плитка накрывает либо 3 белых и 1 чёрную клетку (обозначим число участвующих в замощении таких плиток через a), либо 3 чёрных и 1 белую клетку (обозначим число участвующих в замощении таких плиток через b). Пусть c — число L-образных плиток, участвующих в замощении; очевидно, что каждая такая плитка накрывает 2 белых и 2 чёрных клетки доски.

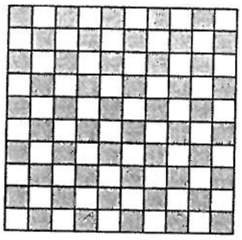


Рис. 1

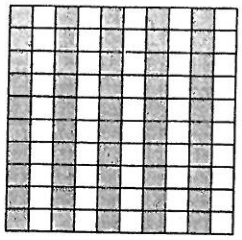


Рис. 2

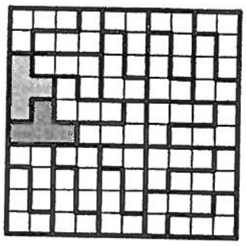


Рис. 3

Тогда общее число белых клеток на доске (оно равно $0,5 \cdot 10^2 = 50$) можно записать как $3a + b + 2c$, а общее число чёрных клеток – как $3b + a + 2c$. Получаем $3a + b + 2c = = 50 = a + 3b + 2c$, откуда $a = b$. В частности, число T-образных плиток на доске $a + b$ чётно.

Теперь рассмотрим другую раскраску доски — полосатую (см. рис. 2). Легко видеть, что любая L-образная плитка накрывает либо 3 белых и 1 чёрную клетку (пусть таких плиток d штук), либо 3 чёрные и 1 белую клетку (пусть таких плиток f штук). Допустим, что в замощении нет ни одной T-образной плитки. Тогда $d + f = 100/4 = 25$. Далее, общее число белых клеток в таком замощении равно $50 = 3d + f = 2d + (d + f) = 2d + 25$, откуда $2d = 25$ — противоречие.

Таким образом, число T-образных плиток в замощении (так как оно чётное) не меньше двух. Поэтому общее число L-образных плиток не более $25 - 2 = 23$. Пример на рисунке 3 показывает, что это число может быть равно 23.

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В.А. БУДКЕВИЧ

17 декабря 2013 г.

LXIV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

13 – 17 января 2014 года

8 класс

Второй день

5. Некоторый предприниматель решил разводить рыбу в трех прудах, в которых до этого рыбы не было. С этой целью он запустил в первый и третий пруды по 2 тонны мальков, а во второй пруд — 1 тонну. Через месяц он выловил для продажи 2 тонны подросшей рыбы из первого пруда, еще через месяц — 1 тонну из второго пруда, а еще через месяц — всю рыбу, оставшуюся во всех трех прудах.

Сколько всего рыбы он выловил в последний раз, если в этот самый раз из третьего пруда ее было выловлено на 2 тонны больше, чем из первых двух вместе?

(Считать, что масса рыбы увеличивается равномерно.)

6. В треугольнике ABC на стороне AC отмечена точка K, а на стороне BC – точка L так, что $\angle KBC = 10°$ и $\angle LAC = 20°$.

Найдите величину угла ALK, если известно, что $\angle BCA = 40°$ и $\angle BAC = 80°$.

7. Натуральное число n имеет ровно шесть нетривиальных (т. е. отличных от 1 и n) делителей. Сумма этих шести делителей равна 735.

Найдите все возможные значения числа n.

8. На столе в ряд расположены 100 шаров, пять из которых зелёные, а остальные – синие. Петя и Вася играют в следующую игру. Каждый из них по очереди берёт себе один из крайних шаров. Игра заканчивается, когда на столе не останется зелёных шаров, и выигрывает тот из мальчиков, у кого зелёных шаров окажется больше. Первым начинает ходить Петя.

Докажите, что Петя может обеспечить себе выигрыш при любом исходом расположении шаров.

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 4,5 часа

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В.А. БУДКЕВИЧ

17 декабря 2013 г.

LXIV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

13 – 17 января 2014 года

9 класс
Второй день

5. Натуральное число n имеет ровно шесть нетривиальных (т. е. отличных от 1 и n) делителей. Сумма этих шести делителей равна 1225.

Найдите все возможные значения числа n.

6. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Пусть точки I_1, I_2 и I_3 – центры окружностей, вписанных в треугольники AB_1C_1, BC_1A_1 и CA_1B_1 соответственно.

Найдите углы треугольника $I_1I_2I_3$, если $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ и $\angle C = \gamma$.

7. Положительные действительные числа a, b и c удовлетворяют неравенствам $a \leqslant b \leqslant c$.

Докажите, что справедливо неравенство

$$\frac{b}{a+c}\left(\frac{b+c}{a}+\frac{a+b}{c}\right)+\frac{a+c}{b}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{c}{a+b}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{b+c}{a}+\frac{a+b}{c}\right)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{c}{a+b}\right).$$

8. Можно ли каждую точку плоскости покрасить в один из двух цветов – синий или красный – так, чтобы

а) на любой прямой точек каждого цвета было бесконечно много?

б) на любой прямой имеются точки красного цвета, и их не более трёх?

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В.А. БУДКЕВИЧ

17 декабря 2013 г.

LXIV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

13 – 17 января 2014 года

10 класс

Второй день

5. Найдите все натуральные числа n, удовлетворяющие одновременно двум условиям:

1) у числа n есть не менее трёх различных натуральных делителей (в число делителей входит 1 и само число n),

2) сумма трёх наибольших делителей числа n равна 627.

6. Найдите все значения параметров a и b, при которых многочлен $x^4 - x^3 + (a+b-2)x^2 + (b-2a)x + ab$ имеет четыре действительных корня, образующих геометрическую прогрессию.

7. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке X. Пусть I_1, I_2, I_3 и I_4 – центры вписанных окружностей треугольников $\triangle ABX$, $\triangle CDX$, $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$ соответственно, а точка L – середина той дуги $\smile AD$ описанной окружности четырёхугольника, которая не содержит точек B и C.

Докажите, что треугольники $\triangle LI_1I_2$ и $\triangle LI_3I_4$ подобны.

8. На столе в ряд расположен 101 шар, пять из них зелёные, а остальные – синие; причём оба крайних шара – синие. Петя и Вася играют в следующую игру. Каждый из них по очереди берёт себе один из крайних шаров. Игра заканчивается, когда на столе не останется зелёных шаров, и выигрывает тот из мальчиков, у кого зелёных шаров окажется больше. Первым начинает ходить Петя.

а) Докажите, что Вася может обеспечить себе выигрыш независимо от игры Пети.

б) Может ли Петя обеспечить себе выигрыш, если ровно один из крайних шаров зелёный, каково бы ни было расположение остальных зелёных шаров?

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В.А. БУДКЕВИЧ

17 декабря 2013 г.

LXIV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

13 – 17 января 2014 года

11 класс

Второй день

5. Найдите все натуральные числа n, удовлетворяющие одновременно двум условиям:

1) у числа n есть не менее трёх различных натуральных делителей (включая 1 и само n),

2) сумма двух наибольших делителей числа n в 30 раз больше суммы трёх наименьших делителей.

6. Докажите, что при любых положительных a, b, c верно неравенство

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+3 \geqslant 4\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+b}\right).$$

7. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке X. Пусть I_1, I_2, I_3 и I_4 – центры вписанных окружностей треугольников $\triangle ABX$, $\triangle CDX$, $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$ соответственно.

Докажите, что прямые I_1I_2 и I_3I_4 параллельны.

8. На окружности расположен 101 шар. Два игрока A и B играют в следующую игру. Вначале игрок B красит три шара в красный цвет, а остальные — в зеленый. Далее игроки по очереди берут шары. Сначала игрок A на первом ходу берет любой шар, в результате чего окружность разрывается и остальные шары выстраиваются в ряд; каждым следующим ходом игрок может взять любой из крайних шаров. Игра закончена, когда не осталось ни одного красного шара, и выигрывает тот игрок, у которого красных шаров оказалось больше.

Кто из игроков выигрывает, если оба играют наилучшим образом?

Пользоваться калькулятором не разрешается.

Время работы: 5 часов

LXIV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

13 — 17 января 2014 года

Решения

Второй день

8 класс

8.5. Ответ: 30 тонн.

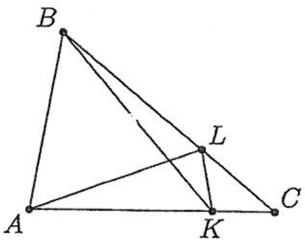
По условию масса рыбы увеличивается равномерно. Пусть за месяц она увеличивается в x раз. Тогда к концу третьего месяца в первом пруде было $(2x-2)x^2$, во втором пруде $(1\cdot x^2-1)x$, а в третьем $2x^3$ тонн рыбы. Согласно условию $(2x-2)x^2+(x^2-1)x = 2x^3-2$. После упрощения получим

$$x^3-2x^2-x+2=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2(x-2)-(x-2)=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-2)(x^2-1)=0,$$

откуда $x=2$ (два других корня 1 и -1 не подходят по смыслу). Итак, за месяц масса рыбы увеличивается в 2 раза. В результате, в последний раз из третьего пруда было выловлено $2\cdot 2^3 = 16$ тонн, а тогда из первых двух вместе было выловлено $16-2=14$ тонн. Таким образом, всего из всех прудов в последний раз было выловлено $16+14=30$ тонн рыбы.

8.6. Ответ: $\angle AKL = 80°$.

Из $\triangle ABC$ по условию $\angle ABC = 180° - \angle BCA - \angle BAC = 180° - 40° - 80° = 60°$. Заметим, что $\angle AKB = \angle KBC + \angle BCK = \angle KBC + \angle BCA = 10° + 40° = 50°$ как внешний угол $\triangle BCK$. Тогда из $\triangle ABK$ находим



$$\angle ABK = 180° - \angle BAK - \angle AKB = 180° - \angle BAC - \angle AKB =$$
$$= 180° - 80° - 50° = 50° = \angle AKB.$$

Следовательно, $\triangle ABK$ равнобедренный: $AK = AB$.

Далее, из $\triangle ABL$ находим

$$\angle ALB = 180° - \angle ABL - \angle BAL = 180° - (\angle ABK + \angle KBL) - (\angle BAC - \angle LAC) =$$
$$= 180° - (50° + 10°) - (80° - 20°) = 60° = \angle ABC = \angle ABL.$$

Поэтому $\triangle BAL$ также равнобедренный: $AB = AL$. Таким образом, $AK = AB = AL$, т. е. в $\triangle KAL$ стороны AK и AL равны, а значит, равны и его углы $\angle AKL = \angle ALK$. Тогда

$$\angle ALK = 0,5(\angle ALK + \angle AKL) = 0,5(180° - \angle LAK) = 0,5(180° - \angle LAC) = 80°.$$

8.7. Ответ: 824.

Напомним вначале следующее несложно доказываемое утверждение, которое должно быть хорошо известно каждому школьнику, участвующему в математических олимпиадах: если $n = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение натурального числа n на простые множители (т. е. p_1, p_2, …, p_k — простые, а числа α_1, α_2, …, α_k — натуральные), то количество различных делителей числа n (включая 1 и само n) равно $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)$. Перейдём к решению задачи.

Как следует из условия, количество всех различных делителей числа n равно 8, а значит, вследствие приведённой выше формулы для числа делителей, количество различных простых, на которые делится n, не может превышать трёх. Тогда легко видеть, что разложение числа n на простые множители может быть только одного из следующих видов: либо а) $n = p^7$, где p — простое число, либо б) $n = p^3q$, где p и q — различные простые числа, либо в) $n = pqr$, где p, q и r — различные простые числа.

В случае а) согласно условию получаем равенство $p+p^2+p^3+p^4+p^5+p^6 = 735$, которое не может выполняться ни при каких целых p, поскольку его левая часть — число чётное.

В случае б) получим равенство $p+p^2+p^3+q+pq+p^2q = 735$, или, раскладывая его левую часть на множители,

$$(1+p+p^2)(p+q) = 735. \tag{1}$$

Так как число 735 нечётно, то и любой его делитель нечётен. В частности, в силу (1) сомножитель $p+q$ — нечётное число. Следовательно, либо $p = 2$, либо $q = 2$. При $p = 2$ из равенства (1) находим $q = 103$ и в результате $n = 2^3 \cdot 103 = 824$. При $q = 2$ равенство (1) примет вид $(1+p+p^2)(p+2) = 3 \cdot 5 \cdot 7^2$. Тогда либо $p+2 = 3$ (но тогда $p = 1$ — не простое число), либо $p+2 = 5$ (но тогда $1+p+p^2 = 13$ — не удовлетворяет равенству (1)), либо $p+2 = 7$ (но тогда $1+p+p^2 = 31$ — не удовлетворяет равенству (1)), либо, наконец, $p+2 \geqslant 15$ — тогда левая часть равенства (1) принимает значение, большее 735.

В случае в) согласно условию

$$p+q+r+pq+pr+qr = 735. \tag{2}$$

Равенство (2) невозможно, если все три простые числа p, q и r являются нечётными (тогда его левая часть — число чётное). Следовательно, одно из них равно 2. Поскольку левая часть равенства (2) не изменяется при любой перестановке p, q, r местами, то без нарушения общности считаем, что $p = 2$. Тогда (2) примет вид

$$2+q+r+2q+2r+qr = 735 \iff qr+3q+3r+9 = 742 \iff (q+3)(r+3) = 2 \cdot 371.$$

Но, так как простые q и r отличны от $p = 2$, то q и r нечётны, а значит, $q+3$ и $r+3$ — оба чётные. Но тогда равенство (2) невозможно.

8.8. Перенумеруем лежащие на столе шары последовательно числами от 1 до 100 (например, слева направо). Шары, стоящие на чётных местах, назовём чётными, а на нечётных — нечётными. Укажем выигрышную стратегию Пети. Вначале он подсчитывает число m чётных зелёных шаров и число n нечётных зелёных шаров. Поскольку перед каждым ходом Пети один из крайних шаров чётный, а другой — нечётный, то он на каждом своём ходу может брать себе всегда либо чётный, либо нечётный шар. Поэтому выигрышная стратегия Пети следующая. Если $m > n$, он всегда на своём ходу берёт чётный шар, а тогда Васе остаётся только брать нечётный шар. В результате все чётные шары, а значит, и все чётные зелёные шары, окажутся у Пети, и он выиграет. Если же $m < n$, то Петя всегда берёт нечётный шар, а тогда Васе остаётся брать только чётный шар. В результате все нечётные шары, а значит, и все нечётные зелёные шары, окажутся у Пети, и он выиграет.

9 класс

9.5. Ответ: 1384, 1510 и 2014.

Отметим вначале следующее несложно доказываемое утверждение, которое должно быть хорошо известно каждому школьнику, участвующему в математических олимпиадах: если $n =$

$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение натурального числа n на простые множители (т. е. $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — простые, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — натуральные), то количество различных делителей числа n (включая 1 и само n) равно $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)$. Перейдём к решению задачи.

Как следует из условия, количество всех различных делителей числа n равно 8, а значит, вследствие приведённой выше формулы для числа делителей количество различных простых, на которые делится n, не может превышать трёх. Тогда легко видеть, что разложение числа n на простые множители может быть только одного из следующих видов: либо а) $n = p^7$, где p — простое число, либо б) $n = p^3 q$, где p и q — различные простые числа, либо в) $n = pqr$, где p, q и r — различные простые числа.

В случае а) согласно условию получаем равенство $p+p^2+p^3+p^4+p^5+p^6 = 1225$, которое не может выполняться ни при каких целых p, поскольку его левая часть — число чётное.

В случае б) получим $p+p^2+p^3+q+pq+p^2q = 1225$, или, раскладывая левую часть этого равенства на множители,

$$(1+p+p^2)(p+q) = 5^2 \cdot 7^2. \qquad (1)$$

Так как число $5^2 \cdot 7^2$ нечётно, то и любой его делитель нечётен. В частности, в силу (1) сомножитель $p+q$ — нечётное число. Следовательно, либо $p=2$, либо $q=2$. В первом случае получаем: $1+p+p^2=7$, а тогда из (1) находим $2+q=175$ откуда $q=173$ (простое число). Это даёт решение $n = 2^3 \cdot 173 = 1384$. При $q=2$, учитывая, что тогда $(p+q) < (1+p+p^2)$, достаточно рассмотреть три случая $p+2$ равно 5, 7 или 25. Во всех этих случаях, как легко убедиться, решений нет.

В случае в) согласно условию

$$p+q+r+pq+pr+qr = 1225 \qquad (2)$$

Это равенство невозможно, если все три простые числа p, q и r являются нечётными (тогда левая часть этого равенства — число чётное). Следовательно, одно из них равно 2. Поскольку левая часть равенства (2) не изменяется при любой перестановке p, q, r местами, то без нарушения общности считаем, что $p=2$. Тогда равенство (2) примет вид

$$2+q+r+2q+2r+qr = 1225 \iff qr+3q+3r+9 = 1232 \iff (q+3)(r+3) = 2^4 \cdot 7 \cdot 11.$$

Так как простые q и r нечётные (поскольку отличны от $p=2$), то $q+3$ и $r+3$ чётные, не меньшие 6, и без ограничения общности можно считать, что $q+3 < r+3$. Тогда достаточно рассмотреть четыре случая: $q+3$ равно 8, 14, 22 или 28. При $q+3=8$ получаем $r+3=154$, и тогда $q=5$, $r=151$ (простые числа). Это даёт решение $n = 2 \cdot 5 \cdot 151 = 1510$. Ещё одно решение получим при $q+3=22$, а именно, $r+3=56$, т. е. $q=19$ и $r=53$. В этом случае $n = 2 \cdot 19 \cdot 53 = 2014$. В оставшихся двух случаях, как легко убедиться, решений в простых числах нет.

9.6. Ответ: $45^\circ + \dfrac{\alpha}{4}$, $45^\circ + \dfrac{\beta}{4}$, $45^\circ + \dfrac{\gamma}{4}$.

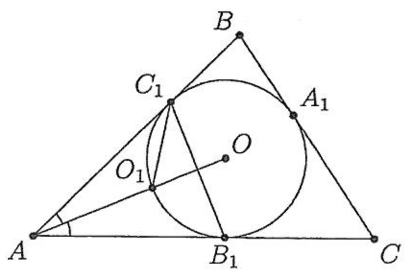


Рис. 1

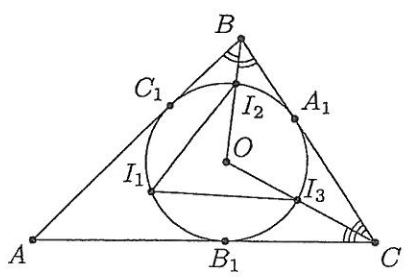


Рис. 2

Пусть O — центр окружности ω, вписанной в $\triangle ABC$. Тогда AO — биссектриса угла $\angle BAC$. Пусть O_1 — точка пересечения биссектрисы AO с окружностью ω (см. рис. 1). Так как $\triangle AC_1O = \triangle AB_1O$ (по двум сторонам: $AC_1 = AB_1$ как отрезки касательных, а сторона AO общая, — и углу между ними $\angle OAC_1 = \angle OAB_1$), то $\angle O_1OC_1 = \angle O_1OB_1$. Следовательно, дуги $\smile C_1O_1$ и $\smile O_1B_1$, на которые опираются эти центральные углы окружности ω, равны, т. е. $\smile C_1O_1 = \smile O_1B_1$. Поэтому $\angle AC_1O_1 = \dfrac{1}{2}\smile C_1O_1 = \dfrac{1}{2}\smile O_1B_1$ (как угол между касательной AC_1 и хордой C_1O_1) и $\angle O_1C_1B_1 = \dfrac{1}{2}\smile O_1B_1$ (как вписанный угол опирающийся на дугу O_1B_1). Поэтому $\angle AC_1O_1 = \angle O_1C_1B_1$, т. е. C_1O_1 — биссектриса $\angle AC_1B_1$. Следовательно, O_1 — точка пересечения биссектрис треугольника AB_1C_1, и, значит, центр I_1 её вписанной окружности. Иными словами, центр I_1 вписанной окружности $\triangle AB_1C_1$ лежит на вписанной окружности $\triangle ABC$ и совпадает с точкой O_1. Аналогично, центры I_2 и I_3 вписанных окружностей треугольников BC_1A_1 и CA_1B_1 также лежат на вписанной окружности $\triangle ABC$ (см. рис. 2) и совпадают с точками пересечения биссектрис углов $\angle ABC$ и $\angle BCA$ соответственно и окружности ω. Теперь заметим, что $\angle BOC = 180^\circ - (\angle OBC + \angle OCB) = 180^\circ - \left(\dfrac{1}{2}\angle ABC + \dfrac{1}{2}\angle ACB\right) = = 180^\circ - \dfrac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 180^\circ - \dfrac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC) = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$. Стало быть, в окружности ω центральный угол $\angle I_2OI_3 = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$. А тогда вписанный угол $\angle I_2I_1I_3 = = \dfrac{1}{2}\angle I_2I_1I_3 = 45^\circ + \dfrac{\alpha}{4}$. Аналогично, $\angle I_1I_2I_3 = 45^\circ + \dfrac{\beta}{4}$ и $\angle I_1I_3I_2 = 45^\circ + \dfrac{\gamma}{4}$.

9.7. Так как по условию $0 < a \leqslant b \leqslant c$, то верны неравенства $0 < a + b \leqslant a + c \leqslant b + c$, а значит, и неравенства

$$0 < \frac{a}{b+c} \leqslant \frac{b}{a+c} \leqslant \frac{c}{a+b}. \tag{1}$$

Обозначим

$$\frac{a}{b+c} = k, \quad \frac{b}{a+c} = m, \quad \frac{c}{a+b} = n.$$

В этих обозначениях неравенства (1) запишутся как

$$0 < k \leqslant m \leqslant n, \tag{2}$$

а доказываемое неравенство примет вид

$$m\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{m}(k+n) \leqslant \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n}\right)(k+n). \tag{3}$$

Приводя в неравенстве (3) дроби в каждой из двух скобок к общему знаменателю, получим равносильное неравенство

$$m\frac{k+n}{kn} + \frac{k+n}{m} \leqslant \frac{(k+n)^2}{kn}.$$

Перенеся дробь из правой части последнего неравенства в его левую часть и приве[illegible] в получившемся неравенстве дроби к общему знаменателю, получим равносильное (3) неравенство

$$\frac{(k+n)(m^2 - km - nm + kn)}{kmn} \leqslant 0 \iff \frac{(k+n)(m-k)(m-n)}{kmn} \leqslant 0.$$

Справедливость же последнего неравенства вследствие неравенств (2) очевидна. Неравенство (3), а значит, и нужное неравенство, доказано.

9.8. Ответ: а) да, можно; б) да, можно.

а) Отметим на плоскости какую-либо точку O и для каждого $k \in \mathbb{N}$ через ω_k обозначим окружность с центром в точке O и радиуса k. Покрасим все точки окружностей ω_k с нечётными номерами k в синий цвет, а все точки окружностей ω_k с чётными номерами k — в красный (цвет точек, не принадлежащих этим окружностям, для нас безразличен; для определённости можно считать их красными). Любая прямая пересекает бесконечно много окружностей ω_k, $k \in \mathbb{N}$: действительно, если r — расстояние от точки O до некоторой прямой ℓ, то эта прямая ℓ пересекает все окружности ω_k, номера k которых больше r (см. рис. 1). Поэтому при такой раскраске точек плоскости на любой прямой, лежащей в этой плоскости, имеется бесконечно много как синих, так и красных точек.

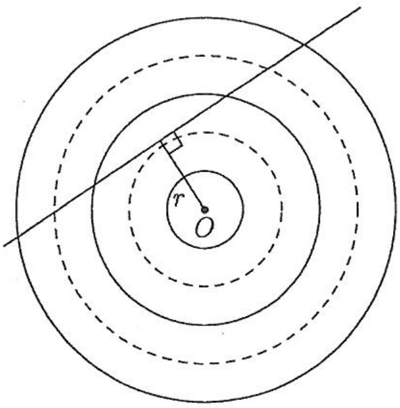


Рис. 1

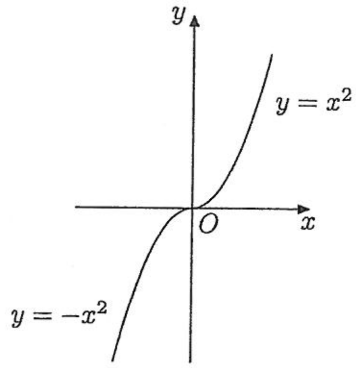


Рис. 2

б) Зададим функцию $f(x)$ равенством:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если} \quad x \geqslant 0, \\ -x^2, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Введём на плоскости какую-либо прямоугольную систему координат Oxy и покрасим все точки $(x, f(x))$, $x \in \mathbb{R}$, (т. е. все точки графика функции $y = f(x)$) в красный цвет, а все остальные точки плоскости — в синий (см. рис. 2). Геометрически очевидно, что при такой раскраске на любой прямой имеются красные точки, число которых не превосходит трёх. Докажем этот факт строго.

Так как любая прямая, параллельная оси ординат, пересекает график функции (как и любой функции с областью определения $\mathbb{R}$) $y = f(x)$ ровно в одной точке, то на любой такой прямой имеется только одна красная точка. Поэтому остаётся доказать, что для указанной раскраски на любой прямой, не параллельной оси ординат, имеются красные точки и их не более трёх. Это равносильно тому, что уравнение

$$f(x) = ax + b \qquad (*)$$

при любых a, $b \in \mathbb{R}$, имеет решения и их число не более трёх. Вследствие определения функции $f(\cdot)$ уравнение $(*)$ равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - ax - b = 0, \\ x \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + ax + b = 0, \\ x < 0. \end{cases} \end{array} \right. \qquad (**)$$

Докажем, что уравнение $(*)$, или, что то же, совокупность $(**)$, имеет решения. Допустим, что это не так. Это означает, что уравнение $x^2 - ax - b = 0$ не имеет неотрицательных корней, а уравнение $x^2 + ax + b = 0$ — отрицательных корней, а для этого, поскольку левые части этих уравнений квадратные трёхчлены с положительным старшим коэффициентом, необходимо, чтобы их свободный член был бы соответственно положителен и неотрицателен, т. е. чтобы выполнялись соответственно неравенства: $-b > 0$ и $b \geqslant 0$, — противоречие. Значит, на любой прямой имеются красные точки.

Докажем теперь, что уравнение $(*)$, или, что то же, совокупность $(**)$, имеет не более трёх решений. Ясно, что более четырёх решений эта совокупность иметь не может. Если бы решений было четыре, то уравнение $x^2 - ax - b = 0$ имело бы два неотрицательных корня, а уравнение $x^2 + ax + b = 0$ — два отрицательных корня. Тогда по теореме Виета получили бы соответственно: $-b \geqslant 0$ и $b > 0$ — противоречие. Поэтому уравнение $(*)$ имеет не более трёх решений, т. е., другими словами, число красных точек на любой прямой не более трёх.

Замечание. Отметим, что решение п. **б)** задачи можно было бы изложить короче: достаточно было бы покрасить в красный цвет точки графика кубической параболы $y = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, и затем воспользоваться тем, что кубическое уравнение с действительными коэффициентами всегда имеет действительный корень и число его корней не превосходит трёх. Хотя два последних утверждения общеизвестны и их часто используют в решении олимпиадных задач, тем не менее, аккуратное доказательство этих утверждений выходит за рамки школьной программы.

10 класс

10.5. Ответ: 342

Пусть p — наименьший простой делитель числа n. Могут представиться только два случая.

а) Три наименьших делителя числа n — это числа 1, p, p^2. Тогда тремя наибольшими делителями числа n являются n, $\frac{n}{p}$ и $\frac{n}{p^2}$. По условию получаем $n + \frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} = \frac{n}{p^2}(p^2 + p + 1) = 627 = 3 \cdot 11 \cdot 19$. Получаем, что число $p^2 + p + 1$ (заметим, что оно больше 3) является делителем числа $3 \cdot 11 \cdot 19$. Следовательно, $p^2 + p + 1$ равно либо 11, либо 19, либо 33, либо $209 = 11 \cdot 19$, либо $57 = 3 \cdot 19$, либо 627. В случае $p^2 + p + 1 = 57$ имеем $p = 7$, и тогда $\frac{n}{7^2} = 11$, откуда $n = 49 \cdot 11 = 539$. Во всех остальных случаях возникающее квадратное уравнение относительно p не имеет решений не только в простых, но даже и в целых числах. Легко проверить, что число $n = 539$ действительно не удовлетворяет условию задачи.

б) Три наименьших делителя числа n — это числа 1, p, q, ($p < q$). Считая q наименьшим из таких простых чисел, получаем, что тогда три наибольших делителя числа n — это числа n, $\frac{n}{p}$ и $\frac{n}{q}$. Поэтому по условию $n + \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = \frac{n}{pq}(pq + p + q) = 627 = 3 \cdot 11 \cdot 19$. Таким образом, число $pq + p + q$ есть один из делителей числа $3 \cdot 11 \cdot 19$. Учитывая, что $pq + p + q \geqslant 2 \cdot 3 + 2 + 3 = 11$, имеем либо 1) $pq + p + q = 11$ (т. е. $(p + 1)(q + 1) = 12$, и тогда $p = 2$, $q = 3$), либо 2) $pq + p + q = 19$ (т. е. $(p + 1)(q + 1) = 20$, чего не может быть для простых p и q), либо 3) $pq + p + q = 33$ (т. е. $(p + 1)(q + 1) = 34 = 2 \cdot 17$, чего снова не может быть для простых p и q), либо 4) $pq + p + q = 3 \cdot 19 = 57$ (т. е. $(p + 1)(q + 1) = 58 = 2 \cdot 29$, чего также не может быть для простых p и q), либо 5) $pq + p + q = 11 \cdot 19 = 209$ (т. е. $(p + 1)(q + 1) = 210$, откуда $p + 1 = 3$ и $q + 1 = 70$, что невозможно, так как $q = 69$ — не простое число), или же $p + 1$ и $q + 1$ — чётные числа (так как $q > p > 2$) и тогда $210 \vdots 4$ — противоречие, либо $pq + p + q = 627$, т. е. $(p + 1)(q + 1) = 628 = 4 \cdot 157$, что не возможно при простых p и q. Остался случай 1) $p = 2$, $q = 3$, приводящий к уравнению $\frac{n}{2 \cdot 3}(2 \cdot 3 + 2 + 3) = 627$, откуда $n = 342$. Проверка показывает, что число $n = 342$ удовлетворяет условию задачи.

10.6. Ответ: $a=\dfrac{4}{25}$, $b=\dfrac{16}{25}$.

Первое решение. Заметим, что

$$f(x)=x^4-x^3+(a+b-2)x^2+(b-2a)x+ab=(x^2+x+a)(x^2-2x+b)$$

и обозначим квадратные трёхчлены $g(x)=x^2+x+a$ и $h(x)=x^2-2x+b$. Так как по условию корни многочлена $f(x)$ образуют геометрическую прогрессию, то их можно обозначить c, cq, cq^2 и cq^3. Какие-то два из этих чисел корни многочлена $g(x)$, а оставшиеся два — корни многочлена $h(x)$. рассмотрим все возможные случаи.

1. Пусть c и cq — корни одного из квадратных трёхчленов $g(x)$ или $h(x)$, а cq^2 и cq^3 — корни другого. Тогда, учитывая формулы Виета, имеем: либо $c+cq=-1$ и $cq^2+cq^3=2$, либо $c+cq=2$ и $cq^2+cq^3=-1$. Значит, $q^2=\dfrac{cq^2+cq^3}{c+cq}$ равен соответственно либо -2, либо $-\dfrac{1}{2}$, что невозможно.

2. Пусть c и cq^2 — корни $g(x)$, а cq и cq^3 — корни $h(x)$. Тогда, аналогично предыдущему случаю, $q=\dfrac{cq^3+cq}{cq^2+c}=\dfrac{2}{-1}=-2$. Получаем, что корни $g(x)$ — это c и $4c$, а корни $h(x)$ — это $-2c$ и $-8c$. Значит, $c+4c=-1$, откуда $c=-\dfrac{1}{5}$, и тогда $a=c\cdot 4c=4c^2=\dfrac{4}{25}$, $b=(-2c)\cdot(-8c)=16c^2=\dfrac{16}{25}$.

Проверка показывает, что для найденных значений a и b условие задачи выполняется.

Случай, когда cq и cq^3 — корни $g(x)$, а c и cq^2 — корни $h(x)$, сводится к только что разобранному случаю (достаточно записать прогрессию в обратном порядке) и приводит к тому же ответу.

3. Пусть c и cq^3 — корни $g(x)$, а cq и cq^2 — корни $h(x)$. Тогда $c+cq^3=-1$ и $cq+cq^2=2$, и поэтому $-\dfrac{1}{2}=\dfrac{c+cq^3}{cq+cq^2}=\dfrac{q^2-q+1}{q}$, или $q^2-q+1=-\dfrac{1}{2}q$, т. е. $q^2-\dfrac{1}{2}q+1=0$, что невозможно.

4. Аналогично, случай, когда cq и cq^2 — корни $g(x)$, а c и cq^3 — корни $h(x)$, приводит к равенству $q^2-q+1=-2q$, или $q^2+q+1=0$, что также невозможно.

Окончательно, получаем $a=\dfrac{4}{25}$, $b=\dfrac{16}{25}$.

Второе решение. Приведём также решение, не использующее разложения данного в условии задачи многочлена на квадратные множители. Для этого воспользуемся формулами Виета, связывающими корни x_1, x_2, x_3, x_4 любого многочлена $x^4+px^3+qx^2+sx+t$ с его коэффициентами:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-p,\\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=q,\\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-s,\\ x_1x_2x_3x_4=t \end{cases}$$

(эти формулы получаются, если раскрыть скобки в разложении многочлена на множители $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$ и собрать коэффициенты при одинаковых степенях x).

Применяя формулы Виета в нашем случае (учитывая, что корни можно записать как c, cq, cq^2, cq^3), получим соответственно формулы

$$c(q^3+q^2+q+1)=1, \tag{1}$$

$$c^2(q^3+q)(q^2+q+1)=a+b-2, \tag{2}$$

$$c^3q^3(q^3+q^2+q+1)=2a-b, \tag{3}$$
$$c^4q^6=ab. \tag{4}$$

Разделив почленно равенство (3) на равенство (1), получим также равенство

$$c^2q^3=2a-b. \tag{5}$$

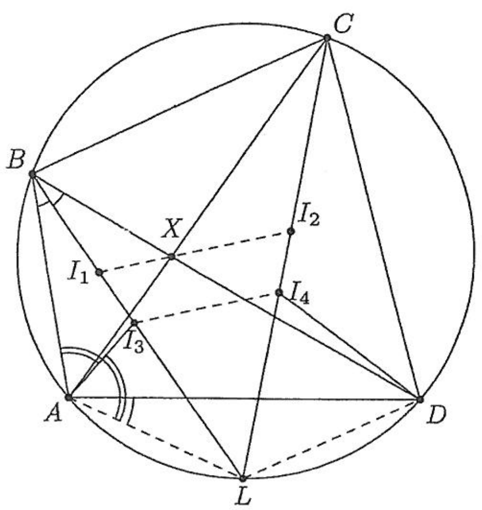
Сравнивая равенства (4) и (5), имеем $ab=(2a-b)^2$, или $b^2-5ab+4a^2=0$, откуда $b=4a$ или $b=a$.

1) Рассмотрим случай $b=4a$. Тогда равенство (5) примет вид: $c^2q^3=-2a$. Для дальнейшего обозначим $q+\dfrac{1}{q}=z$. Разделив равенство (2) (которое в рассматриваемом случае примет вид $c^2(q^3+q)(q^2+q+1)=5a-2$) на равенство (5) почленно, получим $\left(\dfrac{1}{q}+q\right)\left(q+1+\dfrac{1}{q}\right)=\dfrac{5a-2}{-2a}$, или $z(z+1)=-\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{a}$. Далее, возведя равенство (1) в квадрат и почленно разделив полученное равенство на равенство (5), получим $(q+1)^2(q^2+1)^2/q^3=-\dfrac{1}{2a}$, или $\left(q+2+\dfrac{1}{q}\right)\left(q+\dfrac{1}{q}\right)^2=-\dfrac{1}{2a}$, или $(z+2)z^2=-\dfrac{1}{2a}==-\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{2}z(z+1)$, т. е. $4z^3+10z^2+2z+5=0$, т. е. $\left(z+\dfrac{5}{2}\right)(4z^2+2)=0$. Следовательно, $z=-\dfrac{5}{2}$, $q+\dfrac{1}{q}=-\dfrac{5}{2}$; откуда q равно -2 или $-\dfrac{1}{2}$. При $q=-2$ из равенства (1) имеем $c=-\dfrac{1}{5}$, а тогда из равенства (5) $a=\dfrac{4}{25}$, а значит, $b=\dfrac{16}{25}$.

При $q=-\dfrac{1}{2}$ получим те же значения a и b (просто прогрессия из корней многочлена будет читаться в обратном порядке).

2) При $b=a$ получаем уравнение, из которого найдём, что z равно -1, или -2, или $\dfrac{1}{2}$ — в каждом из этих случаев получаем противоречие.

10.7. Ответ: Так как $\smile AL=\smile LD$, то BL — биссектриса угла $\angle ABD$ ($\angle ABL=\angle DBL$ как вписанные углы описанной вокруг четырёхугольника $ABCD$ окружности, опирающиеся на равные дуги). С другой стороны, BI_1 и BI_3 — также биссектрисы угла $\angle ABD$ (по условию точки I_1 и I_3 — центры вписанных окружностей треугольников $\triangle ABX$ и $\triangle ABD$ соответственно). Следовательно, точки B, I_1, I_3 и L лежат на одной прямой. Аналогично, точки C, I_2, I_4 и L также лежат на одной прямой (см. рис.).



Докажем, что $\triangle LI_1I_2$ равнобедренный. Поскольку углы $\angle AXB$ и $\angle CXD$ вертикальные (обозначим их общую угловую меру через 2δ), а лучи XI_1 и XI_2 — биссектрисы этих углов соответственно, то точки I_1, I_2 и X лежат на одной прямой и $\angle I_1XB=\angle I_2XC==\delta$. Пусть угловая мера дуги $\smile AD$ равна 4φ. Тогда $\angle ABD=\angle ACD=2\varphi$ (как вписанные углы, опирающиеся на дугу $\smile AD$), и $\angle I_1BX=\angle I_2CX=\varphi$. Тогда $\angle LI_1I_2=\angle LI_2I_1=\varphi+\delta$ (как внешние углы треугольников $\triangle I_1BX$ и $\triangle I_2CX$ соответственно), т. е. $\triangle LI_1I_2$ равнобедренный и $LI_1=LI_2$.

Докажем теперь, что $\triangle LI_3I_4$ равнобедренный. Для этого установим, что треугольникив $\triangle LAI_3$ и $\triangle LDI_4$ равнобедренные. Докажем, что $\triangle LAI_3$ равнобедренный. Пусть $\angle BAD = 2\alpha$. Тогда $\angle AI_3L = \alpha + \varphi$ (как внешний угол $\triangle ABI_3$) и $\angle LAI_3 = \angle LAD + \angle DAI_3 = \varphi + \alpha$ (поскольку $\angle LAD = \varphi$ как опирающийся на дугу $\smile LD = 2\varphi$, а $\angle DAI_3 = \alpha$, поскольку AI_3 — биссектриса $\angle DAB$). Поэтому $\triangle LAI_3$ равнобедренный и $LI_3 = LA$. Точно так же показывается, что $LI_4 = LD$. Но $LA = LD$ (как хорды, стягивающие равные дуги), поэтому $LI_3 = LI_4$.

Поскольку треугольники $\triangle LI_1I_2$ и $\triangle LI_3I_4$ равнобедренные с общим углом при вершине L, то они подобны.

10.8. Ответ: Ответ: **б)** нет, не может.

а) Перенумеруем лежащие на столе шары последовательно числами от 1 до 101 (например, слева направо). Шары, стоящие на чётных местах, назовём чётными, а на нечётных — нечётными. Нечётных шаров 51, а чётных 50. Укажем выигрышную стратегию Васи. Вначале он подсчитывает число m чётных зелёных шаров и число n нечётных зелёных шаров. Поскольку перед каждым ходом Васи один из крайних шаров чётный, а другой — нечётный, то он на каждом своём ходу может брать себе всегда либо чётный, либо нечётный шар. Поэтому выигрышная стратегия Васи следующая. Если $m > n$, он всегда на своём ходу берёт чётный шар, а тогда Пете остаётся только брать нечётный шар. В результате все чётные шары, а значит, и все чётные зелёные шары, окажутся у Васи, и он выиграет. Если же $m < n$, то Вася всегда берёт нечётный шар, а тогда Пете остаётся, кроме первого его хода, брать только чётный шар. В результате все нечётные зелёные шары, кроме одного нечётного шара, который взял Петя на первом ходу (но этот шар по условию не зелёный), окажутся у Васи, и он выиграет.

б) Если хотя бы один из крайних шаров зелёный, то, вообще говоря, Петя не сможет обеспечить себе выигрыш. Это будет в случае, если хотя бы три из остальных четырёх зелёных шаров стоят на нечётных местах.

11 класс

11.5. Ответ: 120, 140 и 775.

Пусть p — наименьший простой делитель числа n. Тогда сумма двух наибольших делителей числа n равна $n + \dfrac{n}{p} = \dfrac{n}{p}(p+1)$. Относительно трех наименьших делителей числа n возможны два случая.

1) Эти делители — числа 1, p и p^2. Тогда n делится на p^2, пусть, скажем, $n = p^2 \cdot n_0$, и по условию можно записать $\dfrac{n}{p}(p+1) = 30(1+p+p^2)$, или $p(p+1)n_0 = 30(1+p+p^2) = 30 + 30(p+p^2)$. Левая часть этого равенства делится на $p+p^2$, следовательно, 30 делится на $p+p^2$. Отсюда простое число p равно либо 2, либо 5. Если $p = 2$, то имеем $2\cdot(2+1)\cdot n_0 = 30\cdot(1+2+2^2)$, откуда $n_0 = 35$, и тогда $n = 2^2\cdot 35 = 140$. Легко видеть, это число удовлетворяет условию. Если же $p = 5$, то имеем $5\cdot(5+1)\cdot n_0 = 30\cdot(1+5+5^2)$, откуда $n_0 = 31$, и тогда $n = 5^2\cdot 31 = 775$. Это число также удовлетворяет условию.

2) Три наименьших делителя числа n — это числа 1, p, q, где q — некоторое постое число, такое, что $p < q$. Пусть $n = pq\cdot n_0$. Условие задачи запишется в виде $\dfrac{n}{p}(p+1) = 30(1+p+q)$, или $qn_0(p+1) = 30(1+p+q)$. Из последнего равенства следует, что число $30q$ делится на $p+1$, а число $30(1+p)$ делится на q. Заметим, что при $p \geqslant 3$ будет $q \geqslant p+2 > p+1$, и потому числа q и $p+1$ взаимно простые. Тогда число 30 делится на $p+1$ и на $q \geqslant 5$. Тогда

$q = 5$ и $p = 3$, откуда $30 \vdots (3+1)$ — противоречие. Поэтому $p = 2$, и так как $p < q < p^2$, $q = 3$. Получаем $3 \cdot n_0 \cdot (2+1) = 30(1+2+3)$, или $n_0 = 20$. Тогда $n = 2 \cdot 3 \cdot 20 = 120$. Легко убедиться, что и это значение удовлетворяет условию задачи.

11.6. Известно, что для любых действительных x, y, z выполнено неравенство $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$. Поэтому

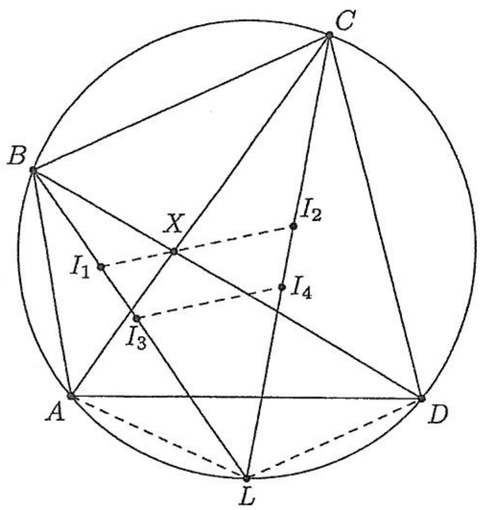
$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geqslant \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} + \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} + \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}. \qquad (1)$$

Докажем, что $\frac{a}{c} + 1 \geqslant 4\frac{a}{a+c}$. Действительно,

$$\frac{a}{c} + 1 \geqslant 4\frac{a}{a+c} \iff \frac{a+c}{c} \geqslant 4\frac{a}{a+c} \iff (a+c)^2 \geqslant 4ac \iff (a-c)^2 \geqslant 0.$$

Аналогично показывается, что $\frac{b}{a} + 1 \geqslant 4\frac{b}{b+a}$ и $\frac{c}{b} + 1 \geqslant 4\frac{c}{c+b}$. Складывая полученные три неравенства и учитывая (1), получаем требуемое неравенство.

11.7. Через ω обозначим окружность, описанную вокруг четырёхугольника $ABCD$. Пусть $\smile AD$ — та дуга с концами A и D окружности ω, которая не содержит точек B и C, а точка L — середина $\smile AD$ (см. рис.). Так как $\smile AL = \smile LD$, то BL — биссектриса угла $\angle ABD$ ($\angle ABL = \angle DBL$ как вписанные углы окружности ω, опирающиеся на равные дуги). С другой стороны, BI_1 и BI_3 — также биссектрисы угла $\angle ABD$ (по условию точки I_1 и I_3 — центры вписанных окружностей треугольников $\triangle ABX$ и $\triangle ABD$ соответственно). Следовательно, точки B, I_1, I_3 и L лежат на одной прямой. Аналогично, точки C, I_2, I_4 и L также лежат на одной прямой (см. рис.). Далее, так как углы $\angle AXB$ и $\angle CXD$ вертикальные, а лучи XI_1 и XI_2 — биссектрисы этих углов соответственно, то точки I_1, I_2 и X лежат на одной прямой. Углы $\angle LI_1I_2$ и $\angle LI_2I_1$ равны как углы между соответственными биссектрисами в подобных треугольниках ($\triangle ABX \sim \triangle DCX$, а I_1 и I_2 — соответственно центры вписанных в эти треугольники окружностей). Значит, $\triangle LI_1I_2$ равнобедренный и



$$LI_1 = LI_2. \qquad (*)$$

Докажем, что $LI_3 = LA$, т. е. что $\triangle LAI_3$ равнобедренный. Действительно, $\angle AI_3L = (\angle ABD + \angle DAB)/2$ (как внешний угол $\triangle ABI_3$) и $\angle LAI_3 = \angle LAD + \angle DAI_3 = (\angle ABD + \angle DAB)/2$ (поскольку $\angle LAD = \angle ABD/2$ как опирающиеся на дугу $\smile LD$, а $\angle DAI_3 = \angle DAB/2$, поскольку AI_3 — биссектриса $\angle DAB$). Точно так же показывается, что $LI_4 = LD$. Но $LA = LD$ (как хорды, стягивающие равные дуги), поэтому

$$LI_3 = LI_4. \qquad (**)$$

Из равенств $(*)$ и $(**)$ и того, что точки L, I_1, I_3 лежат на одной прямой и точки L, I_2, I_4 лежат на одной прямой, очевидно вытекает нужное соотношение: $I_1I_2 \parallel I_3I_4$.

11.8. Ответ: выигрывает игрок A.

После покраски шаров игроком B возможны только три расположения красных шаров на окружности: 1) все три красных шара расположены подряд на окружности, 2) два красных шара стоят рядом, а третий шар стоит в окружении зеленых, 3) между любыми красными шарами расположены зеленые шары.

В первом случае игрок A первым своим ходом берет средний из трех красных шаров. Тогда игрок B вынужден забрать соседний красный шар и, наконец, игрок A забирает последний красный шар, и, следовательно, выигрывает.

Во втором случае игрок A первым своим ходом берет тот красный шар, который с двух сторон окружен зелеными. В результате на окружности останутся два соседних красных шара. Поэтому вне зависимости от игры B игрок A на каком-то своем ходу либо первым возьмет один из двух красных шаров (и, следовательно, выигрывает), либо, сразу же после того как B возьмет один из двух красных шаров, возьмет оставшийся красный шар и опять выиграет.

Осталось рассмотреть третий случай. Заметим, что так как общее количество шаров нечетное, то в этом случае общее число зеленых шаров — число четное. Следовательно, либо между любыми двумя красными шарам стоит четное число зеленых шаров, либо между какими-то двумя красными шарами (назовем их a и b) стоит четное количество зеленых, а между третьим красным шаром (назовем его c) и каждым из шаров a и b стоит нечетное число зеленых шаров. В первом случае A забирает любой из трех красных шаров, а во втором случае он забирает шар c. В результате на окружности останутся стоять группа G_1 зеленых шаров, шар a, группа G_2 зеленых шаров (их будет четное число), шар b, группа G_3 зеленых шаров. Дальнейшая игра сводится к следующей игре. Сто шаров расположены друг за другом (группа G_1, шар a, группа G_2, шар b, группа G_3) и на каждом ходу игрок может выбрать один из крайних шаров. При этом число шаров в группе G_1 будет той же четности, что и числа шаров в группе G_3.

Перенумеруем все шары по очереди числами от 1 до 100, двигаясь слева направо. Будем говорить, что шар четный, если его номер — четное число, и нечетный в противном случае. Поскольку в группе G_2 четное число шаров, то четность шаров a и b будет различна. Поскольку четности чисел шаров в группах G_1 и G_3 совпадают, то после любого взятие шара игроком B игрок A может выбрать себе шар так, чтобы четности количества шаров в группах G_1 и G_3 оставались одинаковыми. В результате после некоторого хода A либо слева от шара a, либо справа от шара b останется один зеленый шар, и тогда справа от шара b (слева от шара a) останется нечетное число зеленых шаров. Не нарушая общности, считаем, что один зеленый шар остался слева от шара a. Игрок B не может взять этот зеленый шар, так как тогда игрок A забирает красный шар a и выигрывает. Следовательно, B должен забирать оставшиеся зеленый шары из группы G_3, но тогда после некоторого хода A справа от шара b также останется один зеленый шар. Значит B на своем следующем ходу должен забрать один из крайних зеленых шаров и тогда игрок A, забрав соседний красный шар, опять выигрывает.