Е. А. Барабанов, *старший научный сотрудник Института математики НАН Беларуси,*
И. И. Воронович, *зав. кафедрой математики Лицея БГУ,*
В. И. Каскевич, *доцент кафедры высшей алгебры БГУ,*
С. А. Мазаник, *зав. кафедрой высшей математики БГУ*

ЗАДАЧИ III ЭТАПА 61-й БЕЛОРУССКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

(*Первый день*)

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

VIII класс

1. Сколько среди натуральных чисел от 1 до 999 существует таких чисел n, что сумма цифр в их десятичной записи равна наибольшему общему делителю чисел n и $n+6$? *(Ответ обоснуйте.)*

2. В прямоугольном треугольнике длины медиан, проведённых к катетам, равны 19 и 22.

Найдите длину гипотенузы этого треугольника.

3. В классе чётное число школьников. Каждый дружит не менее чем с половиной одноклассников. В начале очередного учебного года учительница произвольным образом рассадила их по два человека за парты. Но оказалось, что нет ни одной парты, за которой сидели бы друзья. Поэтому учительница разрешила школьникам делать пересадки. В одной пересадке могут участвовать два школьника, сидящих за разными партами.

Всегда ли школьники могут с помощью таких пересадок сесть так, чтобы за каждой партой сидели друзья? *(Ответ обоснуйте.)*

4. Каждая клетка таблицы 7×7 окрашена в один из трёх цветов: красный, синий или зелёный. При этом в каждой строке таблицы число красных клеток не меньше числа синих клеток и не меньше числа зелёных клеток, а в каждом столбце таблицы число синих клеток не меньше числа красных клеток и не меньше числа зелёных клеток.

Сколько зелёных клеток может быть в такой таблице? Ответ обоснуйте и приведите соответствующий пример (примеры).

IX класс

1. Пусть $S(n)$ — сумма цифр в десятичной записи натурального числа n. Существуют ли такие натуральные числа n, что

а) $n-S(n)=3\cdot2010$?

б) $n-S(n)=3\cdot2011$?

2. Три различных действительных числа удовлетворяют следующему условию: квадрат любого из них равен сумме числа 1 и произведения двух других чисел.

Какому числу может равняться сумма трёх попарных произведений этих чисел?

3. На стороне AB треугольника ABC отмечены точки K и L, так, что $AK = KL = LB$. Точки M и N — середины сторон AC и BC соответственно. Пусть X — точка пересечения отрезков AN и CK, а Y — точка пересечения отрезков BM и CL.

Найдите длину отрезка XY, если длина стороны AB равна 36.

4. Каждая клетка таблицы 7×8 окрашена в один из трёх цветов: красный, синий или зелёный. При этом в каждой строке таблицы число красных клеток не меньше числа синих клеток и не меньше числа зелёных клеток, а в каждом столбце таблицы число синих клеток не меньше числа красных клеток и не меньше числа зелёных клеток.

Сколько зелёных клеток может быть в такой таблице? Ответ обоснуйте и приведите соответствующий пример (примеры).

X класс

1. Для некоторых ненулевых действительных чисел a, b и c выполняется равенство

$$\frac{ab}{b-c}+\frac{bc}{c-a}+\frac{ca}{a-b}=\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{c+a}+\frac{ca}{a+b}+6abc.$$

Какие значения может принимать выражение

$$\frac{1}{\left(a^2-b^2\right)^2}+\frac{1}{\left(b^2-c^2\right)^2}+\frac{1}{\left(c^2-a^2\right)^2}?$$

2. Пусть K — точка пересечения медиан AL, BM и CN треугольника ABC.

Докажите, что $\angle ABM = \angle CAL$, если $\angle BLA = \angle CNA$.

3. Существует ли функция f, определённая на множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел и принимающая действительные значения, для которой при любом действительном x выполняется равенство

а) $f(\sin x) + f(\cos x) = 1$?

б) $f(\sin x) + f(\cos x) = \sin x$?

4. Каждая клетка таблицы 8×9 окрашена в один из трёх цветов: красный, синий или зелёный. При этом в каждой строке таблицы число красных клеток не меньше числа синих клеток и не меньше числа зелёных клеток, а в каждом столбце таблицы число синих клеток не меньше числа красных клеток и не меньше числа зелёных клеток.

Какое наибольшее и какое наименьшее число зелёных клеток может быть в такой таблице?

XI класс

1. Про три попарно различных числа известно, что сумма кубов любых двух из них равна разности между квадратом третьего и числом $3/4$. Найдите произведение этих чисел.

2. Существует ли функция f, определённая на множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел и принимающая действительные значения, для которой при любом действительном x выполняется равенство

а) $f(\sin x) + f(\cos x) = 2$?

б) $f(\sin x) + f(\cos x) = \sin 2x$?

3. В остроугольном треугольнике ABC отмечены точки: M — середина стороны BC, N и K — основания высот AN и CK, H — точка пересечения высот. Биссектриса угла ACB пересекает отрезок AH в точке T. Оказалось, что $CT \parallel MH$, $TH = 10$.

Найдите радиус окружности, описанной около треугольника NBK.

4. Каждая клетка таблицы 9×10 окрашена в один из трёх цветов: красный, синий или зелёный. При этом в каждой строке таблицы число красных клеток не меньше числа синих клеток и не меньше числа зелёных клеток, а в каждом столбце таблицы число синих клеток не меньше числа красных клеток и не меньше числа зелёных клеток.

Какое наибольшее и какое наименьшее число зелёных клеток может быть в такой таблице?

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

VIII класс

1. Ответ: 25.

Поскольку НОД $(a,\ b) = $ НОД$(a-b,\ b)$ для любых чисел a и b, то НОД$(n+6,\ n) = $ НОД$(6,\ n)$. Следовательно, НОД$(n+6,\ n)$ может принимать лишь четыре значения: 1, 2, 3, 6.

Если НОД$(6,\ n) = 1$, то число n нечётное, и единственным числом с суммой цифр, равной 1, является число 1 (числа 10 и 100 чётные).

Если НОД $(6,\ n) = 2$, то число n чётное, но не делится на 6. Следовательно, последняя цифра числа n чётная, т. е. 0, 2, 4, 6, 8. Но так как сумма цифр числа n равна 2, то среди однозначных чисел есть только одно число, это число 2, а все двузначные и трёхзначные числа могут оканчиваться лишь 0. Поэтому двузначные числа — 20, трёхзначные — 200, 110.

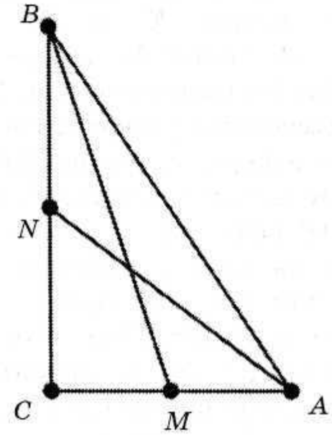
Если НОД$(6,\ n) = 3$, то число n нечётное, так как не должно делиться на 6. Следовательно, последняя цифра числа n нечётная, т. е. 1, 3, 5, 7, 9. Но так как сумма цифр числа n равна 3, то среди однозначных чисел есть только одно число, это число 3, а все двузначные и трёхзначные числа могут оканчиваться лишь 1. Поэтому двузначные числа — 21, трёхзначные — 201, 111.

Если НОД$(6,\ n) = 6$, то число n чётное. Следовательно, последняя цифра числа n чётная, т. е. 0, 2, 4, 6, 8. Но так как сумма цифр числа n равна 6, то среди однозначных чисел есть только одно число, это число 6, а все двузначные и трёхзначные числа могут оканчиваться лишь 0, 2 или 4. Поэтому двузначные числа — 60, 42, 24, трёхзначные — 600, 510, 420, 330, 240, 150, 402, 312, 222, 132, 204, 114.

Других чисел, удовлетворяющих условию, нет. Следовательно, всего требуемых чисел 25.

2. Ответ: 26.

Обозначим $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Пусть $AN = 19$, $BM = 22$. Применяя теорему Пифагора к прямоугольным треугольникам MBC и ANC, получаем



$$b^2 + \frac{a^2}{4} = AN^2 = 19^2 = 361,$$

$$a^2 + \frac{b^2}{4} = BM^2 = 22^2 = 484.$$

Складывая эти равенства, получим

$$\frac{5}{4}a^2 + \frac{5}{4}b^2 = 845 = 5 \cdot 169.$$

Отсюда $a^2 + b^2 = 4 \cdot 169$. Поэтому искомая гипотенуза

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 \cdot 169} = 2 \cdot 13 = 26.$$

3. Ответ: да, всегда.

Будем называть парту плохой, если за ней сидят не друзья, и хорошей — если за ней сидят друзья. Таким образом, в начале все парты плохие. Покажем, что при любом имеющемся количестве плохих парт их число можно уменьшить с помощью одной пересадки. Пусть в классе $2n$ школьников (и, значит, они занимают n парт). Пусть за плохой партой сидят A и B, это, в частности, означает, что A и B не друзья. Но согласно условию у A не менее n друзей и поэтому они сидят не менее чем за $\frac{n}{2}$ партами. Точно так же, и друзья B сидят не менее чем за $\frac{n}{2}$ партами. При этом все они, друзья A и друзья

B, сидят за $n-1$ партами (все парты, кроме одной, где сидят A и B), или меньшим числом парт. Поэтому (принцип Дирихле) найдётся парта, за которой сидит друг школьника A (пусть это C), а второй школьник (пусть это D) — друг школьника B. Действительно, если бы такой парты не было, то было бы p парт, за которыми сидят только друзья A, q парт, за которыми сидят только друзья B, r парт, за которыми один школьник дружит и с A, и с B, а второй не дружит ни с A, ни с B (а за остальными партами сидят школьники, которые не дружат ни с A, ни с B). Тогда, с одной стороны, $2p+r\geq n$, $2q+r\geq n$, а с другой стороны $p+q+r\leq \leq n-1$ противоречие. Пересадим B и C. Получим две хорошие парты: A и C и B и D. Видим, что в начале после первой же пересадки число плохих парт уменьшается на две. После этого снова выберем какую-либо плохую парту. Для неё снова, рассуждая так же, находим парту (она может оказаться уже хорошей), за которой сидят друзья выбранной плохой парты. Осуществив такую же пересадку, которая описана выше, превратим две рассматриваемые парты в хорошие. Число плохих парт уменьшится по крайней мере на одну. Продолжим этот процесс. Но так как число плохих парт конечно и после каждой такой пересадки оно уменьшается, то рано или поздно не останется ни одной плохой парты.

4. Ответ: 7 зелёных клеток.

Заметим, что поскольку в любой строке число красных клеток не меньше числа синих, то общее число красных клеток во всей таблице не меньше числа синих клеток. Точно так же, поскольку в любом столбце число синих клеток не меньше числа красных, то и во всей таблице число синих клеток не меньше числа красных. Тем самым количества красных клеток и синих клеток во всей таблице одинаковы. Далее, если бы хоть в одной строке число красных клеток было строго больше числа синих, то число красных клеток во всей таблице было бы больше числа синих клеток — противоречие. Поэтому в каждой строке таблицы число красных клеток равно числу синих. Отсюда с учётом условия следует единственная возможность: в каждой строке 3 красные клетки, 3 синие и 1 зелёная. Поэтому число зелёных клеток равно 7. Следующий пример показывает, что окрасить клетки так, как сказано в условии задачи (при этом зелёных клеток действительно 7), можно.

з	с	к	с	к	с	к
к	з	с	к	с	к	с
с	к	з	с	к	с	к
к	с	к	з	с	к	с
с	к	с	к	з	с	к
к	с	к	с	к	з	с
с	к	с	к	с	к	з

IX класс

1. Ответ: а) существуют, например, $n=6048$; б) не существуют.

а) Таким числом, например, является число 6048, так как $S(6048)=18$ и $6048-18=6030=3\cdot 2010$.

б) Такие числа не существуют. Действительно, хорошо известно, что число и его сумма цифр имеют одинаковые остатки от деления на 9. Поэтому число $n-S(n)$ делится на 9, а число $3\cdot 2011$ не делится на 9.

2. Ответ: -1.

Обозначив данные числа через a, b и c, получим, согласно условию задачи, систему равенств:

$$a^2=bc+1,\ b^2=ac+1,\ c^2=ab+1. \qquad (*)$$

Вычитая из первого равенства второе, получим $a^2-b^2=c(b-a)$. Так как по условию $a\neq b$, то можно сократить обе части полученного равенства на $a-b$. Получим: $a+b=-c$, или $a+b+c=0$. После возведения этого равенства в квадрат получим: $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=0$. Заменив в этом равенстве квадраты в соответствии с равенствами (*), получим $bc+1+ac+1+ab+1+2ab+2ac+2bc=0$, или $3(ab+ac+bc)+3=0$, откуда $ab+ac+bc=-1$.

3. Ответ: 9.

Соединим точки N и L. Так как по условию $KL=LB$ и N — середина BC, то NL — средняя линия треугольника CKB, и поэтому $NL \| CK$. Но тогда по теореме Фалеса $AX:XN=AK:KL=1:1$. Следовательно, $AX=0{,}5AN$. Поскольку P — точка пересечения медиан (см. рис.), то

$$AP=\frac{2}{3}AN,$$

тогда

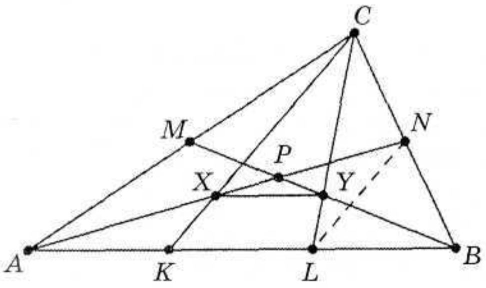
$$XP=AP-AX=\frac{2}{3}AN-\frac{1}{2}AN=\frac{1}{6}AN=\frac{1}{4}AP.$$

Аналогично,

$$YP=\frac{1}{6}BM=\frac{1}{4}BP.$$

Поэтому треугольники XPY и APB подобны и $XY:AB=1:4$, откуда

$$XY=\frac{1}{4}AB=\frac{1}{4}\cdot 36=9.$$



4. Ответ: 8 зелёных клеток.

Заметим, что поскольку в любой строке число красных клеток не меньше числа синих, то общее число красных клеток во всей таблице не меньше числа синих клеток. Точно так же, поскольку в любом столбце число синих клеток не меньше числа красных, то и во всей таблице число синих клеток не меньше числа красных. Тем самым количества красных клеток и синих клеток во всей таблице одинаковы. Далее, если бы хоть в одном столбце таблицы число синих клеток было строго больше числа красных, то число синих клеток во всей таблице было бы больше числа красных клеток — противоречие. Поэтому в каждом из столбцов таблицы число красных клеток равно числу синих. Отсюда, в частности, следует, что в каждом из 8 столбцов таблицы 3 красные клетки, 3 синие и 1 зелёная. Поэтому число зелёных клеток равно 8. Следующий пример показывает, что окрасить клетки так, как сказано в условии задачи (при этом зелёных клеток действительно 8), можно.

з	з	к	с	к	с	к	с
к	с	з	з	с	к	с	к
с	к	с	к	з	з	к	с
к	с	к	с	к	с	з	з
с	к	с	к	с	к	с	к
к	с	к	с	к	с	к	с
с	к	с	к	с	к	с	к

X класс

1. Ответ: 9.

Преобразуем данное в условии равенство:

$$\frac{ab}{b-c}-\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{c-a}-\frac{bc}{c+a}+\frac{ca}{a-b}-\frac{ca}{a+b}=6abc \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ab\left(\frac{1}{b-c}-\frac{1}{b+c}\right)+bc\left(\frac{1}{c-a}-\frac{1}{c+a}\right)+$$

$$+ca\left(\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}\right)=6abc \Leftrightarrow \frac{2abc}{(b-c)(b+c)}+$$

$$+\frac{2abc}{(c-a)(c+a)}+\frac{2abc}{(a-b)(a+b)}=6abc \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2-b^2}+\frac{1}{b^2-c^2}+\frac{1}{c^2-a^2}=3.$$

Теперь возведём обе части последнего равенства в квадрат:

$$\frac{1}{\left(a^2-b^2\right)^2}+\frac{1}{\left(b^2-c^2\right)^2}+\frac{1}{\left(c^2-a^2\right)^2}+$$

$$+\frac{2}{\left(a^2-b^2\right)\left(b^2-c^2\right)}+\frac{2}{\left(b^2-c^2\right)\left(c^2-a^2\right)}+$$

$$+\frac{2}{\left(a^2-b^2\right)\left(c^2-a^2\right)}=9 \Leftrightarrow \frac{1}{\left(a^2-b^2\right)^2}+\frac{1}{\left(b^2-c^2\right)^2}+$$

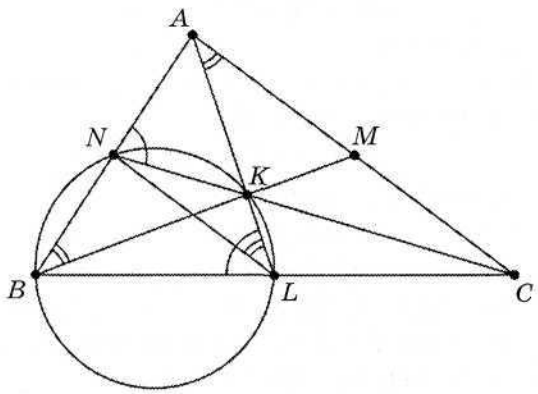
$$+\frac{1}{\left(c^2-a^2\right)^2}+\frac{2\left(c^2-a^2+a^2-b^2+b^2-c^2\right)}{\left(a^2-b^2\right)\left(b^2-c^2\right)\left(c^2-a^2\right)}=9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\left(a^2-b^2\right)^2}+\frac{1}{\left(b^2-c^2\right)^2}+\frac{1}{\left(c^2-a^2\right)^2}=9.$$

2. Так как $\angle BNC+\angle BLA=(180^\circ-\angle CNA)+\angle BLA=180^\circ$, то четырёхугольник $BNKL$ вписанный. Поэтому $\angle NBK=\angle NLK$ (как вписанные, опирающиеся на общую дугу NK). Но NL — средняя линия треугольника ABC, поэтому $NL||AC$. Тогда $\angle NLK=\angle CAL$ (внутренние накрест лежащие углы). Следовательно,

$$\angle ABM=\angle NBK=\angle NLK=\angle CAL,$$

что и требовалось.



3. Ответ: **а)** да, существует; **б)** нет, не существует.

а) Пример функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для которой при любом действительном x выполняется равенство

$$f(\sin x)+f(\cos x)=1, \qquad (*)$$

доставляет функция f, тождественно равная $1/2$, т. е. $f(t)=1/2$ при всех $t\in\mathbb{R}$. Для неё выполнимость тождества (*) очевидна: $1/2+1/2=1$. Другой пример, почти столь же очевидный, как и предыдущий, даёт функция $f(t)=t^2$. В самом деле, для неё при всех действительных x получаем:

$$f(\sin x)+f(\cos x)=(\sin x)^2+(\cos x)^2=$$
$$=\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

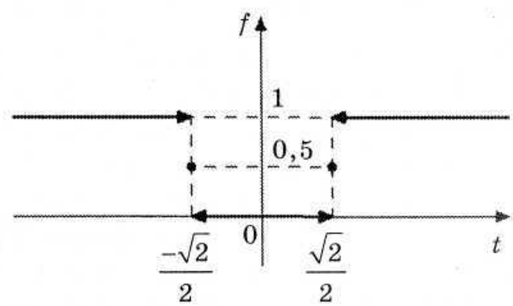
согласно основному тригонометрическому тождеству.

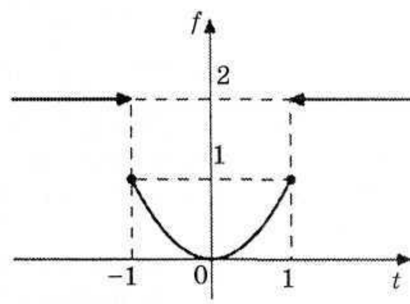
Для решения п. **а)** задачи достаточно привести пример только одной функции. В действительности же функций $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющих тождеству (*), существует бесконечно много. Приведём ещё два из тех примеров таких функций, которые можно задать аналитическим выражением:

$$f(t)=\begin{cases}0, & \text{если } t\in\left(-2^{-1/2},\ 2^{-1/2}\right),\\ 2^{-1}, & \text{если } |t|=2^{-1/2},\\ 1, & \text{если } |t|>2^{-1/2},\end{cases}$$

$$f(t)=\begin{cases}t^2, & \text{если } t\in[-1,\ 1],\\ 2, & \text{если } |t|>1.\end{cases} \qquad (**)$$

Графики функций (**) приведены на рисунке:





Вообще, несложно описать все функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющие тождеству (*). Для этого заметим сначала, что, поскольку $|\sin x|\le 1$ и $|\cos x|\le 1$, значения $f(t)$ функции f при $|t|>1$ могут быть любыми, если требовать только, чтобы она удовлетворяла тождеству (*). Рассмотрим поэтому функцию f только на отрезке $[-1,\ 1]$ (или, как ещё говорят, сужение (или ограничение) функции f на отрезок $[-1,\ 1]$). Докажем, что функция f на отрезке $[-1,\ 1]$ является чётной. Действительно, заменив в тождестве (*) x на $-x$ и воспользовавшись тем, что функция sin нечётна, а функция cos чётна, получим тождество $f(-\sin x)+f(\cos x)=1$. Почленно вычитая это тождество из тождества (*), получим $f(\sin x)-f(-\sin x)=0$ при всех x, или, что то же самое, если обозначить $\sin x$ через t, что $f(t)=f(-t)$ для любого $t\in[-1,\ 1]$.

Так как функция f на отрезке $[-1,\ 1]$ чётна, то её достаточно рассмотреть только на отрезке $[0,\ 1]$. При $x=\pi/4$ из тождества (*) находим $f(2^{-1/2})=2^{-1}$. Пусть известно значение $f(\sin x)$; тогда, в силу тождества (*), известно и её значение $f(\cos x)=1-f(\sin x)$. В частности, если положить $t=\sin x$, где $\pi/4<x\le\pi/2$, т. е. $2^{-1/2}<t\le 1$, то $f(t)=1-f\left(\sqrt{1-t^2}\right)$ для всех $t\in(2^{-1/2},\ 1]$. Когда t пробегает полуинтервал $(2^{-1/2},\ 1]$, величина $\sqrt{1-t^2}$ пробегает полуинтервал $[0,2^{-1/2})$. Поэтому, если известно значение $f(t)$ при $t\in[0,2^{-1/2})$, то известно и значение $f(t)$ при $t\in(2^{-1/2},\ 1]$.

Подводя итог, получаем, что функция f на отрезке $[0,\ 1]$ должна удовлетворять следующим трём условиям: 1) $f(t)=g(t)$ при $t\in[0,2^{-1/2})$, где g — какая-то функция, определённая на полуинтервале $[0,2^{-1/2})$, 2) $f(2^{-1/2})=2^{-1}$ и 3) $f(t)=1-g\left(\sqrt{1-t^2}\right)$ при $t\in(2^{-1/2},\ 1]$. На полуинтервал $[-1,\ 0)$ функция f продолжается как чётная, а при $|t|>1$ её значения $f(t)$ могут быть выбраны произвольно.

Обратно, выбрав произвольно какие-либо функции g и G, определённые соответственно только на $[0,2^{-1/2})$ и $(-\infty,\ -1)\cup\cup(1,\ +\infty)$, легко убедиться, что функция

$$f(t)=\begin{cases} g(|t|), & \text{если } t\in\left(-2^{-1/2},\ 2^{-1/2}\right),\\ 2^{-1}, & \text{если } |t|=2^{-1/2},\\ 1-g\left(\sqrt{1-t^2}\right), & \text{если } 2^{-1/2}<|t|\le 1,\\ G(t), & \text{если } |t|>1\end{cases} \qquad (***)$$

удовлетворяет тождеству (*).

Приведённые выше примеры функций $f(t)=2^{-1}$ и $f(t)=t^2$ получаются по формуле (***), если в ней выбрать соответственно $g(t)=2^{-1}$, $G(t)=2^{-1}$ и $g(t)=t^2$, $G(t)=t^2$. Функции же (**) получаются по формуле (***), если в ней взять $g(t)=0$, $G(t)=1$ и $g(t)=t^2$, $G(t)=2$ соответственно. Первые два из этих примеров — функции непрерывные, а два других — функции, имеющие только по две точки разрыва. Воспользовавшись формулой (***), легко привести пример функции f, удовлетворяющей тождеству (*) и разрывной в каждой точке: достаточно в качестве функций g и G взять сужение функции Дирихле на $[0,2^{-1/2})$ и $(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)$ соответственно.

б) Докажем, что функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющей при любом действительном x равенству

$$f(\sin x)+f(\cos x)=\sin x, \qquad (1)$$

не существует.

Действительно, взяв в тождестве (1) $x=0$, получим равенство

$$f(0)+f(1)=0, \qquad (2)$$

а взяв $x=\pi/2$ — равенство

$$f(1)+f(0)=1. \qquad (3)$$

Но равенства (2) и (3) противоречивы: $0=f(0)+f(1)=1$, т. е. $0=1$. Следовательно, функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющей тождеству (1), не существует.

4. Ответ: 18 зелёных клеток; 8 зелёных клеток.

Заметим, что поскольку в любой строке число красных клеток не меньше числа синих, то общее число красных клеток во всей таблице не меньше числа синих клеток. Точно так же, поскольку в любом столбце число синих клеток не меньше числа красных, то и во всей таблице число синих клеток не меньше числа красных. Тем самым количества красных клеток и синих клеток во всей таблице одинаковы. Далее, если бы хоть в одной строке число красных клеток было строго больше числа синих, то число красных клеток во всей таблице было бы больше числа синих клеток — противоречие. Поэтому в каждой строке таблицы число красных клеток равно числу синих. То же самое верно и для столбцов.

Отсюда следует, что в каждой строке число красных и синих клеток вместе чётно, а тогда число зелёных клеток нечётно. Итак, в каждой из 8 строк есть хотя бы по одной зелёной клетке. Поэтому число зелёных клеток в таблице не менее 8.

Наконец, число зелёных клеток в любом из 9 столбцов таблицы не превосходит 2 (иначе число зелёных клеток в таком столбце было бы больше числа синих клеток, равного числу красных). Поэтому число зелёных клеток в таблице не превосходит $2 \cdot 9 = 18$.

Следующие примеры показывают, что окраски, удовлетворяющие условию задачи с 8 и с 18 зелёными клетками, существуют. Потому наименьшее число зелёных клеток равно 8, а наибольшее — 18.

з	к	с	к	с	к	с	к	с
з	с	к	с	к	с	к	с	к
к	з	с	к	с	к	с	к	с
с	з	к	с	к	с	к	с	к
к	с	з	к	с	к	с	к	с
с	к	з	с	к	с	к	с	к
к	с	к	з	с	к	с	к	с
с	к	с	з	к	с	к	с	к

з	з	з	с	с	с	к	к	к
к	к	к	з	з	з	с	с	с
с	с	с	к	к	к	з	з	з
з	з	з	с	с	с	к	к	к
к	к	к	з	з	з	с	с	с
с	с	с	к	к	к	з	с	к
к	к	к	с	с	с	к	з	с
с	с	с	к	к	к	с	к	з

XI класс

1. Ответ: 1/8.

Пусть a, b, c — данные числа. По условию имеем систему равенств

$$a^3+b^3=c^2-\frac{3}{4},\ b^3+c^3=a^2-\frac{3}{4},\qquad c^3+a^3=b^2-\frac{3}{4}. \tag{1}$$

Вычитая из первого равенства второе, получим $a^3-c^3=c^2-a^2$. Сокращая на $a-c$ (по условию $a\neq c$), получаем $a^2+ac+c^2=-(a+c)$. Аналогично можно заключить, что $b^2+ab+a^2=-(a+b)$ и $b^2+bc+c^2=-(b+c)$, т. е.

$$\begin{aligned} a^2+ac+c^2&=-(a+c),\\ b^2+bc+c^2&=-(b+c),\\ b^2+ba+a^2&=-(a+b). \end{aligned} \tag{2}$$

Поэтому $(a^2+ac+c^2)-(b^2+bc+c^2)=(b+c)-(a+c)$, откуда $(a^2-b^2)+c(a-b)=-(a-b)$. Сокращая на $a-b$ $(a\neq b)$, получаем

$$a+b+c=-1. \tag{3}$$

Складывая все три равенства (2), получим

$$2(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca)=-2(a+b+c),$$

$$\text{или } 2(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=2,$$

откуда (см. (3))

$$ab+bc+ca=0. \tag{4}$$

Далее, возведём в куб обе части равенства (3):

$$\begin{aligned} -1=(a+b+c)^3&=a^3+b^3+c^3+\\ &+3(a^2b+ab^2+b^2c+c^2b+a^2c+c^2a)+\\ &+6abc. \end{aligned} \tag{5}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} &(a^2b+ab^2+b^2c+c^2b+a^2c+c^2a)=\\ &=(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc\overset{(4)}{=}0-3abc=\\ &=-3abc. \end{aligned}$$

Далее, складывая все три равенства (1), получим

$$\begin{aligned} 2\left(a^3+b^3+c^3\right)&=a^2+b^2+c^2-\frac{9}{4}=\\ &=\left(a+b+c\right)^2-2\left(ab+bc+ca\right)-\frac{9}{4}=\\ &=\left(-1\right)^2-2\cdot 0-\frac{9}{4}=1-\frac{9}{4}=-\frac{5}{4}, \end{aligned}$$

откуда $a^3+b^3+c^3=-\frac{5}{8}$. Тогда равенство (5) принимает вид

$$-1=-\frac{5}{8}+3\cdot(-3abc)+6abc=-\frac{5}{8}-3abc.$$

Тогда $3abc=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$. Следовательно,

$$abc=\frac{1}{8}.$$

Замечание. Можно доказать, например, с помощью производной, что тройка различных действительных чисел, удовлетворяющих условию задачи, в самом деле существует и определена однозначно, как три корня уравнения $x^3+x^2-\frac{1}{8}=0.$

2. Ответ: **а)** да, существует; **б)** нет, не существует.

а) Пример функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для которой при любом действительном x выполняется равенство

$$f(\sin x)+f(\cos x)=2, \qquad (*)$$

доставляет функция f, тождественно равная 1, т. е. $f(t)=1$ при всех $t\in\mathbb{R}$. Для неё выполнимость тождества (*) очевидна: $1+1=2$. Другой пример, почти столь же очевидный, как и предыдущий, даёт функция $f(t)=2t^2$. В самом деле, для неё при всех действительных x получаем:

$$f(\sin x)+f(\cos x)=$$
$$=2(\sin x)^2+2(\cos x)^2=2(\sin^2 x+\cos^2 x)=2$$

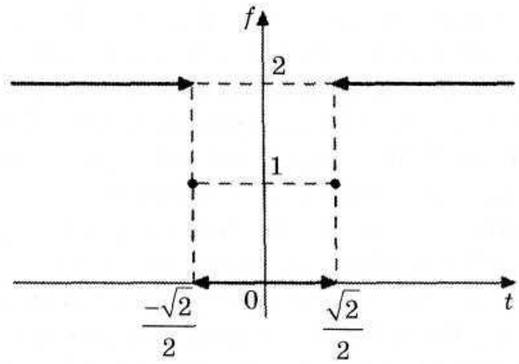
согласно основному тригонометрическому тождеству.

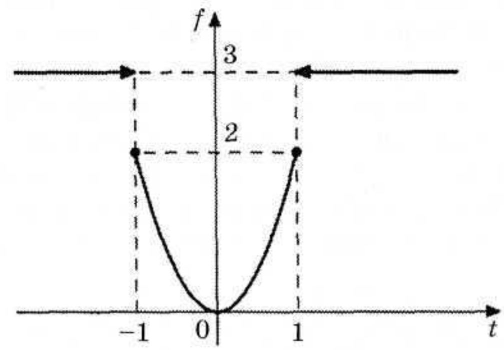
Для решения п. **а)** задачи достаточно привести пример только одной функции. В действительности же функций $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющих тождеству (*), существует бесконечно много. Приведём ещё два из тех примеров таких функций, которые можно задать аналитическим выражением:

$$f(t)=\begin{cases}0, & \text{если } t\in\left(-2^{-1/2},\ 2^{-1/2}\right),\\ 1, & \text{если } |t|=2^{-1/2},\\ 2, & \text{если } |t|>2^{-1/2},\end{cases} \qquad (**)$$

$$f(t)=\begin{cases}2t^2, & \text{если } t\in[-1,\ 1],\\ 3, & \text{если } |t|>1.\end{cases}$$

Графики функций (**) приведены на рисунке.





Вообще, несложно описать все функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющие тождеству (*). Для этого заметим сначала, что, поскольку $|\sin x|\le 1$ и $|\cos x|\le 1$, значения $f(t)$ функции f при $|t|>1$ могут быть любыми, если требовать только, чтобы она удовлетворяла тождеству (*). Рассмотрим поэтому функцию f только на отрезке $[-1,\ 1]$ (или, как ещё говорят, сужение (или ограничение) функции f на отрезок $[-1,\ 1]$). Докажем, что функция f на отрезке $[-1,\ 1]$ является чётной. Действительно, заменив в тождестве (*) x на $-x$ и воспользовавшись тем, что функция sin нечётна, а функция cos чётна, получим тождество $f(-\sin x)+f(\cos x)=2$. Почленно вычитая это тождество из тождества (*), получим $f(\sin x)-f(-\sin x)=0$ при всех x, или, что то же самое, если обозначить $\sin x$ через t, что $f(t)=f(-t)$ для любого $t\in[-1,\ 1]$.

Так как функция f на отрезке $[-1,\ 1]$ чётна, то её достаточно рассмотреть только на отрезке $[0,\ 1]$. При $x=\pi/4$ из тождества (*) находим $f(2^{-1/2})=1$. Пусть известно значение $f(\sin x)$; тогда, в силу тождества (*), известно и её значение $f(\cos x)=2-f(\sin x)$. В частности, если положить $t=\sin x$, где $\pi/4<x\le\pi/2$, т. е. $2^{-1/2}<t\le 1$, то $f(t)=2-f\left(\sqrt{1-t^2}\right)$ для всех $t\in(2^{-1/2},\ 1]$. Когда t пробегает полуинтервал $(2^{-1/2},\ 1]$, величина $\sqrt{1-t^2}$ пробегает полуинтервал $[0, 2^{-1/2})$. Поэтому, если известно значение $f(t)$ при $t\in[0, 2^{-1/2})$, то известно и значение $f(t)$ при $t\in(2^{-1/2},\ 1]$.

Подводя итог, получаем, что функция f на отрезке $[0,\ 1]$ должна удовлетворять следующим трём условиям: 1) $f(t)\equiv g(t)$ при $t\in[0,2^{-1/2})$, где g — какая-то функция, определённая на полуинтервале $[0,2^{-1/2})$, 2) $f(2^{-1/2})=1$ и 3) $f(t)=2-g\left(\sqrt{1-t^2}\right)$ при $t\in(2^{-1/2},\ 1]$. На полуинтервал $[-1,\ 0)$ функция f продолжается как чётная, а при $|t|>1$ её значения $f(t)$ могут быть выбраны произвольно.

Обратно, выбрав произвольно какие-либо функции g и G, определённые соответственно только на $[0,2^{-1/2})$ и $(-\infty,\ -1)\cup\cup(1,\ +\infty)$, легко убедиться, что функция

$$f(t)=\begin{cases} g(|t|), & \text{если } t\in\left(-2^{-1/2},\ 2^{-1/2}\right),\\ 1, & \text{если } |t|=2^{-1/2},\\ 2-g\left(\sqrt{1-t^2}\right), & \text{если } 2^{-1/2}<|t|\le 1,\\ G(t), & \text{если } |t|>1 \end{cases} \qquad (***)$$

удовлетворяет тождеству (*).

Приведённые выше примеры функций $f(t)=1$ и $f(t)=2t^2$ получаются по формуле (***), если в ней выбрать соответственно $g(t)=1$, $G(t)=1$ и $g(t)=2t^2$, $G(t)=2t^2$. Функции же (**) получаются по формуле (***), если в ней взять $g(t)=0$, $G(t)=2$ и $g(t)==2t^2$, $G(t)=3$ соответственно. Первые два из этих примеров — функции непрерывные, а два других — функции, имеющие только по две точки разрыва. Воспользовавшись формулой (***), легко привести пример функции f, удовлетворяющей тождеству (*) и разрывной в каждой точке: достаточно в качестве функций g и G взять сужение функции Дирихле на $[0,2^{-1/2})$ и $(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)$ соответственно.

б) Докажем, что функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющей при любом действительном x равенству

$$f(\sin x)+f(\cos x)=\sin 2x, \qquad (1)$$

не существует.

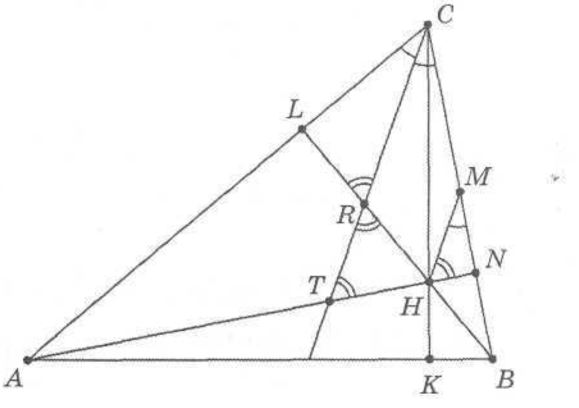
Положим в тождестве (1) последовательно $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{3\pi}{4}$ и $x=\frac{5\pi}{4}$ — получим соответственно равенства

$$f(2^{-1/2})+f(2^{-1/2})=1,$$
$$f(2^{-1/2})+f(-2^{-1/2})=-1,$$
$$f(-2^{-1/2})+f(-2^{-1/2})=1.$$

Тогда, почленно сложив первое и последнее из этих равенств, получим $2\cdot(f(2^{-1/2})++f(-2^{-1/2}))=2$, или $f(2^{-1/2})+f(-2^{-1/2})=1$. Но полученное равенство противоречит второму из них: $-1=f(2^{-1/2})+f(-2^{-1/2})=1$, т. е. $-1=1$. Следовательно, функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющей тождеству (1), не существует.

3. Ответ: 5.

Обозначим $\gamma=\angle ACB$. Проведём высоту BL (она, очевидно, пройдёт через точку H). Пусть R — точка пересечения BL и CT. Так как треугольник RLC прямоугольный, то $\angle LRC=90°-\angle LCR=90°--\gamma/2$. Поскольку вертикальные углы TRH и LRC равны, то $\angle TRH=90°-\gamma/2==\angle RTH$. Следовательно, треугольник TRH равнобедренный и $RH=TH=10$. Так как по условию $CM=MB$ и $MH\,||\,CT$, то MH — средняя линия треугольника CRB, и, следовательно, $BH=RH=10$. Остаётся заметить, что окружность, описанная около треугольника NBK, также описана около четырёхугольника $NBKH$ (так как $\angle HNB+\angle HKB=90°+90°=180°$), а отрезок BH является диаметром этой окружности. Стало быть искомый радиус равен $0{,}5BH=5$.



4. Ответ: 18 зелёных клеток; 10 зелёных клеток.

Заметим, что поскольку в любой строке число красных клеток не меньше числа синих, то общее число красных клеток во всей таблице не меньше числа синих клеток. Точно так же, поскольку в любом столбце число синих клеток не меньше числа красных, то и во всей таблице число синих клеток не меньше числа красных. Тем самым, количества красных клеток и синих клеток во всей таблице одинаковы. Далее, если бы хоть в одной строке число красных клеток было строго больше числа синих, то число красных клеток во всей таблице было бы больше числа синих клеток — противоречие. Поэтому в каждой строке таблицы число красных клеток равно числу синих. То же самое верно и для столбцов.

Отсюда следует, что в каждом столбце число красных и синих клеток вместе чётно, а число зелёных клеток нечётно. Итак, в каждом из 10 столбцов есть хотя бы по одной зелёной клетке. Поэтому число зелёных клеток в таблице не менее 10.

Наконец, число зелёных клеток в любой из 9 строк таблицы не превосходит 2 (иначе число зелёных клеток в такой строке было бы больше числа синих клеток, равного числу красных). Поэтому число зелёных клеток в таблице не превосходит $2 \cdot 9 = 18$.

Следующие примеры показывают, что окраски, удовлетворяющие условию задачи с 10 и с 18 зелёными клетками, существуют. Потому наименьшее число зелёных клеток равно 10, а наибольшее — 18.

з	з	к	с	к	с	к	с	к	с
к	с	з	з	с	к	с	к	с	к
с	к	с	к	з	з	к	с	к	с
к	с	к	с	к	с	з	з	с	к
с	к	с	к	с	к	с	к	з	з
к	с	к	с	к	с	к	с	к	с
с	к	с	к	с	к	с	к	с	к
к	с	к	с	к	с	к	с	к	с.
с	к	с	к	с	к	с	к	с	к

з	з	к	к	с	с	к	к	с	с
з	з	к	к	с	с	к	к	с	с
з	з	к	к	с	с	к	к	с	с
с	с	з	з	к	к	с	с	к	к
с	с	з	з	к	к	с	с	к	к
с	с	з	з	к	к	с	с	к	к
к	к	с	с	з	с	к	з	с	к
к	к	с	с	к	з	с	к	з	с
к	к	с	с	с	к	з	с	к	з