LXVI Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

11 – 15 января 2016 года

Решения

Первый день

8 класс

8.1. Ответ : 15.

Пусть на викторине было x легких, y средних и z трудных вопросов. Пусть Петя ответил на a легких, b средних и c трудных вопросов. Тогда он неправильно ответил на $x-a$ легких вопросов и $y-b$ средних вопросов. Поэтому он получил $4a-2(x-a)+5b-(y-b)+6c = 6(a+b+c)-2x-y$ баллов. Согласно условию $6(a+b+c)-2x-y = 4x+5y+6z-30$, или $30+6\cdot 10 = 6(x+y+z)$, или $x+y+z=15$.

8.2. Достаточно показать, что $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=0$. Путем равносильных преобразований из последнего равенства получаем

$$(ab+ac-a^2+b^2+bc-ab-bc-c^2+ac)(c+a-b)=0 \;\;\Leftrightarrow$$

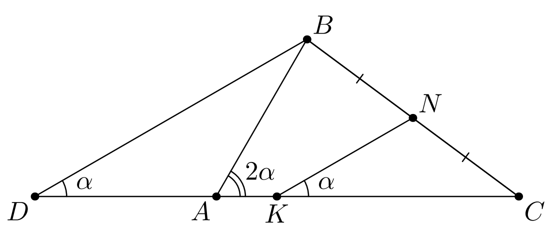
$$\Leftrightarrow\;\; (-a^2+b^2-c^2+2ac)(c+a-b)=0 \;\;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\;\; -a^2c-a^3+a^2b+b^2c+ab^2-b^3-c^3-ac^2+bc^2+2ac^2+2a^2c-2abc=0 \;\;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\;\; ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)=a^3+b^3+c^3+2abc \;\;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\;\; \frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}=\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}+2\,.$$

8.3. Продолжим сторону CA за точку A до точки D, такой, что $DA = AB$. Угол BAC — внешний угол треугольника DAB, который по построению является равнобедренным, поэтому



$$\angle BAC = \angle ADB + \angle ABD =$$

$$= [\angle ADB = \angle ABD] = 2\angle ADB.$$

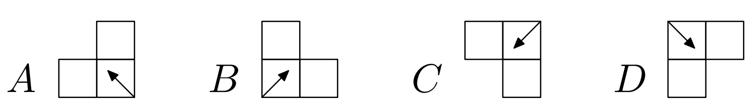
Следовательно, $\angle ADB = 0,5\angle BAC = \angle NKC$, и, поэтому прямые NK и BD параллельны. Так как точка N — середина стороны BC в треугольнике DBC, то NK — средняя линия этого треугольника, и, значит, K — середина его стороны DC. Таким образом,

$$KC = KD = KA + AD = [AD = AB] = AB + AK,$$

что и требовалось доказать.

8.4. Ответ : Нет, не сможет.

Предположим противное, т.е. предположим, что Вася сможет замостить прямоугольник размера $n\times m$, поменяв направление ровно одной плитки. Рассмотрим четыре возможных направления плиток из набора Васи:



Через k_A, k_B, k_C и k_D обозначим количество плиток в данном замощении направлений A, B, C и D соответственно. Докажем, что если для некоторых натуральных чисел n и m Вася, используя все плитки из набора, может без наложений замостить прямоугольник размера $n \times m$, то числа nm, $k_A - k_D$ и $k_B - k_C$ делятся на 3. Действительно, так как каждая плитка составлена из трех клеток, то общее количество клеток прямоугольника, которое равно nm, должно делиться на 3. Без нарушения общности, предположим, что m (ширина прямоугольника) делится на 3. Запишем в каждую клетку прямоугольника числа 1, 2 и 3 (см. рисунок 1). Так как m делится на 3, то сумма всех чисел в прямоугольнике также делится на 3. С другой стороны, как ни расположить плитку направления A на прямоугольнике, остаток от деления на 3 суммы чисел, записанных в клетках, покрываемых этой плиткой, равен 1. Аналогично, остаток от деления на 3 суммы чисел, записанных в клетках, покрываемых плитками направлений B, C и D, равны 0, 0 и 2 соответственно. Следовательно, число

1	2	3	1	2	
2	3	1	2	3	
3	1	2	3	1	$\cdots$
1	2	3	1	2	
2	3	1	2	3	
		$\vdots$			$\ddots$

Рис. 1:

1	2	3	1	2	
3	1	2	3	1	
2	3	1	2	3	$\cdots$
1	2	3	1	2	
3	1	2	3	1	
		$\vdots$			$\ddots$

Рис. 2:

$$k_A + 0 \cdot k_B + 0 \cdot k_C + 2 \cdot k_D = 3k_D + (k_A - k_D),$$

делится на 3, а значит, и число $k_A - k_D$, делится на 3. Совершенно аналогично получаем, что $k_B - k_C$ делится на 3 (можно использовать расстановку чисел, показанную на рисунке 2).

Через k'_A, k'_B, k'_C и k'_D обозначим, соответственно, новые количества плиток напавлений A, B, C и D после того как Вася заменил одну плитку из набора на плитку другого направления. Тогда выполнено одно из равенств

$$k'_A - k'_D = k_A - k_D \pm 1, \quad k'_A - k'_D = k_A - k_D \pm 2,$$
$$k'_B - k'_C = k_B - k_C \pm 1, \quad k'_B - k'_C = k_B - k_C \pm 2.$$

Следовательно, одно из чисел $k'_A - k'_D$ или $k'_B - k'_C$ не делится на 3. Таким образом, получено противоречие, завершающее решение задачи.

9 класс

9.1. Ответ: на 10 вопросов из 18.

Пусть на викторине было n легких, n средних и n трудных вопросов. Пусть Вася ответил на a легких, b средних и c трудных вопросов. Тогда он неправильно ответил на $n-a$ легких вопросов и $n-b$ средних вопросов. Поэтому он получил $3a-3(n-a)+4b-2(n-b)+6c = 6(a+b+c)-5n$ баллов. Согласно условию $6(a+b+c)-5n=30$, или $6(a+b+c)=30+5n$. Из полученного равенства следует, что $n \vdots 6$. Тогда, очевидно, что $n \geqslant 6$. При $n=6$ общее число вопросов на викторине $3n=18$, из них Вася ответил правильно на $a+b+c=(5\cdot 6+30):6=10$ вопросов, что составляет более половины от 18. Легко проверить, что все условия выполняются, например при $a=5$, $b=3$, $c=2$.

Докажем, что $n>6$ не удовлетворяет условию задачи. Действительно, при $n>6$ и, значит, с учетом делимости на 6, при $n \geqslant 12$, отношение числа правильно данных Васей ответов к числу всех вопросов равно

$$\frac{a+b+c}{3n} = \frac{5+5n:6}{3n} = \frac{5}{3n}+\frac{5}{18} < [n \geqslant 12] < \frac{5}{36}+\frac{5}{18} = \frac{15}{36} < \frac{1}{2},$$

что противоречит условию задачи о том, что Вася правильно ответил, более чем на половину вопросов. Таким образов, Вася правильно ответил на 10 вопросов из 18, предложенных на викторине.

9.2. Достаточно показать, что $(a+b-2c)(b+c-2a)(c+a-2b)=0$. Путем равносильных преобразований из последнего равенства получаем

$$(ab+ac-2a^2+b^2+bc-2ab-2bc-2c^2+4ac)(c+a-2b)=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (-ab+5ac-2a^2+b^2-bc-2c^2)(c+a-2b)=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; -abc+5ac^2-2a^2c+b^2c-bc^2-2c^3-a^2b+5a^2c-2a^3+$$

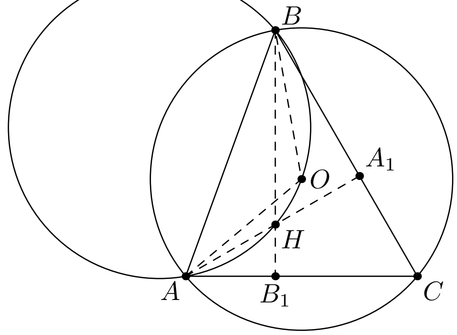
$$+ab^2-abc-2ac^2-2ab^2-10abc+4a^2b-2b^3+2b^2c+4bc^2=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 3\left(ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)\right) = 2\left(a^3+b^3+c^3\right)+12abc \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 3\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}\right) = 2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}\right)+12.$$

9.3. Ответ: 60°.

Пусть O — центр описанной около треугольника ABC окружности, H — ортоцентр треугольника, A_1, B_1 — основания высот, проведенных из вершин A и B соответственно. Пусть $\gamma = \angle ACB$. Поскольку угол AOB — центральный угол, а угол ACB — вписанный угол окружности, описанной около треугольника ABC, и эти углы опираются на одну и ту же дугу AB, то $\angle AOB = 2\angle ACB = 2\gamma$. Далее, $AA_1 \perp BC$, $BB_1 \perp AC$ поэтому $\angle HA_1C = \angle HB_1C = 90^\circ$. Следовательно,



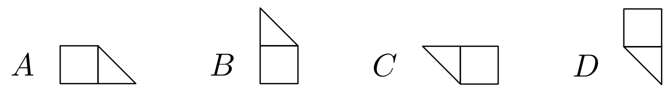
$$\angle AHB = \angle A_1HB_1 =$$

$$= 360^\circ - \angle HA_1C - \angle HB_1C - \angle ACB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \gamma = 180^\circ - \gamma.$$

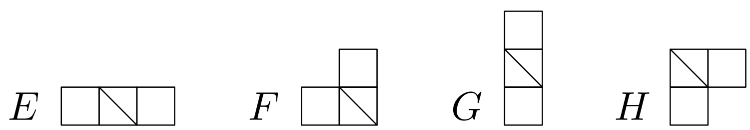
Углы AHB и AOB — вписанные углы окружности, проходящей через точки A, B, O, H, опираются на одну и ту же дугу AB, поэтому $\angle AOB = \angle AHB$, т.е $2\gamma = 180^\circ - \gamma$, откуда $3\gamma = 180^\circ$ и $\gamma = 60^\circ$.

9.4. Ответ : Нет, не сможет.

Предположим противное, т.е. предположим, что Вася сможет замостить прямоугольник размера $n \times m$, поменяв одну плитку. Рассмотрим четыре типа плиток из набора Васи:



Через k_A, k_B, k_C и k_D обозначим количество плиток типов A, B, C и D соответственно. Так как каждая плитка типов A или B должна примыкать по уголку к плитке типов C или D, и наоборот, то из того, что Васе удалось замостить прямоугольник размера $n \times m$, следует равенство $k_A + k_B = k_C + k_D$. Плитки типов A, B, C и D могут состыковаться следующим образом:



Через l_E, l_F, l_G и l_H обозначим количество пар плиток, состыковывающихся по типами E, F, G и H. Тогда справедливы равенства

$$k_A = l_E + l_F, \quad k_B = l_G + l_H, \quad k_C = l_E + l_H \quad \text{и} \quad k_D = l_F + l_G.$$

Без нарушения общности, предположим, что Вася поменял плитку типа A на плитку типов B, C или D. Через k'_A, k'_B, k'_C и k'_D обозначим, соответственно, новое количество плиток типов A, B, C и D, после того как Вася заменил плитку. Для чисел справедливо равенство $k'_A + k'_B = k'_C + k'_D$. Если Вася поменял плитку типа A на плитку типов C или D, то

$$k'_A = k_A - 1, \quad k'_B = k_B \quad \text{и} \quad k'_C + k'_D = k_C + k_D + 1, \quad \text{а значит,} \quad k'_A + k'_B \neq k'_C + k'_D.$$

Таким образом, Вася мог поменять плитку типа A только на плитку типа B. Так как каждая пара типов E, F, G и H состоит из трех клеток, то общее количество клеток в прямоугольнике $n \times m$ делится на 3. Без нарушения общности предположим, что m (ширина прямоугольника) делится на 3. Записывая в каждую клетку прямоугольника числа 1, 2 и 3 (см. рисунок 1 к решению задачи 8.4), не сложно доказать, что $l_F - l_H$ делится на 3. Через l'_E, l'_F, l'_G и l'_H обозначим, соответственно, новое количество пар плиток, состыковывающихся по типами E, F, G и H, после того как Вася заменил плитку типа A на плитку типа B. Тогда $l'_E + l'_F = k'_A = k_A - 1$ и $l'_E + l'_H = k'_C = k_C$. Следовательно,

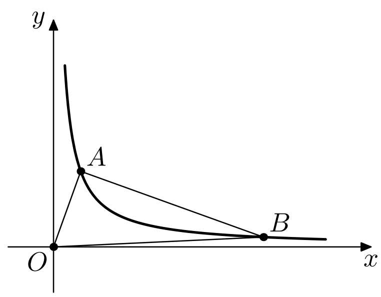
$$l'_F - l'_H = (l'_E + l'_F) - (l'_E + l'_H) = k_A - k_C - 1 = (l_E + l_F) - (l_E + l_H) - 1 = l_F - l_H - 1.$$

Поэтому, число $l'_F - l'_H$ не делится на 3. Полученное противоречие завершает решение задачи.

10 класс

10.1. Ответ : $\dfrac{3}{2}\sqrt{5}$.

Пусть координаты точек A и B будут $A = (a, 1/a)$, $B = (b, 1/b)$. Тогда легко записать уравнения прямых



$$OA\colon\ y = \frac{x}{a^2},$$
$$AB\colon\ y = -\frac{x}{ab} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Поскольку угол OAB прямой, то прямые OA и AB перпендикулярны и произведение их угловых коэффициентов равно -1, т.е. $\dfrac{1}{a^2}\cdot\left(-\dfrac{1}{ab}\right) = -1$, откуда $b = \dfrac{1}{a^3}$. Тогда по формуле расстояния между точками на координатной плоскости получим

$$OA^2 = a^2 + \frac{1}{a^2}, \quad OB^2 = b^2 + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{a^6} + a^6.$$

Заметим, что

$$OB^2 = \frac{1}{a^6} + a^6 = \frac{1}{a^6} + 3a^4\frac{1}{a^2} + 3a^2\frac{1}{a^4} + a^6 - 3a^4\frac{1}{a^2} + 3a^2\frac{1}{a^4} =$$

$$= \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^3 - 3\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) = OA^6 - 3OA^2.$$

По теореме Пифагора $AB^2 = OB^2 - OA^2$, поэтому $AB^2 = OA^6 - 4OA^2$.

Полагая в этом уравнении $OA^2 = t$ и подставляя заданное значение $AB = \sqrt{15}$, получим

$$t^3 - 4t - 15 = 0. \qquad (1)$$

Попробуем найти целое положительное решение этого уравнения. Для этого достаточно проверить лишь четыре возможных значения: 1, 3, 5 и 15. Легко видеть, что $t = 3$ является решением уравнения (1), поскольку $3^3 - 4\cdot 3 - 15 = 27 - 12 - 15 = 0$. Разделив многочлен $t^3 - 4t - 15$ на одночлен $t - 1$, получим $t^3 - 4t - 15 = (t-3)(t^2 + 3t + 5)$. Поскольку дискриминант квадратного трехчлена $(t^2 + 3t + 5)$ равен $D = 3^2 - 4\cdot 5 < 0$, уравнение (1) имеет единственный действительный корень $t = 3$. Итак $OA^2 = 3$.

Следовательно, искомая площадь

$$S = \frac{1}{2}OA\cdot AB = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\sqrt{15} = \frac{3}{2}\sqrt{5}.$$

10.2. Ответ : а) нет; б) да.

а) Утверждение не имеет места. Например, пусть $a = 3$. Пусть натуральное n_0 таково, что $f(n_0)$ делится на 9. Тогда $f(n_0)$ должно делиться и на 3. Поскольку 2016 и a делятся на 3, то $2016n_0 + a$ делится на 3, и тогда n_0^2 должно делиться на 3, а так как 3 — простое число, то и n_0 должно делиться на 3. Следовательно, $n_0 = 3m$, где m — некоторое целое число. Но тогда $f(n_0) = 9m^2 + 2016\cdot 3m + 3 = 9m^2 + 9\cdot 672m + 3$. Два первых слагаемых этой суммы делятся на 9 при любом целом m, а последнее слагаемое делится на 3, но не на 9. Следовательно, все выражение не делится на 9 ни при каком целом m.

б) По условию существует такое целое n_0, что $f(n_0)$ делится на 3. Пусть $n_0 = 3m + r$, где m — некоторое целое число, а r принимает одно из значений 0, 1 или 2. Тогда

$$f(n_0) = 9m^2 + 6mr + r^2 + 2016 \cdot 3m + 2016r + a = 9m^2 + 2016 \cdot 3m + 2016r + 6mr + r^2 + a.$$

Так как 2016 делится на 3, то сумма $9m^2 + 2016 \cdot 3m + 2016r + 6mr$ делится на 3, и, следовательно, сумма $r^2 + a$ также делится на 3. Это означает, что если m и r таковы, что $f(n_0) = f(3m + r)$ делится на 3, то и при любом целом k числа $f(3k + r)$ будут делиться на 3. Заметим, что r не может быть равно нулю, ибо в противном случае число $r^2 + a = a$ делится на 3, что противоречит условию. Итак, при $n = 3k + r$ имеем

$$f(n) = f(3k + r) = 9k^2 + 6kr + r^2 + 2016 \cdot 3k + 2016r + a =$$

$$= 9k^2 + 2016 \cdot 3k + 2016r + 6kr + r^2 + a = 9(k^2 + 672k + 224r) + (6kr + r^2 + a).$$

Поскольку $9(k^2 + 672k + 224r)$ делится на 9 при любых k и r, то для того, чтобы доказать существование такого целого числа n, при котором $f(n)$ делится на 9, достаточно доказать существование такого целого k, при котором при заданных a и $r \neq 0$ число $6kr + r^2 + a$ делится на 9. Поскольку a и r^2 таковы, что $r^2 + a$ делится на 3, то полагая $r^2 + a = 3s$, получим $6kr + r^2 + a = 3(2kr + s)$. Следовательно, достаточно доказать, что при заданных a и $r \neq 0$, а, значит при заданном s существует такое целое k, что $(2kr + s)$ делится на 3. Последнее утверждение, очевидно, будет иметь место, если мы покажем, что для любых $r = 1, 2$ существует такое k, что число $2kr$ имеет любой наперед заданный остаток от деление на 3. Для этого достаточно проверить, что это выполнено для $k = 0, 1, 2$.

1) Если $r = 1$, то

$$2kr = 2k \overset{(\mathrm{mod}\ 3)}{\equiv} \begin{cases} 0 & \text{при } k = 0, \\ 2 & \text{при } k = 1, \\ 1 & \text{при } k = 2. \end{cases}$$

2) Если $r = 2$, то

$$2kr = 4k \overset{(\mathrm{mod}\ 3)}{\equiv} \begin{cases} 0 & \text{при } k = 0, \\ 1 & \text{при } k = 1, \\ 2 & \text{при } k = 2. \end{cases}$$

Таким образом, сформулированное в условии утверждение имеет место.

10.3. Ответ: 60°, 120°.

Пусть O — центр описанной около треугольника ABC окружности, H — ортоцентр треугольника, A_1, B_1 — основания высот, проведенных из вершин A и B соответственно. Пусть $\gamma = \angle ACB$. Поскольку угол AOB — центральный угол, а угол ACB — вписанный угол окружности, описанной около треугольника ABC, и эти углы опираются на одну и ту же хорду AB, то, если они лежат по разные стороны хорды AB, то

$$\angle AOB = 2(180^\circ - \angle ACB) = 360^\circ - 2\gamma, \qquad (1)$$

если же они лежат по одну сторону хорды AB, то

$$\angle AOB = 2\angle ACB = 2\gamma, \qquad (2).$$

Поскольку $AA_1 \perp BC$, $BB_1 \perp AC$ то углы AHB и ACB — углы с взаимно перпендикулярными сторонами, и, следовательно, либо

$$\angle AHB = \angle ACB, \qquad (3),$$

либо

$$\angle AHB = 180^\circ - \angle ACB, \qquad (4).$$

Далее, точки A, B, H, O лежат на одной окружности, тогда вписанные углы AHB и AOB опираются на одну и ту же хорду AB. Поэтому, в зависимости от того лежат ли эти углы по разные стороны от хорды AB или по одну сторону от нее, имеем либо

$$\angle AHB = 180^\circ - \angle AOB, \qquad (5)$$

либо

$$\angle AHB = \angle AOB. \qquad (6)$$

Таким образом, принципиально возможны следующие случаи:

1) выполнены равенства (1), (3), (5), тогда

$$360^\circ - 2\gamma = \angle AOB = 180^\circ - \angle AHB = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \gamma \implies \gamma = 180^\circ,$$

что невозможно;

2) выполнены равенства (1), (3), (6) тогда

$$360^\circ - 2\gamma = \angle AOB = \angle AHB = \angle ACB = \gamma \implies \gamma = 120^\circ;$$

3) выполнены равенства (1), (4), (5) тогда

$$360^\circ - 2\gamma = \angle AOB = 180^\circ - \angle AHB = 180^\circ - (180^\circ - \angle ACB) = \gamma \implies \gamma = 120^\circ;$$

4) выполнены равенства (1), (4), (6) тогда

$$360^\circ - 2\gamma = \angle AOB = \angle AHB = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \gamma \implies \gamma = 180^\circ,$$

что невозможно;

5) выполнены равенства (2), (3), (5) тогда

$$2\gamma = \angle AOB = 180^\circ - \angle AHB = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \gamma \implies \gamma = 60^\circ,$$

6) выполнены равенства (2), (3), (6) тогда

$$2\gamma = \angle AOB = \angle AHB = \angle ACB = \gamma \implies \gamma = 0^\circ,$$

что невозможно;

7) выполнены равенства (2), (4), (5) тогда

$$2\gamma = \angle AOB = 180^\circ - \angle AHB = 180^\circ - (180^\circ - \angle ACB) = \gamma \implies \gamma = 0^\circ,$$

что невозможно;

8) выполнены равенства (2), (4), (6) тогда

$$2\gamma = \angle AOB = \angle AHB = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \gamma \implies \gamma = 60^\circ.$$

Следовательно, угол ACB может принимать лишь два значения: либо 60°, либо 120°.

Оба эти возможности реализуются, например, для остроугольного треугольника (см. рис. 1) $\angle ACB = 60^\circ$, для тупоугольного треугольника с тупым углом ACB (см. рис. 2) $\angle ACB = 120^\circ$.

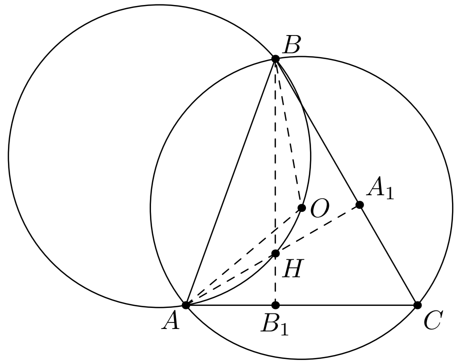


Рис. 1

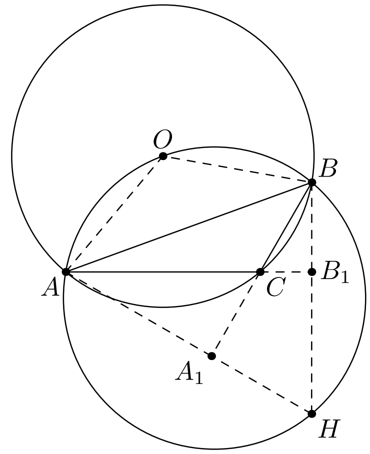


Рис. 2

10.4. Ответ : **а)**, **б)** нет, не могли.

Рассмотрим два соседних треугольника, т. е. два треугольника, имеющих общую сторону. У соседних треугольников две вершины общие, и такие треугольники окрашены в разные цвета. Поэтому числа в несовпадающих вершинах у соседних треугольников не могут быть равными. Действительно, в противном случае суммы чисел в вершинах соседних треугольников были бы равными и, значит, одновременно были бы либо кратны 3, либо нет, что противоречит условию задачи. Поэтому, если, например, в центральной вершине диаграммы записано число a, то ни одно из чисел в Вершинах A, B и C не может равняться a. Поэтому три числа в этих трёх вершинах могут принимать только два из возможных значений (отличных от a) и, значит, не могут все быть различными.

Пусть $\{a,\ b,\ c\} = \{0,\ 1,\ 2\}$ и пусть в центральной вершине диаграммы вписано число a. Тогда есть две возможности: 1) либо в вершинах верхнего чёрного треугольника все числа равны и отличны от a (см. рис. 1), либо 2) в вершинах верхнего чёрного треугольника все числа различны и верхнее отлично от a (см. рис. 2). В обоих случаях числа слева и справа от центрального числа определяются однозначно.

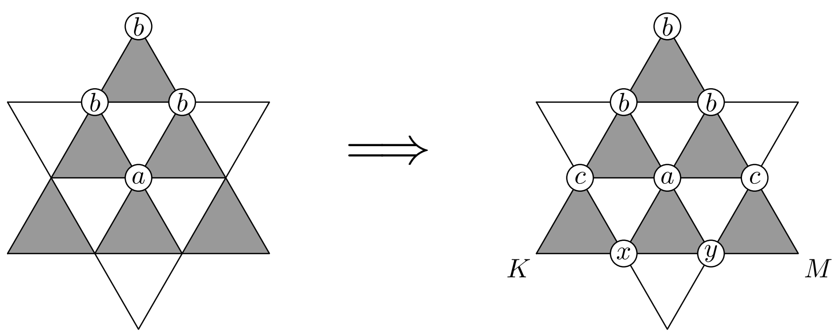


Рис. 1

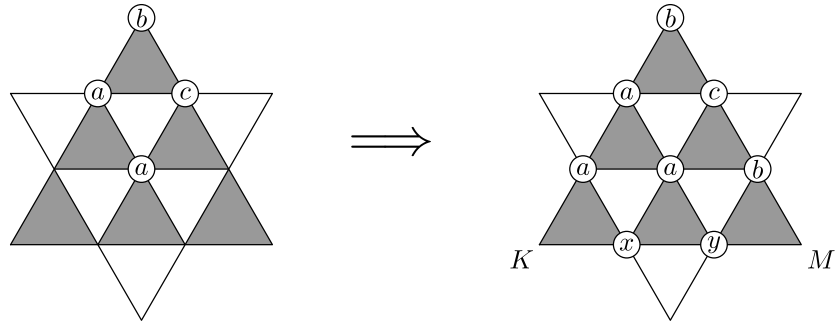


Рис. 2

В случае 1) $x \neq b$ и $y \neq b$, иначе сумма чисел в каком-то из нижних белых треугольников будет кратна 3. Поэтому $x = y = a$ и, значит в вершинах K и M записаны числа b.

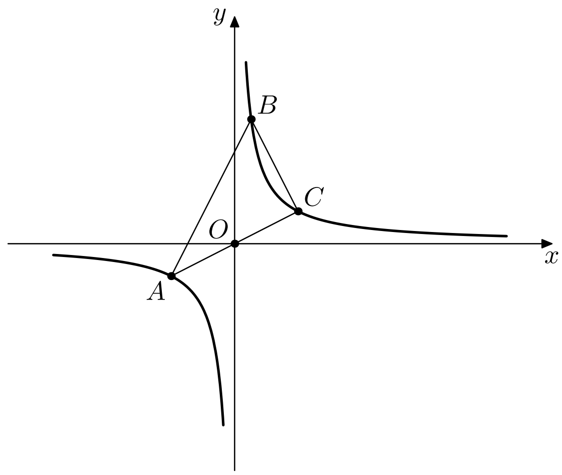
В случае 2) $x \neq a$, $y \neq c$, иначе сумма чисел в каком-то из нижних белых треугольников будет кратна 3.Но тогда $\{x,\ y\} = \{b,\ c\}$ и, значит, $x = c$, $y = b$. Поэтому снова в вершинах K и M записаны числа b.

Видим, что во всех трёх вершинах K, L и M записаны одинаковые числа.

11 класс

11.1. Ответ: 8.

Пусть координаты точек C и B будут $C = (c, 1/c)$, $B = (b, 1/b)$. Так как точки A и C симметричны относительно начала координат, то точка A имеет координаты $A = (-c, -1/c)$.



Нетрудно выписать (например, методом неопределенных коэффициентов) уравнения прямых

$$AC\colon\ y = \frac{x}{c^2},$$

$$BC\colon\ y = -\frac{x}{bc} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Поскольку угол ACB прямой, то прямые AC и BC перпендикулярны и произведение их угловых коэффициентов равно -1, т.е. $\frac{1}{c^2} \cdot \left(-\frac{1}{bc}\right) = -1$, откуда $b = \frac{1}{c^3}$. Тогда по формуле расстояния между точками на координатной плоскости получим

$$AC^2 = 4\left(c^2 + \frac{1}{c^2}\right) = 4\frac{c^4+1}{c^2},$$

$$AB^2 = (b+c)^2 + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \left(\frac{1}{c^3} + c\right)^2 + \left(c^3 + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{(c^4+1)^3}{c^6} = \left(\frac{AC^2}{4}\right)^3 = \left(\frac{AC}{2}\right)^6.$$

По теореме Пифагора

$$BC^2 = AB^2 - AC^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^6 - AC^2 = AC^2\left(\frac{AC^4}{64} - 1\right).$$

Тогда

$$S^2 = \left(\frac{1}{2}AC \cdot BC\right)^2 = \frac{1}{4}AC^2 \cdot BC^2 = \frac{1}{4}AC^4\left(\frac{AC^4}{64} - 1\right).$$

Обозначим $t = AC^4$. Тогда t удовлетворяет уравнению

$$t^2 - 64t - 256S^2 = 0 \implies t = 32 \pm \sqrt{32^2 + 256S^2} = 32 \pm 16\sqrt{4 + S^2}.$$

Подставляя значение $S = 8\sqrt{3}$ и учитывая, что $t > 0$, находим $t = 256$. Следовательно, $AC = 4$ и тогда $AB = \frac{AC^3}{8} = 8$.

11.2. Ответ: 2015

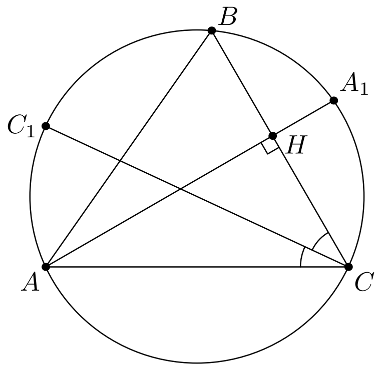
Пусть для некоторых пар (a, b) и (x, y) (не ограничивая общности, пусть $b < y$) натуральных чисел верно равенство

$$N = 15a + 200b = 15x + 200y \quad \Rightarrow \quad 3(a - x) = 40(y - b),$$

из этого равенства следует, что $y - b$ делится на 3, и, значит, не меньше 3. Выберем среди четырёх решений уравнения $15x + 200y = N$ пару (x, y) с наибольшим значением y, тогда $y \geqslant 1 + 3 \cdot 3 = 10$, откуда получаем неравенство $N \geqslant 15 \cdot 1 + 200 \cdot 10 = 2015$. Легко видеть, что $N = 2015$ подходит, выпишем для него пары (x, y): $(121, 1)$, $(81, 4)$, $(41, 7)$, $(1, 10)$.

11.3. Ответ: 60° и 80°.

Так как хорды AA_1 и CC_1 описанной окружности, по условию, равны, то равны



и какие-то дуги стягиваемые этими хордами, а именно, либо 1) $\smile ABA_1 = \smile C_1BC$, либо 2) $\smile ABA_1 = \smile C_1AC$.

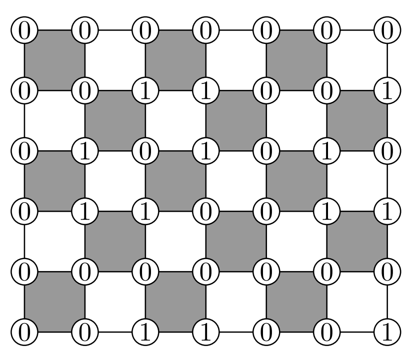
В случае 1), удалив из дуг $\smile ABA_1$ и $\smile C_1BC$ их общую часть — дугу $\smile C_1BA_1$, получим $\smile AC_1 = \smile A_1C$. Из равенства этих дуг следует, что равны и вписанные углы, которые на них опираются: $\angle ACC_1 = \angle CAA_1$. Обозначим $\angle ACB = \gamma$. Тогда $\angle ACC_1 = \dfrac{\gamma}{2}$. В прямоугольном треугольнике ACH находим $\angle CAH = 90^\circ - \angle ACH = 90^\circ - \gamma$. В результате имеем: $\dfrac{\gamma}{2} = 90^\circ - \gamma$, откуда $\gamma = 60^\circ$.

В случае 2) удалив из дуг $\smile ABA_1$ и $\smile C_1AC$ их общую часть — дугу $\smile C_1A$, получим $\smile AC = \smile C_1BA_1$. Поскольку на дугу $\smile CA$ опирается вписанный угол CBA, равный, по условию 65°, то $\smile CA = 130^\circ$. Далее, так как $\angle C_1CB = \dfrac{\gamma}{2}$, то $\smile C_1B = \gamma$. В прямоугольном треугольнике ABH находим $\angle HAB = 90^\circ - \angle ABH = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$. Поэтому $\smile BA_1 = 50^\circ$. Тогда $\smile C_1BA_1 = \gamma + 50^\circ$. В результате имеем: $\gamma + 50^\circ = \smile C_1BA_1 = \smile AC = 130^\circ$, откуда $\gamma = 80^\circ$.

11.4. Ответ : 1 и 3.

Заметим, что шахматная раскраска данной таблицы единственная с точностью до поворота на 180°. Покажем сначала, что сумма всех чисел в четырех угловых точках таблицы нечетна. Поскольку в любой строке таблицы по 3 черных и 3 белых клетки, то количества черных и белых клеток в таблице равны по $5 \cdot 6 : 2 = 15$.

Для каждой белой клетки таблицы вычислим сумму всех четырех чисел в ее вершинах; сложим 15 полученных чисел и обозначим их сумму S_1. Заметим, что S_1 — нечетное число, как сумма 15 нечетных чисел. Точно так же для каждой черной клетки таблицы вычислим сумму всех четырех чисел в ее вершинах; сложим 15 полученных чисел и обозначим их сумму S_2. Полученная сумма S_2 — четное число, как сумма 15 четных чисел. Таким образом, $S_1 + S_2$ — нечетное число. Заметим, что в указанной сумме $S_1 + S_2$ число в любой внутренней точке таблицы присутствует 4 раза, а число в любой граничной (но не угловой) клетке — 2 раза. Стало быть все числа в указанных точках вносят в сумму $S_1 + S_2$ четный вклад. А так как числа в четырех угловых точках таблицы присутствуют в сумме $S_1 + S_2$ ровно по одному разу, то их сумма имеет такую же четность, как сумма $S_1 + S_2$, т.е. является нечетной. Следовательно, искомая сумма может быть равно только 1 или 3. Ниже приведен пример, что эта сумма действительно может равняться 1. Если в указанном примере заменить все нули заменить на единицы и наоборот, то полученной таблицы условие задачи сохранится, а искомая сумма будет равна 3.



LXVI Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

11 – 15 января 2016 года

Решения

Второй день

8 класс

8.5. Ответ : Покажем, что числитель первой дроби в требуемом неравенстве

$$\frac{a^2+b^2+1}{a+b+1} \geqslant \frac{ab+a+b}{ab+2} \tag{1}$$

больше числителя второй его дроби, а знаменатель первой дроби меньше знаменателя второй дроби, откуда и будет следовать неравенство (1).

Действительно, во-первых,

$$a^2+b^2+1 \geqslant ab+a+b \iff 2a^2+2b^2+2 \geqslant 2ab+2a+2b \iff$$

$$(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1) \geqslant 0 \iff (a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2 \geqslant 0.$$

Во-вторых,

$$(a-1)(b-1) \geqslant 0 \implies ab-a-b+1 \geqslant 0 \implies a+b+1 \leqslant ab+2,$$

что и требовалось.

8.6. Ответ : 1 и -17 .

Преобразуем данную дробь следующим образом:

$$\frac{n^2-2n-5}{3n-2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3n^2-6n-15}{3n-2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3n-2)n-(4n+15)}{3n-2} =$$

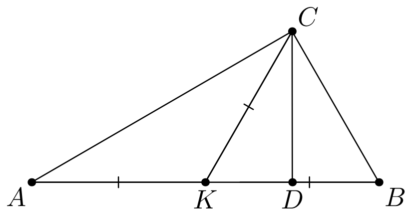
$$= \frac{1}{3}\left(n-\frac{4n+15}{3n-2}\right) = \frac{1}{3}\left(n-\frac{1}{3}\cdot\frac{12n+45}{3n-2}\right) = \frac{1}{9}\left(3n-\frac{4(3n-2)+53}{3n-2}\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\left(3n-4-\frac{53}{3n-2}\right).$$

Видим, что данная дробь будет целым числом тогда и только тогда полученное в скобках выражение будет целым числом, кратным 9. Для этого, в частности, необходимо, чтобы $\frac{53}{3n-2}$ было целым числом, или, что то же самое, чтобы $3n-2$ было делителем числа 53. У числа 53 есть только 4 целых делителя: ±1 , ±53 . Однако, если $3n-2=-1$ или $3n-2=53$, то n не является целым. Если же $3n-2=1$, то $n=1$, а если $3n-2=-53$, то $n=-17$. Непосредственно подставив эти два значения n в данную в условии задачи дробь, можно убедиться, что в обоих случаях она будет равна целому числу -6 .

8.7. Ответ : $2,\ 2\sqrt{3},\ 4.$

Пусть $\alpha=\angle BAC$, $\beta=\angle ABC$. Не нарушая общности, считаем $\beta>\alpha$. Тогда



$\beta-\alpha=30^\circ$, $\alpha+\beta=90^\circ$. Пусть CD — высота, опущенная на гипотенузу, $CD=\sqrt{3}$. Пусть K — такая точка на гипотенузе AB, что $\angle DCK=\beta-\alpha$. Тогда

$$\angle DKC=90^\circ-\angle DCK=90^\circ-(\beta-\alpha)=$$

$$=(90^\circ-\beta)+\alpha=\alpha+\alpha=2\alpha.$$

Поскольку угол DKC — внешний угол треугольника AKC, то $\angle ACK=\angle DKC-\angle KAC=2\alpha-\alpha=\alpha$, поэтому треугольник AKC равнобедренный и $AK=KC$. Кроме того,

$$\angle KCB=180^\circ-\angle BKC-\angle KBC=180^\circ-2\alpha-\beta=180^\circ-\alpha-(\alpha+\beta)=180^\circ-\alpha-90^\circ=$$

$$=90^\circ-\alpha=\beta=\angle KBC.$$

Следовательно, треугольник KBC также равнобедренный и $KC=KB$, откуда $AK=KC=KB$. Таким образом, K — центр описанной окружности прямоугольного треугольника ABC. Подставляя заданные числовые значения, находим $2\alpha=\angle DKC=90^\circ-(\beta-\alpha)=60^\circ$, т.е. $\alpha=30^\circ$ и тогда $\beta=60^\circ$. Поскольку в прямоугольном треугольнике CKD углы KCD и CKD равны 30° и 60° соответственно, то $\sqrt{3}=CD=KC\sqrt{3}/2$, откуда $KC=2$. Тогда в прямоугольном треугольнике ABC имеем

$$AB=2KC=4,\quad BC=AB/2=2,\quad AC=AB\sqrt{3}/2=2\sqrt{3}.$$

8.8. Ответ: 18.

Обозначим четыре числа, удовлетворяющих условию задачи, через a, b, c, d.

Пусть, без нарушения общности, $a+b=15$. Тогда для суммы S этих чисел имеем оценку снизу:

$$S=a+b+c+d=(a+b)+c+d=15+c+d\geqslant 15+1+2=18.$$

С другой стороны, несложно привести пример четырёх чисел, удовлетворяющих условию задачи, сумма которых равна 18. Такой пример доставляют числа 1, 2, 3, 12. В самом деле, сумма этих чисел равна $1+2+3+12=18$, а среди их попарных сумм содержатся суммы 13, 14 и 15 — действительно: $1+12=13$, $2+12=14$, $3+12=15$.

9.5. Так как по условию квадратные трёхчлены $P(x) = ax^2 + bx + c$, $Q(x) = bx^2 + cx + a$, $R(x) = cx^2 + ax + b$ не имеют действительных корней, то их дискриминанты отрицательные, поэтому

$$b^2 - 4ac < 0, \quad c^2 - 4ba < 0, \quad a^2 - 4cb < 0,$$

откуда

$$0 \leqslant b^2 < 4ac, \quad 0 \leqslant c^2 < 4ba, \quad 0 \leqslant a^2 < 4cb. \tag{1}$$

Следовательно, все произведения ac, ba, cb положительные, и, значит, все числа a, b, c имеют одинаковый знак. Очевидно, что если требуемое неравенство

$$2ab + 2bc + 2ca > a^2 + b^2 + c^2 \tag{2}$$

выполнено для положительных a, b, c, то оно будет выполнено и для отрицательных a, b, c. Поэтому можем считать, что все a, b, c положительные числа.

Первое решение. Поскольку по условию трёхчлены $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ не имеют действительных корней, а их старшие коэффициенты a, b, c положительные, то $P(x) > 0$, $Q(x) > 0$, $R(x) > 0$ при всех действительных значениях x, в частности при $x = -1$. Следовательно,

$$P(-1) = a - b + c > 0, \quad Q(-1) = b - c + a > 0, \quad R(-1) = c - a + b > 0.$$

Тогда

$$0 < P(-1)Q(-1) + Q(-1)R(-1) + R(-1)P(-1) =$$
$$= (a - b + c)(b - c + a) + (b - c + a)(c - a + b) + (c - a + b)(a - b + c) =$$
$$= (b-c+a)(a-b+c+c-a+b) + (c-a+b)(a-b+c) = 2c(b-c+a) + (c-a+b)(a-b+c) =$$
$$= 2cb - 2c^2 + 2ca + ca - cb + c^2 - a^2 + ab - ac + ba - b^2 + bc = 2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2,$$

откуда и следует, требуемое неравенство (2).

Второе решение. Не нарушая общности, считаем $0 < a \leqslant b \leqslant c$. Тогда

$$2ab + 2bc + 2ca = ab + bc + ab + bc + 2ca \geqslant [b \geqslant a, c \geqslant b] \geqslant a^2 + b^2 + ab + bc + 2ca \geqslant$$
$$\geqslant [c \geqslant b \geqslant a] \geqslant a^2 + b^2 + ab + ba + 2ba = a^2 + b^2 + 4ba > [\text{см.}(1)] > a^2 + b^2 + c^2,$$

что и требовалось доказать.

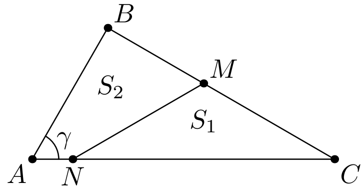
9.6. Ответ: 2.

Пусть $\gamma = \angle ACB$. Тогда

$$\begin{aligned}
S &= 0,5AC \cdot BC \sin\gamma,\\
S_1 &= 0,5NC \cdot MC \sin\gamma = [MC = AB,\ NC = BC] = BC \cdot AB \sin\gamma,\\
S_2 &= S - S_1 = 0,5(AC \cdot BC - AB \cdot BC)\sin\gamma = 0,5BC(AC - AB)\sin\gamma.
\end{aligned}$$

По условию $S^2 \leqslant 4S_1 \cdot S_2$, поэтому

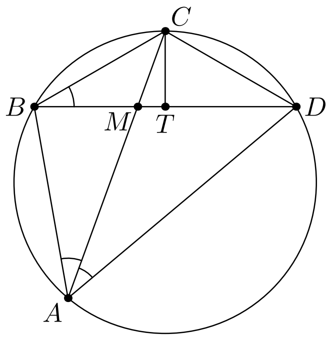
$$0,25AC^2 \cdot BC^2 \sin^2\gamma \leqslant 4 \cdot 0,5BC \cdot AB \sin\gamma \cdot 0,5BC(AC - AB)\sin\gamma.$$



Следовательно, $AC^2 \leqslant 4AB(AC - AB)$. Пусть $x = AC/AB$, тогда $x^2 \leqslant 4(x-1)$, т.е. $x^2 - 4x + 4 \leqslant 0$ или, равносильно, $(x-2)^2 \leqslant 0$. Последнее неравенство возможно лишь при $x = 2$. Таким образом, единственным значением отношения $AC : AB = x$ является $x = 2$.

9.7. Ответ: $60°$.

Пусть $MC = x$, тогда $AM = 3x$, $AC = 4x$, $BD = 2\sqrt{3}x$. Отметим, что $\angle BAC = \angle CBD$ (вписанные углы, опирающиеся на дугу CD). Тогда треугольники CBM и CAB подобны по двум углам ($\angle BAC = \angle CBM$, угол BCA общий), поэтому



$$\frac{BC}{AC} = \frac{CM}{BC} \implies BC^2 = AC \cdot CM = 4x^2 \implies BC = 2x.$$

Поскольку AC — биссектриса угла BAD, то хорды BC и DC равны, т.е. треугольник BCD равнобедренный и его стороны $BC = CD = 2x$, $BD = 2\sqrt{3}x$. Пусть CT — высота (медиана) треугольника BCD, тогда в прямоугольном треугольнике BCT гипотенуза $BC = 2x$, катет $BT = \sqrt{3}x$ и, следовательно, второй катет $CT = \sqrt{4x^2 - 3x^2} = x$. Так как катет CT в два раза меньше гипотенузы BC, то угол CBT равен $30°$ и тогда $\angle BCD = 2\angle BCT = 2(90° - 30°) = 120°$. Поскольку четырехугольник $ABCD$ вписанный, то $\angle BAD = 180° - \angle BCD = 60°$.

9.8. Ответ: 42, 52 и любое нечётное число от 43 до 61 включительно.

Обозначим четыре числа, удовлетворяющих условию задачи, через

$$a,\ b,\ c,\ d. \tag{1}$$

Докажем вначале, что каждое из четырёх чисел (1) входит хотя бы в одну из тех пар, суммы чисел которых согласно условию равны

$$11,\ 21,\ 31. \tag{2}$$

Допустим, что это не так: найдётся число (пусть, для определённости, это число d), которое не входит ни в одну из пар с суммами (2). Тогда суммы (2) составлены из пар, выбранных из трёх чисел a, b, c. Но всего различных пар из трёх чисел ровно три, и их суммы — это

$$a+b, \quad a+c, \quad b+c. \tag{3}$$

Так как суммы (3) — это (в каком-то порядке) суммы (2), то $(a+b)+(a+c)+(b+d) = 11+21+31$, или $2(a+b+c) = 63$. Но последнее равенство невозможно, поскольку его левая часть — число чётное, а правая — число нечётное. Полученное противоречие доказывает сформулированное утверждение.

Для тех трёх пар чисел, суммы которых — числа (2), могут представиться только две возможности — среди них: либо 1) найдутся две непересекающиеся пары, либо 2) все три пары имеют общий элемент. Рассмотрим отдельно каждую из этих возможностей.

В случае 1) обозначим через S_1 и S_2 те из сумм (2), которые дают непересекающиеся пары. Тогда сумма S всех четырёх чисел равна $S = S_1 + S_2$ и, следовательно, может равняться только: либо $S = 11+21 = 32$, либо $S = 11+31 = 42$, либо $S = 21+31 = 52$.

Покажем, что чисел с суммой 32, удовлетворяющих условию задачи, не существует. Действительно, пусть, без нарушения общности, $a+b = 31$. Тогда $32 = a+b+c+d = 31+c+d$, откуда $c+d = 1$, что для натуральных чисел c и d невозможно.

Остаётся показать, что два остальных полученных в случае 1) значения 42 и 52 сумм достигаются (реализуются). Несложно убедиться, что примером удовлетворяющих условию задачи чисел с суммой 42 являются числа $1,\ 10,\ 11,\ 20,$ а с суммой 52 — числа $1,\ 10,\ 20,\ 21.$

Рассмотрим теперь случай 2). Пусть a — число, общее все трём парам с суммами чисел (2). Тогда, без нарушения общности, $a+b=11,$ $a+c=21$ и $a+d=31.$ Из этих равенств получаем

$$b=11-a, \quad c=21-a, \quad d=31-a. \tag{4}$$

Так как число b — натуральное, то первое из равенств (4) даёт для числа a оценку сверху: $a \leqslant 10.$ Из равенств (4) для суммы S получаем: $S=a+b+c+d=63-2a,$ а значит, сумма S нечётна и, поскольку натуральное число a может принимать только значения от 1 до $10,$ может принимать разве что нечётные значения от 43 до 61 включительно.

С другой стороны, несложно видеть, что каждое нечётное значение от 43 до 61 для суммы S реализуется: достаточно взять $a,$ последовательно равным $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,$ и при выбранном значении a числа $b,$ c и d определить согласно равенствам (4).

10.5. Ответ: $14 \pm 3\sqrt{15}$.

Заметим, что $g(x) = f(x) - x$. Так как $f(x_1) = f(x_2) = g(x_3) = g(x_4) = 0$, легко получаем $g(x_1) = -x_1$, $g(x_2) = -x_2$, а также $f(x_3) = x_3$, $f(x_4) = x_4$. Поэтому искомое выражение

$$A = (g(x_1))^2 f(x_3) + (g(x_2))^2 f(x_4) = x_1^2 x_3 + x_2^2 x_4.$$

Его несложно вычислить прямой подстановкой корней; однако, можно поступить иначе. Пусть $B = x_1^2 x_4 + x_2^2 x_3$. Заметим, что

$$x_1 x_2 = x_3 x_4 = 1,\ x_1 + x_2 = 3,\ x_3 + x_4 = 4,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 9 - 2 = 7,\ x_3^2 + x_4^2 = (x_3 + x_4)^2 - 2x_3 x_4 = 16 - 2 = 14,$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = 49 - 2 = 47.$$

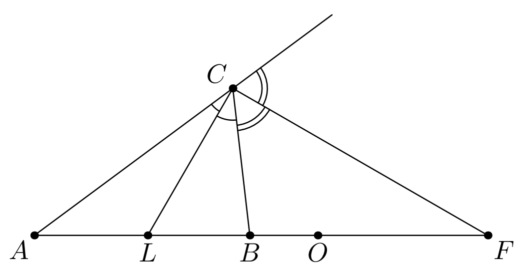
Далее,

$$A + B = (x_1^2 + x_2^2)(x_3 + x_4) = 7 \cdot 4 = 28,\ AB = (x_1^4 + x_2^4)x_3 x_4 + x_1^2 x_2^2 (x_3^2 + x_4^2) = 47 + 14 = 61.$$

Поэтому A и B — корни квадратного уравнения $x^2 - 28x + 61 = 0$ (обратная теорема Виета). Корни этого уравнения $14 + 3\sqrt{15}$ и $14 - 3\sqrt{15}$. Осталось отметить, что если переобозначить, допустим, корни трехчлена $g(x)$: x_3 через x_4, а x_4 через x_3, то значения A и B поменяются местами. Это значит, что искомое значение выражение A может принимать оба указанных выше значения.

10.6. Ответ: 15.

Заметим, что так как $AL > LB$, то из свойства биссектрисы в треугольнике следует, что $AC > CB$. Проведем внешнюю биссектрису угла при вершине C. Поскольку $AC > CB$ то она пересекает прямую AB в точке F, лежащей на продолжении AB за точку B (см. рис.). Так как $LC \perp CF$ (как биссектрисы смежных углов), то указанная в условии окружность является окружностью, описанной вокруг прямоугольного треугольника LCF. Пусть R — ее радиус. Тогда по свойству внешней биссектрисы треугольника имеем $FA : FB = CA : CB = LA : LB$, или $\dfrac{2R + 10}{2R - 6} = \dfrac{10}{6}$, откуда $R = 15$.



10.7. Ответ: $f(x) \equiv 0$.

Поскольку согласно условию равенство

$$f\big(x + f(y)\big) = xf(y) \qquad (*)$$

справедливо для всех x, $y \in \mathbb{R}$, то, подставляя в него вместо x число 0, получим

$$f\big(f(y)\big) = 0$$

для всех $y \in \mathbb{R}$. В частности, существует такое число y_0 (например, $y_0 = f(0)$), что $f(y_0) = 0$.

Тогда, подставляя в левую и правую части равенства $(*)$ вместо y число y_0, получим соответственно:

$$f\big(x + f(y_0)\big) = f(x + 0) = f(x) \quad \text{и} \quad xf(y_0) = x \cdot 0 = 0$$

для всех $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, $f(x) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Поэтому единственной функцией, удовлетворяющей условию задачи, может быть только тождественно нулевая функция.

С другой стороны, очевидно, что если $f \equiv 0$, равенство $(*)$ выполнено при всех $x,\ y \in \mathbb{R}$.

10.8. Ответ: **а)** 33; **б)** 54.

Обозначим пять чисел, удовлетворяющих условию задачи, через

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e. \tag{1}$$

а) Пусть, без нарушения общности, $a + b + c = 30$. Тогда для суммы S чисел (1) имеем оценку снизу:

$$S = a + b + c + d + e = (a + b + c) + d + e = 30 + d + e \geqslant 30 + 1 + 2 = 33.$$

С другой стороны, несложно привести пример пяти чисел, удовлетворяющих условию задачи, сумма которых равна 33. Такой пример доставляют, например, числа $1,\ 2,\ 7,\ 11,\ 12$. В самом деле, сумма этих чисел равна $1+2+7+11+12 = 33$, а среди их сумм по три содержатся суммы $15,\ 20,\ 25,\ 30$ — действительно:

$$1 + 2 + 12 = 15, \quad 2 + 7 + 11 = 20, \quad 2 + 11 + 12 = 25, \quad 7 + 11 + 12 = 30.$$

б) Докажем вначале, что каждое из пяти чисел (1) входит хотя бы в одну из тех четырёх троек, суммы чисел которых согласно условию равны

$$15,\ 20,\ 25,\ 30. \tag{2}$$

Допустим, что это не так: найдётся число (пусть, для определённости, это число e), которое не входит ни в одну из троек с суммами (2). Тогда суммы (2) составлены из троек, выбранных из четырёх чисел $a,\ b,\ c,\ d$. Но всего различных троек из четырёх чисел ровно четыре, и их суммы — это

$$a + b + c, \quad a + b + d, \quad a + c + d, \quad b + c + d. \tag{3}$$

Следовательно, суммы (3) — это (в каком-то порядке) суммы (2). Сумма S_0 чисел (3) равна $3(a+b+c+d)$. Поскольку эта же сумма S_0 равна $15+20+25+30 = 90$, то $a+b+c+d = 30$. Но последнее равенство невозможно, поскольку сумма каких-то трёх из натуральных чисел a, b, c и d равна 30. Полученное противоречие доказывает сформулированное утверждение.

Докажем теперь, что среди четырёх различных троек, выбранных из пяти элементов (1) и таких, что каждый элемент входит хотя бы в одну из них, найдутся две такие, которые пересекаются ровно по одному элементу. Допустим, что это не так. Тогда, поскольку любые две тройки, выбранные из пяти элементов, пересекаются, любые две из рассматриваемых четырёх троек должны пересекаться по двум элементам. Возьмём какие-либо две тройки из рассматриваемых четырёх — тройки t_1 и t_2. Так как у них два общих элемента, то, без нарушения общности, $t_1 = (a, b, c)$ и $t_2 = (a, b, d)$. Поскольку каждый элемент входит хотя бы в одну из рассматриваемых троек, то пусть t_3 — та из них, в которую входит элемент e. Так как тройка t_3 должна пересекаться с каждой из троек t_1 и t_2 по двум элементам, то $t_3 = (a, b, e)$. Но тогда оставшаяся четвёртая тройка не может пересекаться с каждой из троек t_1, t_2 и t_3 ровно по двум общим элементам и быть отличной от них. Противоречие.

Следовательно, среди четырёх троек, дающих суммы (2), найдутся две такие, которые пересекаются ровно по одному элементу. Пусть, без нарушения общности, это тройки (a, b, e) и (c, d, e). Тогда для суммы S чисел (1) имеем оценку сверху:

$$S = a + b + c + d + e = (a + b + e) + (c + d + e) - e \leqslant 25 + 30 - e \leqslant 25 + 30 - 1 = 54.$$

С другой стороны, несложно привести пример пяти чисел, удовлетворяющих условию задачи, сумма которых равна 54. Это числа $1,\ 2,\ 12,\ 17,\ 22$. В самом деле, сумма этих чисел равна $1+2+12+17+22=54$, а среди их сумм по три содержатся суммы $15,\ 20,\ 25,\ 30$ — действительно:

$$1+2+12=15, \quad 1+2+17=20, \quad 1+2+22=25, \quad 1+12+17=30.$$

11 класс

11.5. Ответ: $-21 \pm 5\sqrt{26}$.

Заметим, что $g(x) = f(x) - x$. Так как $f(x_1) = f(x_2) = g(x_3) = g(x_4) = 0$, легко получаем $g(x_1) = -x_1$, $g(x_2) = -x_2$, а также $f(x_3) = x_3$, $f(x_4) = x_4$. Поэтому искомое выражение

$$A = (g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4) = -x_1^3 x_3 - x_2^3 x_4.$$

Его несложно вычислить прямой подстановкой корней; однако, можно поступить иначе. Пусть $B = -x_1^3 x_4 - x_2^3 x_3$. Заметим, что

$$x_1 x_2 = x_3 x_4 = -1,\ x_1 + x_2 = 2,\ x_3 + x_4 = 3,$$

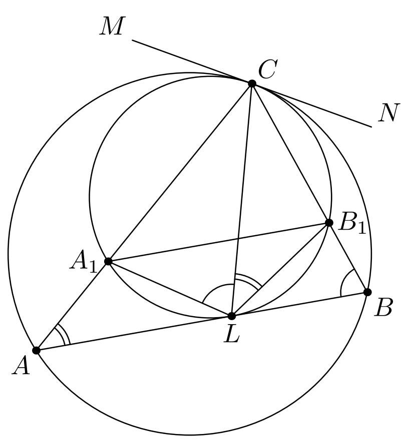
$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 8 + 6 = 14,\ x_3^2 + x_4^2 = (x_3 + x_4)^2 - 2x_3 x_4 = 9 + 2 = 11,$$
$$x_1^6 + x_2^6 = (x_1^3 + x_2^3)^2 - 2x_1^3 x_2^3 = 196 + 2 = 198.$$

Далее,

$$A + B = -(x_1^3 + x_2^3)(x_3 + x_4) = -14 \cdot 3 = -42,$$
$$AB = (x_1^6 + x_2^6) x_3 x_4 + x_1^3 x_2^3 (x_3^2 + x_4^2) = -198 - 11 = -209.$$

Поэтому A и B — корни квадратного уравнения $x^2 + 42x - 209 = 0$ (обратная теорема Виета). Корни этого уравнения $-21 + 5\sqrt{26}$ и $-21 - 5\sqrt{26}$. Осталось отметить, что если переобозначить, допустим, корни трехчлена $f(x)$: x_1 через x_2, а x_2 через x_1, то значения A и B поменяются местами. Это значит, что искомое значение выражение A может принимать оба указанных выше значения.

11.6. Ответ: $S = 24\sqrt{6}$.



Проведем в точке C общую касательную данных окружностей (см. рис.). Тогда $\angle B = 0,5 \smile AC = \angle ACM$ (угол между хордой и касательной для большей окружности). Далее, $\angle A_1LC = 0,5 \smile A_1C = \angle ACM$ (угол между хордой и касательной для меньшей окружности). Таким образом, $\angle A_1LC = \angle B$. Аналогично, $\angle B_1LC = \angle A$.

Далее, $\angle A_!CL = \angle ALA_1 = x$ (угол между хордой и касательной для меньшей окружности), и, аналогично, $\angle B_1CL = \angle BLB_1 = y$. Записывая суммы углов в треугольниках ACL и BCL, получим

$$180^\circ = \angle A + \angle B = 2x = \angle A + \angle B + 2y,$$

откуда $x = y$, т.е. CL — биссектриса угла C.

Далее,

$$\angle CAB = 0,5(\smile CB_1L - \smile AL) = 0,5(\smile CB_1 + \smile B_1L - \smile AL) =$$
$$= 0,5 \smile CB_1 = \angle CA_1B_1.$$

Это означает, что $A_1B_1 \parallel AB$, и тогда треугольник A_1B_1C подобен треугольнику ABC с коэффициентом $A_1B_1 : AB = 9 : 12 = 3 : 4$. Отсюда находим

$$A_1C = \frac{3}{4}AC,\ AA_1 = \frac{1}{4}AC,\ B_1C = \frac{3}{4}BC,\ BB_1 = \frac{1}{4}BC.$$

По теореме о касательной и секущих для точки A и меньшей окружности имеем $AL^2 = AA_1 \cdot AC$, или $49 = \dfrac{1}{4}AC^2$, откуда $AC = 14$. Аналогично, $25 = \dfrac{1}{4}BC^2$, откуда $BC = 10$. Наконец,зная стороны треугольника ABC, находим его полупериметр $p = 0,5(14+10+12) = 18$, и затем по формуле Герона его площадь $S = \sqrt{18\cdot 4\cdot 8\cdot 6} = 24\sqrt{6}$.

11.7. Ответ : $f(x) \equiv 0$.

Зафиксируем какое-либо $y \in (0,+\infty)$, и пусть $f(y) = a$. Тогда в силу равенства из условия задачи получаем $f(x+a) = ax$ для любых $x > 0$, или, обозначив $t = x+a$ (тогда $t > a$), получим

$$f(t) = a(t-a) \quad \text{при всех} \quad t > a. \tag{$*$}$$

Допустим, что найдутся такие $y_1,\ y_2 \in (0,+\infty)$, что $a_1 = f(y_1) \neq f(y_2) = a_2$. Тогда в силу $(*)$ имеем равенства

$$f(t) = a_1(t-a_1) \quad \text{при всех} \quad t > a_1 \qquad \text{и} \qquad f(t) = a_2(t-a_2) \quad \text{при всех} \quad t > a_2.$$

Но эти равенства противоречивы: например, при $t = a_1 + a_2 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, первое из этих равенств даёт значение $f(a_1+a_2+\varepsilon) = a_1(a_2+\varepsilon)$, а второе — не равное ему значение $f(a_1+a_2+\varepsilon) = a_2(a_1+\varepsilon)$. Полученное противоречие означает, что функция f — тождественно постоянная: $f(x) = c$ при всех $x \in (0,+\infty)$ для некоторого $c \geqslant 0$. Следовательно, равенство из условия задачи примет вид: $c = cx$ при всех $x \in (0,+\infty)$, откуда $c = 0$. Поэтому единственной функцией, удовлетворяющей условию задачи, может быть только тождественно нулевая функция.

С другой стороны, очевидно, что тождественно нулевая функция удовлетворяет условию задачи.

11.8. Ответ : **а)** 53; **б)** 88.

Обозначим пять чисел, удовлетворяющих условию задачи, через

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e. \tag{1}$$

Первое решение. **а)** Пусть, без нарушения общности, $a+b+c = 50$. Тогда для суммы S чисел (1) имеем оценку снизу:

$$S = a+b+c+d+e = (a+b+c)+d+e = 50+d+e \geqslant 50+1+2 = 53.$$

С другой стороны, несложно привести пример пяти чисел, удовлетворяющих условию задачи, сумма которых равна 53. Такой пример доставляют, например, числа 1, 2, 11, 17, 22. В самом деле, сумма этих чисел равна $1+2+11+17+22 = 53$, а среди их сумм по три содержатся суммы 20, 30, 40, 50 — действительно:

$$1+2+17 = 20, \quad 2+11+17 = 30, \quad 1+17+22 = 40, \quad 11+17+22 = 50.$$

Другим таким примером служат числа: 1, 2, 12, 17, 21.

б) Докажем вначале, что каждое из пяти чисел (1) входит хотя бы в одну из тех четырёх троек, суммы чисел которых согласно условию равны

$$20,\ 30,\ 40,\ 50. \tag{2}$$

Допустим, что это не так: найдётся число (пусть, для определённости, это число e), которое не входит ни в одну из троек с суммами (2). Тогда суммы (2) составлены из троек, выбранных из четырёх чисел a, b, c, d. Но всего различных троек из четырёх чисел ровно четыре, и их суммы — это

$$a+b+c, \quad a+b+d, \quad a+c+d, \quad b+c+d. \tag{3}$$

Следовательно, суммы (3) — это (в каком-то порядке) суммы (2). Сумма S_0 чисел (3) равна $3(a+b+c+d)$ и, значит, делится на 3. Но это невозможно, поскольку эта же сумма S_0 равна $20+30+40+50=140$ и на 3 не делится. Полученное противоречие доказывает сформулированное утверждение.

Докажем теперь, что среди четырёх различных троек, выбранных из пяти элементов (1) и таких, что каждый элемент входит хотя бы в одну из них, найдутся две такие, которые пересекаются ровно по одному элементу. Допустим, что это не так. Тогда, поскольку любые две тройки, выбранные из пяти элементов, пересекаются, любые две из рассматриваемых четырёх троек должны пересекаться по двум элементам. Возьмём какие-либо две тройки из рассматриваемых четырёх — тройки t_1 и t_2. Так как у них два общих элемента, то, без нарушения общности, $t_1=(a,b,c)$ и $t_2=(a,b,d)$. Поскольку каждый элемент входит хотя бы в одну из рассматриваемых троек, то пусть t_3 — та из них, в которую входит элемент e. Так как тройка t_3 должна пересекаться с каждой из троек t_1 и t_2 по двум элементам, то $t_3=(a,b,e)$. Но тогда оставшаяся четвёртая тройка не может пересекаться с каждой из троек t_1, t_2 и t_3 ровно по двум общим элементам и быть отличной от них. Противоречие.

Следовательно, среди четырёх троек, дающих суммы (2), найдутся две такие, которые пересекаются ровно по одному элементу. Пусть, без нарушения общности, это тройки (a,b,e) и (c,d,e). Тогда для суммы S чисел (1) имеем оценку сверху:

$$S=a+b+c+d+e=(a+b+e)+(c+d+e)-e\leqslant 40+50-e\leqslant 40+50-1=89.$$

Покажем, однако, что сумма $S=89$ невозможна. Если $S=89$, то, как следует из предыдущего, две тройки, пересекающиеся по одному элементу, должны иметь суммы 40 и 50, а единственное общее им число равно 1 (если хотя бы одна из этих сумм меньше указанных значений или общее этим двум тройкам число больше 1, то $S<89$). Поэтому, как и выше, без нарушения общности, считаем, что $e=1$, а $a+b+1=50$ и $c+d+1=40$, т. е.

$$e=1, \quad a+b=49 \quad \text{и} \quad c+d=39. \tag{4}$$

Так как тройки $(a,b,1)$ и $(c,d,1)$, дают суммы 50 и 40 соответственно, то какие тройки дают две другие суммы в (2), т. е. суммы 20 и 30? Понятно, что такой тройкой не может быть тройка, выбранная из четырёх чисел a, b, c, d, поскольку тогда в неё должны входить либо a и b, либо c и d, а значит, в силу двух последних равенств в (4) сумма чисел в такой тройке больше 39, чего быть не может.

Значит, каждая из тех двух троек, суммы чисел которых 20 и 30, состоит из числа $e=1$ и какой-то пары (своей для каждой тройки), выбранной из чисел a, b, c, d. Назовём эти две пары хорошими. Для хороших пар могут представиться только две возможности: либо 1) они имеют общий элемент, либо 2) они не пересекаются.

Покажем, что случай 1) невозможен. Общим элементом хороших пар может быть либо a или b, либо c или d. Пусть общим элементом является a или b (обозначим этот элемент через x, чтобы не рассматривать отдельно случаи общего элемента a и общего элемента b). Так как $a+b=49$, то тройки с суммами 20 и 30 — это (в каком-то порядке) тройки $(x,c,1)$ и $(x,d,1)$. Значит, складывая элементы этих троек, получим $2x+c+d+2=50$, или $2x+c+d=48$, т. е. $c+d$ — число чётное, что противоречит последнему равенству в (4). Точно так же, если общим элементом хороших пар является c или d (обозначим этот элемент y), то, поскольку $c+d=39$, тройки с суммами 20 и 30 — это (в каком-то порядке) тройки $(y,a,1)$ и $(y,b,1)$. Тогда, складывая элементы этих троек, получим $2y+a+b+2=50$, или $2y+a+b=48$, т. е. $a+b$ — число чётное, что противоречит второму равенству в (4). Следовательно, имеет место случай 2), т. е. хорошие пары не пересекаются. Поэтому сумма чисел входящих в тройки с суммами 20 и 30, равна $50 = a+b+c+d+1+1$, откуда $a+b+c+d = 48$. С другой стороны, складывая почленно два последних равенства в (4), получим $a+b+c+d = 88$. Полученное противоречие показывает, что равенство $S = 89$ невозможно.

Доказать по-другому, что равенство $S = 89$ невозможно, можно так. Как и выше, получаем, что каждая из тех двух троек, суммы чисел которых 20 и 30, состоит из числа $e = 1$ и какой-то пары (своей для каждой тройки), выбранной из чисел a, b, c, d. Такая пара выше названа хорошей. Сумма чисел в каждой хорошей паре нечётна, так как сумма чисел хорошей пары и числа 1 чётна (равна 20 или 30); кроме того, очевидно, что сумма чисел хорошей пары должна быть меньше 30. Заметим теперь, что поскольку суммы в (4) нечётны, то числа a и b имеют разную чётность и числа c и d также имеют разную чётность. Пусть, для определённости, числа a и c нечётны, а b и d чётны; значит, среди чисел a, b, c, d нечётные суммы, меньшие 30, могут иметь только пары (a, d) и (b, c). Поэтому, без нарушения общности, $a+d+1 = 20$ и $b+c+1 = 30$, т. е. $a+d = 19$ и $b+c = 29$. Складывая почленно два последних равенства, получим $a+b+c+d = 48$, а складывая почленно два последних равенства в (4) — что $a+b+c+d = 88$. Полученное противоречие показывает, что равенство $S = 89$ невозможно.

Следовательно, $S \leqslant 88$. С другой стороны, несложно привести пример пяти чисел, удовлетворяющих условию задачи, сумма которых равна 88. Это числа 2, 4, 14, 24, 44. В самом деле, сумма этих чисел равна $2+4+14+24+44 = 88$, а среди их сумм по три содержатся суммы 20, 30, 40, 50 — действительно:

$$2+4+14 = 20, \quad 2+4+24 = 30, \quad 2+14+24 = 40, \quad 2+4+44 = 50.$$

LXVI Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

11 – 15 января 2016 года

8 класс

Первый день

1. На интеллектуальной викторине было предложено несколько легких, средних и трудных вопросов. За правильный ответ на легкий вопрос участник получал 4 балла, на средний – 5 баллов, а на трудный – 6 баллов. За неправильный ответ на легкий вопрос у участника вычиталось 2 балла, за неправильный ответ на средний вопрос вычитался 1 балл, а за неправильный ответ на трудный вопрос баллы не вычитались. Петя ответил правильно на 10 вопросов и получил на 30 баллов меньше, чем максимально возможное число баллов.

Сколько всего вопросов было предложено на викторине?

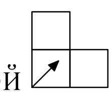
2. Для ненулевых чисел a, b и c выполняется равенство

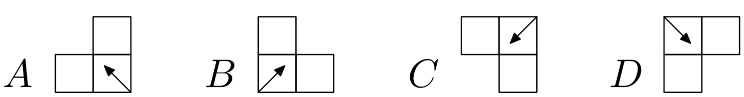
$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}=\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}-2\,.$$

Докажите, что какое-то из этих трёх чисел равно сумме двух других.

3. Точка N – середина стороны BC треугольника ABC. На стороне AC этого треугольника отмечена точка K, так, что $\angle BAC = 2\angle NKC$.

Докажите, что $KC = BA + AK$.

4. Имеется набор плиток в виде уголка с изображенной на нём стрелкой . Восьмиклассник Вася замостил этим набором прямоугольную доску $n \times m$ (n и m – данные натуральные числа). Все плитки в этом замощении в зависимости от направления стрелки на них разбились на четыре типа: плитки направлений A, B, C, D, изображенные на рисунке.



Сможет ли Вася, разложив плитки на доске по-новому, снова замостить эту доску, чтобы при этом ровно одна плитка поменяла своё направление?

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 4,5 часа

LXVI Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

11 – 15 января 2016 года

8 класс

Второй день

5. Докажите неравенство

$$\frac{a^2+b^2+1}{a+b+1} \geqslant \frac{ab+a+b}{ab+2},$$

если действительные положительные числа a и b таковы, что $(a-1)(b-1) \geqslant 0$.

6. Найдите все целые значения n, при которых дробь $\dfrac{n^2-2n-5}{3n-2}$ является целым числом.

7. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) высота, опущенная на гипотенузу, равна $\sqrt{3}$, а разность острых углов равна 30°.

Найдите длины сторон треугольника ABC.

8. Дано четыре попарно различных натуральных числа. Известно, что какие-то три из шести попарных сумм этих чисел равны 13, 14 и 15.

Найдите наименьшее значение, которое может принимать сумма четырёх таких чисел.

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 4,5 часа

LXVI Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

11 – 15 января 2016 года

9 класс

Первый день

1. На интеллектуальной викторине было предложено несколько легких, средних и трудных вопросов, всех из названных поровну. За правильный ответ на легкий вопрос участник получал 3 балла, на средний – 4 балла, а на трудный – 6 баллов. За неправильный ответ на легкий вопрос у участника вычиталось 3 балла, за неправильный ответ на средний вопрос вычиталось 2 балла, а за неправильный ответ на трудный вопрос баллы не вычитались. Вася правильно ответил более, чем на половину вопросов и получил 30 баллов.

На сколько всего вопросов Вася ответил правильно, и сколько всего вопросов было предложено на викторине?

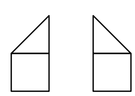
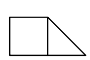
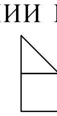
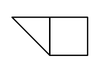
2. Для ненулевых чисел a, b и c выполняется равенство

$$3\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}\right)=2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}\right)+12\,.$$

Докажите, что какое-то из этих трёх чисел равно среднему арифметическому двух других.

3. В остроугольном треугольнике ABC центр описанной окружности, ортоцентр (точка пересечения высот), а также вершины A и B лежат на одной окружности.

Найдите все возможные значения угла ACB.

4. У Васи есть набор плиток вида  . С помощью этих плиток Вася замостил доску $n \times m$ (m и n – данные натуральные числа). В зависимости от расположения плиток в этом замощении все плитки разбились на четыре из восьми возможных типов: A  B  C  D  .

Может ли Вася, разложив эти же плитки на доске по-новому, снова замостить эту доску, так чтобы при этом ровно одна плитка поменяла свой тип на другой из указанных типов?

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

LXVI Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

11 – 15 января 2016 года

9 класс

Второй день

5. Ненулевые действительные числа a, b, c таковы, что квадратные трёхчлены ax^2+bx+c, bx^2+cx+a, cx^2+ax+b не имеют действительных корней.

Докажите, что $2ab+2bc+2ca>a^2+b^2+c^2$.

6. В треугольнике ABC ($AB<BC<AC$) на сторонах BC и AC отмечены соответственно точки M и N так, что $CM=AB$, $CN=CB$. Пусть S – площадь треугольника ABC, S_1 – площадь треугольника MNC, S_2 – площадь четырехугольника $ABMN$.

Определите все возможные значения, которое может принимать отношение $AC:AB$, если $S^2\leqslant 4S_1\cdot S_2$.

7. Точка M – точка пересечения диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность. Известно, что

$$AM:MC=3:1,\quad AC:BD=2:\sqrt{3},\quad \angle BAC=\angle DAC.$$

Найдите все возможные значения угла BAD.

8. Дано четыре попарно различных натуральных числа. Известно, что какие-то три из шести попарных сумм этих чисел равны 11, 21 и 31.

Найдите все значения, которые может принимать сумма четырёх таких чисел.

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

LXVI Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

11 – 15 января 2016 года

10 класс

Первый день

1. На положительной ветви гиперболы $y = 1/x$ отмечены точки A и B так, что в треугольнике OAB (O – начало координат) угол OAB прямой.

Найдите площадь треугольника OAB, если длина его катета AB равна $\sqrt{15}$.

2. Пусть $f(n) = n^2 + 2016n + a$, где a – некоторое заданное целое число. Известно, что для некоторого целого числа n число $f(n)$ делится на 3.

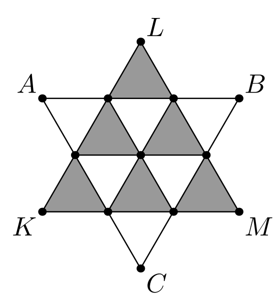
а) Верно ли, что тогда для всех таких чисел a существует такое целое число m, при котором $f(m)$ делится на 9?

б) Верно ли, что тогда для всех таких чисел a, не делящихся на 3, существует такое целое число m, при котором $f(m)$ делится на 9?

3. В треугольнике ABC четыре различные точки – центр описанной окружности, ортоцентр (точка пересечения высот), а также вершины A и B – лежат на одной окружности.

Найдите все возможные значения угла ACB.

4. Диаграмма на рисунке состоит из чёрных и белых треугольников. В вершины всех треугольников вписали по одному числу – 0, 1 или 2 – так, что у каждого чёрного треугольника сумма чисел в его вершинах делится на 3, а у каждого белого – не делится на 3.



а) Могут ли все три числа в вершинах A, B и C оказаться различными?

б) Могут ли какие-то два из чисел в вершинах K, L и M оказаться различными?

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

LXVI Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

11 – 15 января 2016 года

10 класс

Второй день

5. Пусть $x_1,\ x_2$ – корни квадратного трёхчлена $f(x) = x^2 - 3x + 1$, а $x_3,\ x_4$ – корни квадратного трехчлена $g(x) = x^2 - 4x + 1$.

Найдите все возможные значения выражения

$$(g(x_1))^2 f(x_3) + (g(x_2))^2 f(x_4).$$

6. В треугольнике ABC проведена биссектриса CL, которая разбивает сторону AB на отрезки $AL = 10$ и $BL = 6$.

Найдите радиус окружности, проходящей через точки C и L, центр которой лежит на прямой AB.

7. Найдите все функции f, определённые на множестве действительных чисел и принимающих значения в этом же множестве, такие, что для всех действительных x и y выполняется равенство $f\big(x + f(y)\big) = xf(y)$.

8. Дано пять попарно различных натуральных чисел. Известно, что какие-то четыре из десяти сумм этих чисел по три равны $15,\ 20,\ 25$ и 30.

Найдите, какое

а) наименьшее, **б)** наибольшее

значение может принимать сумма пяти таких чисел.

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

LXVI Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

11 – 15 января 2016 года

11 класс

Первый день

1. На отрицательной ветви гиперболы $y = 1/x$ отмечена точка A, а на положительной ветви этой гиперболы – точки B и C так, что угол ACB треугольника ABC прямой, а начало координат – точка O – принадлежит катету AC.

Найдите длину гипотенузы AB этого треугольника, если его площадь равна $8\sqrt{3}$.

2. Натуральное число N назовём *хорошим*, если для него найдутся хотя бы четыре различных пары натуральных чисел (x, y), удовлетворяющих равенству

$$15x + 200y = N.$$

Найдите наименьшее *хорошее* число.

3. В треугольнике ABC угол при вершине B равен $65°$. Продолжение высоты, проведенной из вершины A, пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке A_1, отличной от точки A. Продолжение биссектрисы, проведенной из вершины C, пересекает эту же окружность в точке C_1, отличной от точки C.

Укажите все возможные значения величины угла ACB, если $AA_1 = CC_1$.

4. Клетки прямоугольной таблицы 5×6 раскрашены в шахматном порядке в черный и белый цвета. Во всех точках, являющихся вершинами клеток (всего 42 точки), расставлены числа 0 или 1 так, что сумма четырех чисел в вершинах любой черной клетки четна, а сумма чисел в вершинах любой белой клетки нечетна.

Найдите все возможные значения, которые может принимать сумма чисел в четырех вершинах данной прямоугольной таблицы.

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

LXVI Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

11 – 15 января 2016 года

11 класс

Второй день

5. Пусть x_1, x_2 — корни квадратного трёхчлена $f(x) = x^2 - 2x - 1$, а x_3, x_4 — корни квадратного трехчлена $g(x) = x^2 - 3x - 1$.

Найдите все возможные значения выражения

$$(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4).$$

6. Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке C. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке L. Отрезки AC и BC пересекают меньшую окружность в точках A_1 и B_1 соответственно.

Найдите площадь треугольника ABC, если $AL = 7$, $BL = 5$, $A_1B_1 = 9$.

7. Найдите все функции f, определённые на множестве положительных действительных чисел и принимающих значения в множестве неотрицательных действительных чисел, такие, что для всех положительных действительных x и y выполняется равенство $f\big(x + f(y)\big) = xf(y)$.

8. Дано пять попарно различных натуральных чисел. Известно, что какие-то четыре из десяти сумм этих чисел по три равны 20, 30, 40 и 50.

Найдите, какое

а) наименьшее, **б)** наибольшее

значение может принимать сумма пяти таких чисел.

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов