Задачи III этапа LXVII Белорусской математической олимпиады школьников

Первый день

Е.А.Барабанов, ведущий научный сотрудник Института математики АН Беларуси,

И.И.Воронович, доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации БГУ,

В.И.Каскевич, доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации БГУ,

С.А.Мазаник, зав. кафедрой высшей математики БГУ

Условия

8 класс

1. Действительные числа a, b, c таковы, что выполнено неравенство

$$\frac{a+2b-c}{a+b}+\frac{b+2c-a}{b+c}+\frac{c+2a-b}{c+a}\geqslant 6.$$

Докажите, что среди чисел a, b, c хотя бы одно число отрицательное.

2. Про натуральное число n известно, что число всех его натуральных делителей равно 3, а число всех натуральных делителей числа $n-1$ равно 2.

Найдите число всех натуральных делителей числа n^2-1.
(К натуральным делителям натурального числа причисляются 1 и само число.)

3. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине B. Пусть M и N – середины его сторон AC и BC соответственно. На продолжении отрезка MB за точку B отмечена точка X такая, что угол ANX равен 90°.

Найдите углы треугольника ANX.

4. На стене в ряд висят n лампочек, вначале они все выключены. Возле каждой лампочки есть переключатель, при нажатии на который переключается эта лампочка и все, расположенные правее неё. Маша и Серёжа играют в игру: они по очереди выбирают переключатель и нажимают на него; проигрывает тот, после хода которого состояние лампочек повторится, т.е. станет таким, каким оно уже когда-либо было до этого (включая и начальное состояние лампочек).

Кто выиграет при правильной игре, если первой начинает Маша?

9 класс

1. Для натурального числа n через $d(n)$ обозначим количество всех различных натуральных делителей числа n (включая 1 и n).

Найдите все натуральные n, для которых выполняется равенство

$$d(n) + d(8n+1) = 5.$$

2. Даны n натуральных чисел. Из них составили все попарные суммы. Среди полученных сумм x оказались чётными и y – нечётными.

Докажите, что $x + \frac{n}{2} \geqslant y$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC $(\angle C = 90^\circ)$ точки K и L – точки касания вписанной в него окружности со сторонами AC и AB соответственно. На прямую KL из точек C и B опущены перпендикуляры CM и BN.

Найдите отношения сторон треугольника ABC, если $MK + LN = KL$.

4. На стене в ряд висят n лампочек, вначале они все выключены. Возле каждой лампочки есть два переключателя: верхний и нижний. При нажатии на верхний переключатель переключается эта лампочка и все, расположенные правее неё, а при нажатии на нижний переключается эта лампочка и все, расположенные левее неё. Маша и Серёжа играют в игру: они по очереди выбирают переключатель и нажимают на него; проигрывает тот, после хода которого состояние лампочек повторится, т.е. станет таким, каким оно уже когда-либо было до этого (включая и начальное состояние лампочек).

Кто выиграет при правильной игре, если Маша начинает первой, но она может нажимать только на верхние переключатели, а Серёжа на любые?

10 класс

1. Для натурального числа n через $d(n)$ обозначим количество всех различных натуральных делителей числа n (включая 1 и n).

Найдите все натуральные n, для которых выполняется равенство

$$d(n) + d(56n+1) = 5.$$

2. Действительные числа a, b, c таковы, что $a > b > c$ и выполнено равенство

$$\frac{a-b}{b-c} + \frac{b-c}{c-a} + \frac{c-a}{a-b} = -3.$$

Докажите, что

$$(b-c)^3 > 4(a-b)^3.$$

3. Точки A_1, B_1 и C_1 – середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. На сторонах AB_1 и AC_1 треугольника AB_1C_1 во внешнюю сторону построены квадраты AB_1EF и AC_1GH соответственно. Пусть AD – высота треугольника ABC.

Докажите, что точки A_1, D, G и E лежат на одной окружности.

4. В ряд записан набор их n чисел, каждое из которых равняется 0, 1, 2 или 3. Лёша и Миша играют в игру, делая ходы по очереди. За один ход можно выбрать любое из данных чисел и прибавить к нему, а также к каждому из чисел правее него, одно и тоже целое число (для разных ходов прибавляемые числа могут быть различны); после этого все полученные числа меняются на их остатки при делении на 4. Проигрывает тот игрок, после хода которого повторится упорядоченный набор чисел, который уже встречался когда-либо до этого (включая и начальный набор чисел).

Кто выиграет при правильной игре, если первым ходит Лёша?

11 класс

1. Для натурального числа n через $d(n)$ обозначим количество всех различных натуральных делителей числа n (включая 1 и n).

Найдите все натуральные n, для которых выполняется равенство

$$d(7n) + d(8n+1) = 7.$$

2. Попарно различные положительные действительные числа a, b, c таковы, что выполнено неравенство

$$\frac{a+b}{b-c} + \frac{b+c}{c-a} + \frac{c+a}{a-b} \leqslant \frac{b-c}{a+b} + \frac{c-a}{b+c} + \frac{a-b}{c+a}.$$

Докажите, что

$$\frac{a+c}{c-b} + \frac{b+a}{a-c} + \frac{c+b}{b-a} > 3.$$

3. В остроугольном треугольнике ABC угол $\angle CAB$ в два раза больше угла $\angle BCA$. Пусть A_1 — основание высоты, опущенной из вершины A, а M — середина стороны AC. На стороне AB выбрана точка C_1, такая, что прямые AA_1, BM и CC_1 пересекаются в одной точке.

Докажите, что точка M, основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую A_1C_1, и точка пересечения медиан треугольника AC_1A_1 лежат на одной прямой.

4. Жители королевства используют алфавит из 2016 букв. Название каждого из 448 городов королевства состоит из 6 различных букв. Любые два города соединены между собой таким количеством дорог, сколько общих букв встречается в их названиях.

Докажите, что какие-то два города связаны не менее чем двумя различными маршрутами без общих дорог.

Решения

8 класс

8.1. Предположим, что все три числа a, b, c неотрицательные. Преобразуем данное в условии неравенство. Имеем

$$\frac{a+2b-c}{a+b}+\frac{b+2c-a}{b+c}+\frac{c+2a-b}{c+a} \geqslant 6 \iff$$

$$\frac{a+b+b-c}{a+b}+\frac{b+c+c-a}{b+c}+\frac{c+a+a-b}{c+a} \geqslant 6 \iff$$

$$1+\frac{b-c}{a+b}+1+\frac{c-a}{b+c}+1+\frac{a-b}{c+a} \geqslant 6 \iff \frac{b-c}{a+b}+\frac{c-a}{b+c}+\frac{a-b}{c+a} \geqslant 3.$$

Поскольку сумма трёх чисел не меньше 3, то по крайней мере одно из них не меньше 1. Пусть, например, $\dfrac{b-c}{a+b} \geqslant 1$. Тогда $b-c \geqslant a+b$, откуда $-c \geqslant a$, что возможно, в силу неотрицательности a и c, лишь при $a=c=0$. Однако последнее равенство невозможно, так как сумма $a+c$ стоит в знаменателе третьей дроби неравенства, данного в условии.

Аналогично рассматриваются случаи $\dfrac{c-a}{b+c} \geqslant 1$ и $\dfrac{a-b}{c+a} \geqslant 1$.

Таким образом, по крайней мере одно из чисел a, b, c отрицательное.

8.2. Ответ: 4.

Для натурального числа n через $d(n)$ обозначим количество всех различных натуральных делителей числа n (включая 1 и n).

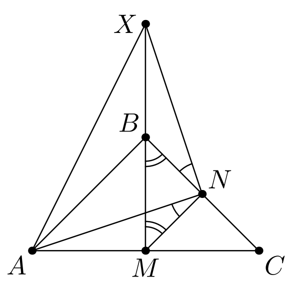
Заметим, что число натуральных делителей числа 1 равно 1 (т.е. $d(1)=1$). Далее, равенство $d(n)=2$ выполняется тогда и только тогда, когда n — простое число. Действительно, если $n=p$, где число p простое, то у него ровно два различных делителя: 1 и p. Если же n составное, то у него не менее трёх различных делителей: 1, n и какой-нибудь простой делитель числа n. Наконец, равенство $d(n)=3$ выполняется тогда и только тогда, когда n — квадрат простого числа. Действительно, если $n=p^2$, где число p простое, то у него ровно три различных делителя: 1, p и p^2. Если же n не является квадратом простого числа, то либо $n=1$, либо n простое, либо $n=pk$, где p — простое число, k — натуральное число, отличное от p и большее 1. В первых двух случаях, как показано выше, $d(n) \leqslant 2$. В последнем же случае у числа n не менее четырёх различных делителей: 1, p, k и n.

Перейдём к решению задачи. Пусть n — искомое число. Условие задачи равносильно равенствам $d(n) = 3$ и $d(n-1) = 2$. Эти равенства согласно сказанному выше равносильны соответственно равенствам: $n = p^2$, где число p простое, и $n - 1 = q$, где число q простое. Таким образом, имеем равенство $p^2 - 1 = q$, или $(p-1)(p+1) = q$. Если p — нечётное простое число, то каждое из чисел $p-1$ и $p+1$ делится на 2, а значит, число q делится на 4 и поэтому не может быть простым числом. Поэтому число p должно быть чётным простым числом, т.е. $p = 2$. В этом случае получаем: $q = (p-1)(p+1) = (2-1)(2+1) = 3$ — число простое. Итак, искомое число $n = 4$.

Так как $n = 4$, то $n^2 - 1 = 4^2 - 1 = 16 - 1 = 15 = 3 \cdot 5$. Число 15 имеет ровно четыре различных натуральных делителя: 1, 3, 5 и 15.

8.3. Ответ : $\angle ANX = 90^\circ$, $\angle XAN = \angle AXN = 45^\circ$.

Соединим точки M и N. Отрезок MN — средняя линия треугольника ABC, поэтому



$MN \parallel AB$, и тогда $\angle BNM = 90^\circ$. Получаем равенство углов:

$$\angle BNX = 90^\circ - \angle BNA = \angle ANM.$$

Ясно также, что $\angle MBN = \angle BMN = 45^\circ$, поэтому $\angle XBN = 135^\circ = \angle AMN$. Так как $MN = BN$ (как катеты в прямоугольном треугольнике BNM с острыми углами по 45°), то заключаем, что треугольники BNX и ANM равны по стороне и прилежащим углам. Отсюда следует, что $AN = XN$, так что треугольник ANX равнобедренный и, по условию прямоугольный, с углами 90°, 45°, 45°.

8.4. Ответ : выиграет Маша.

Покажем, что, если Маша выберет некоторый выключатель и будет каждый раз нажимать только на него, то она выиграет независимо от действий Серёжи.

Каждому положению лампочек поставим в соответствие положение, которое получается из него после того, как Маша нажмёт выбранный выключатель. При этом все возможные положения лампочек разобьются на пары. Каждым своим ходом Маша получает положение, парное к текущему положению, а Серёже приходится перейти к положению, у которого парного ещё не было. Следовательно, Маша всегда может сделать свой ход не проиграв, и, поскольку игра закончится (ходов не больше $2^n - 1$), она выиграет.

9 класс

9.1. Ответ: $n = 3$ и $n = 9$.

Заметим, что для натурального числа x равенство $d(x) = 1$ возможно только в случае $x = 1$. Далее, $d(x) = 2$ тогда и только тогда, когда x — простое число, а $d(x) = 3$ тогда и только тогда, когда x — квадрат простого числа.

Рассмотрим равенство из условия задачи

$$d(n) + d(8n + 1) = 5. \qquad (*)$$

Так как $8n + 1 > 1$, то $d(8n + 1) > 1$, а значит, могут представиться лишь следующие три случая: либо $d(n) = 1$, либо $d(n) = 2$, либо $d(n) = 3$. Рассмотрим каждый из них отдельно.

1) Если $d(n) = 1$, то $n = 1$, а значит, $d(8n + 1) = d(9) = 3$. Стало быть, в этом случае равенство $(*)$ не выполняется.

2) Если $d(n) = 2$, то это означает, что число n является простым. Из равенства $(*)$ в этом случае получаем, что $d(8n + 1) = 3$, а значит, $8n + 1 = q^2$, где q — простое число. Очевидно, что число q нечётно, т.е. $q = 4k \pm 1$. Тогда $8n = (4k \pm 1)^2 - 1 = 4k(4k \pm 2) = 8k(2k \pm 1)$, или $n = k(2k \pm 1)$. Это равенство, поскольку n простое, возможно только в случае $k = 1$. Число $n = 2k \pm 1 = 2 \cdot 1 \pm 1$ должно быть простым, что возможно, только если в последнем равенстве выбрать знак плюс. Тогда $n = 3$ — число простое, а так как и число $q = 4k + 1 = 4 \cdot 1 + 1 = 5$ простое, то в случае 2) получаем решение $n = 3$.

3) Если $d(n) = 3$, то $n = p^2$, где p — простое число. Из уравнения $(*)$ получаем $d(8n + 1) = 2$, а значит, $8n + 1 = q$, где q — простое число. Итак, имеем равенство $q = 8p^2 + 1$, из которого, в частности, видим, что $q \geqslant 9$. Запишем это равенство виде $q = 9p^2 - (p - 1)(p + 1)$. Заметим, что если $p = 3k \pm 1$, то число $(p - 1)(p + 1)$ делится на 3, а так как $q \geqslant 9$, то q не может быть простым. Поэтому единственным значением p, при котором число q может быть простым, является $p = 3$. Тогда действительно, $q = 8p^2 + 1 = 8 \cdot 3^2 + 1 = 73$ — простое число. Таким образом, получаем ещё одно решение уравнения $(*)$: $n = p^2 = 9$.

9.2. Пусть среди данных n чисел всего a чётных и b нечётных. Тогда $a + b = n$. Чтобы получилась чётная сумма нужно взять либо два чётных числа, либо два нечётных числа. Легко подсчитать, что количество различных пар чётных чисел из a чисел равно $\dfrac{a(a-1)}{2}$, а пар из нечётных — $\dfrac{b(b-1)}{2}$. Тогда $x = \dfrac{a(a-1)}{2} + \dfrac{b(b-1)}{2}$. Чтобы получилась нечётная сумма нужно взять чётное и нечётное число. Всего способов выбрать такую пару будет ab. Тогда

$$x+\frac{n}{2}=\frac{a(a-1)}{2}+\frac{b(b-1)}{2}+\frac{a+b}{2}=\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant$$

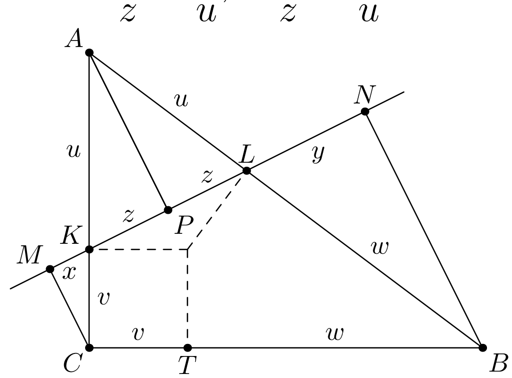
$\geqslant$ [неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом] $\geqslant ab=y$,

что и требовалось доказать.

9.3. $AC:BC:AB=3:4:5$.

Пусть T — точка касания вписанной в треугольник ABC окружности со стороной BC. Тогда в силу равенства касательных к окружности $AK=AL=u$, $CK=CT=v$, $BL=BT=w$. Построим высоту AP треугольника KAL, тогда, в силу равнобедренности этого треугольника, $KP=PL=z$. Пусть $MK=x$, $LN=y$. Очевидно, что $\Delta\,KAP\sim\Delta\,KCM$ и $\Delta\,LAP\sim\Delta\,LBN$ (по двум углам). Поэтому

$$\frac{x}{z}=\frac{v}{u},\qquad \frac{y}{z}=\frac{w}{u}.$$



По условию $x+y=2z$, тогда

$$2=\frac{x+y}{z}=\frac{x}{z}+\frac{y}{z}=\frac{v}{u}+\frac{w}{u}=\frac{v+w}{u}\implies v+w=2u.$$

Следовательно,

$$BC=v+w=2u,\quad AC=u+v=u\left(1+\frac{x}{z}\right),\quad AB=u+w=u\left(1+\frac{y}{z}\right).$$

По теореме Пифагора

$$AB^2=AC^2+BC^2\iff u^2\left(1+\frac{y}{z}\right)^2=u^2\left(1+\frac{x}{z}\right)^2+4u^2\iff$$

$$(y+z)^2=(x+z)^2+4z^2\iff y^2+2yz+z^2=x^2+2xz+z^2+4z^2$$

$$(y^2-x^2)+2z(y-x)=4z^2\iff(y-x)(y+x+2z)=4z^2.$$

Поскольку по условию $x+y=2z$, то $y-x=z$, откуда $y=3z/2$, $x=z/2$.

Таким образом,

$$AC : BC : AB = u\left(1+\frac{x}{z}\right) : 2u : u\left(1+\frac{y}{z}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right) : 2 : \left(1+\frac{3}{2}\right) = 3 : 4 : 5.$$

9.4. Ответ : выиграет Маша.

Покажем, что, если Маша выберет некоторый выключатель и будет каждый раз нажимать только на него, то она выиграет независимо от действий Серёжи.

Каждому положению лампочек поставим в соответствие положение, которое получается из него после того, как Маша нажмёт выбранный выключатель. При этом все возможные положения лампочек разобьются на пары. Каждым своим ходом Маша получает положение, парное к текущему положению, а Серёже приходится перейти к положению, у которого парного ещё не было. Следовательно, Маша всегда может сделать свой ход не проиграв, и, поскольку игра закончится (ходов не больше $2^n - 1$), она выиграет.

10 класс

10.1. Ответ: $n = 1$ и $n = 3$.

Заметим, что для натурального числа x равенство $d(x) = 1$ возможно только в случае $x = 1$. Далее, $d(x) = 2$ тогда и только тогда, когда x — простое число, а $d(x) = 3$ тогда и только тогда, когда x — квадрат простого числа.

Рассмотрим равенство из условия задачи

$$d(n) + d(56n + 1) = 5. \qquad (*)$$

Так как $56n + 1 > 1$, то $d(56n + 1) > 1$, а значит, могут представиться лишь следующие три случая: либо $d(n) = 1$, либо $d(n) = 2$, либо $d(n) = 3$. Рассмотрим каждый из них отдельно.

1) Если $d(n) = 1$, то $n = 1$, а значит, $d(56n + 1) = d(57) = d(3 \cdot 19) = 4$. Стало быть, в этом случае равенство $(*)$ выполняется.

2) Если $d(n) = 2$, то это означает, что число n является простым. Из равенства $(*)$ в этом случае получаем, что $d(56n+1) = 3$, а значит, $56n+1 = q^2$, где q — простое число. Очевидно, что число q нечётно, т.е. $q = 4k \pm 1$. Тогда $56n = (4k \pm 1)^2 - 1 = 4k(4k \pm 2) = 8k(2k \pm 1)$, или $7n = k(2k \pm 1)$. Легко видеть, что случаи $k = 1$ или $2k \pm 1 = 1$ невозможны. Поэтому, так как n — простое, либо 2а) $k = 7$, либо 2б) $2k \pm 1 = 7$.

В случае 2а) получаем $n = 2k \pm 1 = 2 \cdot 7 \pm 1 = 14 \pm 1$, а так как n простое, то в последнем равенстве нужно выбрать знак минус ($n = 13$). Тогда $q = 4k - 1 = 4 \cdot 7 - 1 = 27$ не является простым числом. Поэтому в случае 2а) решений нет.

В случае 2б) получаем $2k \pm 1 = 7$ и k — простое число. Это возможно только, если в равенстве $2k \pm 1 = 7$ выбирается знак плюс и тогда $k = 3$. Тогда $q = 4k + 1 = 4 \cdot 3 + 1 = 13$ — число простое, а значит, в случае 2б) получаем решение $n = k = 3$.

3) Если $d(n) = 3$, то согласно замечанию в начале решения это означает, что $n = p^2$, где p — простое число. Из уравнения $(*)$ следует, что в случае 3) должно выполняться равенство $d(56n + 1) = 2$, т.е. число $56n + 1 = q$, где q — простое число. Тогда $56p^2 + 1 = q$. Заметим, что при $p = 3$ число $56p^2 + 1 = 56 \cdot 3^2 + 1 = 505$ не является простым. Если же $p \neq 3$, то число $p^2 - 1$ делится на 3, а значит, на 3 делится и число $56p^2 + 1$, так как $56p^2 + 1 = 57p^2 - (p^2 - 1)$, так что q не может быть простым числом. Поэтому в случае 3) решений уравнения $(*)$ нет.

10.2. Имеем

$$-3 = \frac{a-b}{b-c} + \frac{b-c}{c-a} + \frac{c-a}{a-b} = \frac{a-b+c-c}{b-c} + \frac{b-c+a-a}{c-a} + \frac{c-a+b-b}{a-b} =$$

$$= \frac{a-c}{b-c} - 1 + \frac{b-a}{c-a} - 1 + \frac{c-b}{a-b} - 1 \implies$$

$$\frac{a-c}{b-c} + \frac{b-a}{c-a} + \frac{c-b}{a-b} = 0 \implies \frac{b-c}{a-b} = \frac{a-c}{b-c} + \frac{a-b}{a-c}. \qquad (1)$$

Так как $a > b > c$, то $\frac{a-b}{a-c} > 0$ и $\frac{a-c}{b-c} > 0$. Из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом получаем

$$\frac{a-b}{a-c} + \frac{a-c}{b-c} \geqslant 2 \cdot \sqrt{\frac{a-b}{a-c} \cdot \frac{a-c}{b-c}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{a-b}{b-c}}.$$

Тогда из (1) имеем

$$\frac{b-c}{a-b} \geqslant 2 \cdot \sqrt{\frac{a-b}{b-c}} \implies \left(\frac{b-c}{a-b}\right)^2 \geqslant 4 \cdot \frac{a-b}{b-c} \implies (b-c)^3 \geqslant 4(a-b)^3.$$

Знак равенства в полученном неравенстве возможен лишь, когда имеет место знак равенства в неравенстве о среднем арифметическом и среднем геометрическом, т.е., при выполнении равенства

$$\frac{a-b}{a-c} = \frac{a-c}{b-c}.$$

Однако в силу условия $a > b > c$ последнее равенство невозможно так как,

$$\frac{a-b}{a-c} < \frac{a-c}{a-c} = 1 = \frac{b-c}{b-c} < \frac{a-c}{b-c}.$$

Таким образом, окончательно имеем $(b-c)^3 > 4(a-b)^3$.

10.3. В начале докажем равенство $\angle GA_1E = 90^\circ$ (см. рисунок 1). Так как A_1B_1 и A_1C_1 — средние линии в треугольнике ABC, то $A_1B_1 = AB/2$, $A_1C_1 = AC/2$ и

$$\angle A_1B_1C = \angle A_1C_1B = \angle C_1A_1B_1 = \angle CAB.$$

По условию AB_1EF и AC_1GH — квадраты, а значит, $C_1G = AB/2$ и $B_1E = AC/2$. Так как $\angle A_1B_1E = 90^\circ + \angle CAB = \angle GC_1A_1$, то треугольники A_1B_1E и GC_1A_1 равны (согласно первому признаку равенства треугольников). Поэтому, имеет место цепочка равенств

$$\angle GA_1E = \angle GA_1C_1 + \angle C_1A_1B_1 + \angle B_1A_1E =$$

$$= \angle B_1EA_1 + \angle CAB + \angle B_1A_1E =$$

$$= \angle CAB + 180^\circ - (90^\circ + \angle CAB) = 90^\circ.$$

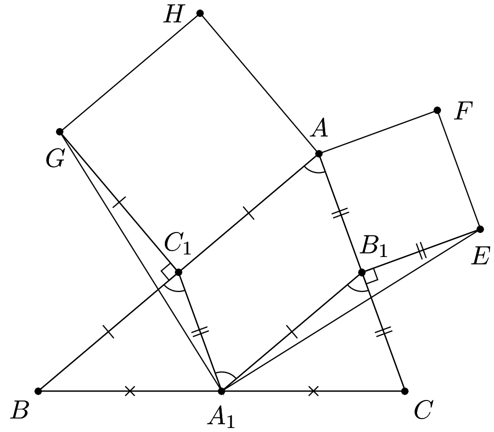


Рис. 1

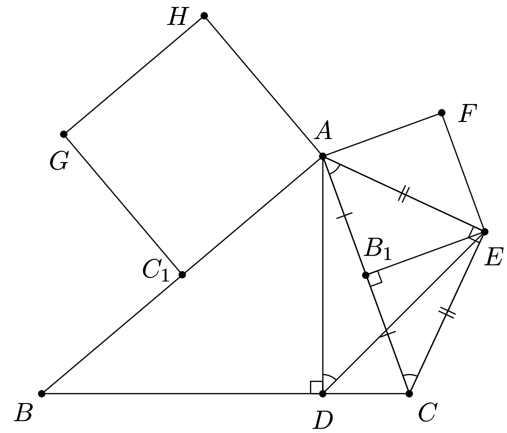


Рис. 2

Теперь докажем равенство $\angle GDE = 90^\circ$ (см. рисунок 2). Действительно, так как $B_1E \perp AC$ и $AB_1 = B_1C$, то треугольник AEC равнобедренный с основанием AC. Следовательно, $\angle B_1EC = \angle B_1EA = 45^\circ$, а значит, $\angle AEC = 90^\circ$. Так как $\angle AEC = \angle ADC = 90^\circ$, то четырехугольник $AECD$ — вписанный. Поэтому, $\angle ADE = \angle ACE = \angle EAC = 45^\circ$. Аналогично доказывается равенство $\angle GDA = 45^\circ$. Таким образом, $\angle GDE = 90^\circ$.

Так как $\angle GA_1E = \angle GDE = 90^\circ$, то точки A_1, D, E и G лежат на одной окружности.

10.4. Ответ : выиграет Лёша.

Пусть Лёша заранее выберет произвольную позицию и натуральное число m, дающее остаток 2 при делении на 4. Покажем, что, если во время игры каждым своим ходом Лёша будет прибавлять m к числу, записанному в выбранную позицию, и всем числам, записанным правее него, то он выиграет независимо от действий Миши.

Каждой позиции в игре (упорядоченному набору из n чисел) поставим в соответствие позицию, которая получается из неё после хода Лёши. Заметим следующие свойства соответствующих позиций: 1) так как число n не кратно четырём, то никакая позиция не соответствует самой себе; 2) разным позициям соответствуют разные позиции; 3) два хода Лёши сделанные подряд не изменяют позицию. Из этих свойств следует, что все позиции разбиваются на пары соответствующих друг другу.

Каждым своим ходом Лёша получает позицию, соответствующую текущей, а Мише приходится перейти к позиции, соответствующей которой ещё не было. Следовательно, Лёша всегда может сделать свой ход не проиграв, и, поскольку игра закончится (всего существует 4^n различных позиций), он выиграет.

11 класс

11.1. Ответ: $n = 3$ и $n = 7$.

Заметим, что для натурального числа x равенство $d(x) = 1$ возможно только в случае $x = 1$. Далее, $d(x) = 2$ тогда и только тогда, когда x — простое число, а $d(x) = 3$ тогда и только тогда, когда x — квадрат простого числа. Наконец, $d(x) = 4$ лишь в двух случаях: либо $x = pq$, где p и q — различные простые числа, либо $x = p^3$, где p — простое число. Также несложно показать, что равенство $d(x) = 5$ возможно лишь в случае $x = p^4$, где p — простое число.

Поскольку $7n > 1$ и $8n + 1 > 1$, то оба слагаемых в равенстве

$$d(7n) + d(8n + 1) = 7 \qquad (*)$$

больше единицы. Поэтому могут представиться лишь следующие четыре случая: либо $d(7n) = 2$, либо $d(7n) = 3$, либо $d(7n) = 4$, либо $d(7n) = 5$. Рассмотрим каждый из них отдельно.

1) Если $d(7n) = 2$, то $7n$ — простое число, и поэтому $n = 1$. Тогда $8n+1 = 9$, а значит, $d(8n + 1) = d(9) = 3$. Стало быть, в этом случае равенство $(*)$ не выполняется.

2) Если $d(7n) = 3$, то число $7n$ является квадратом простого числа, и поэтому $n = 7$. Тогда $8n + 1 = 57$, а значит, $d(8n + 1) = d(57) = d(3 \cdot 19) = 4$. Видим, что $n = 7$ удовлетворяет равенству $(*)$.

3) Если $d(7n) = 4$, то согласно замечанию в начале решения это означает, что либо 3а) $7n = 7^3$, либо 3б) $7n = 7 \cdot p$, где p — отличное от 7 простое число. Из уравнения $(*)$ следует, что в случае 3) должно выполняться равенство $d(8n + 1) = 3$, т.е. число $8n + 1$ должно быть квадратом простого числа.

В случае 3а) находим $n = 7^2 = 49$, и тогда $d(8n + 1) \neq 3$, так как число $8n + 1 = 8 \cdot 49 + 1$ не является квадратом простого числа.

В случае 3б) $n = p$ и тогда $8p + 1 = q^2$, где q — простое число. Из этого равенства видим, что q — нечётное число, а так как любое нечётное число представимо в виде $q = 4k \pm 1$, то получаем, что $8p + 1 = (4k \pm 1)^2 \iff 8p = (4k\pm1)^2-1 = 4k(4k\pm2) = 8k(2k\pm1)$, откуда $p = k(2k\pm1)$. Из этого равенства, так как p — простое число, однозначно $k = 1$, а значит, $p = 1 \cdot (2 \cdot 1 + 1) = 3$ и $n = p = 3$. Поэтому

$$d(7n) + d(8n + 1) = d(7 \cdot 3) + d(8 \cdot 3 + 1) = d(7 \cdot 3) + d(5^2) = 4 + 3 = 7.$$

Следовательно, $n = 3$ удовлетворяет уравнению $(*)$.

4) Если $d(7n) = 5$, то однозначно $7n = 7^4$, а значит, $n = 7^3 = 343$. Следовательно, $d(8n + 1) = d(8 \cdot 343 + 1) = d(2765) > 2$, и в этом случае решений уравнения $(*)$ нет.

11.2. Обозначим
$$A=\frac{a+c}{c-b}+\frac{b+a}{a-c}+\frac{c+b}{b-a}.$$

Заметим, что
$$\frac{a+b}{b-c}=\frac{a+b-c+c}{b-c}=1-\frac{a+c}{c-b},\quad \frac{b-c}{a+b}=\frac{b-c+a-a}{a+b}=1-\frac{c+a}{a+b}.$$
Аналогично получаем
$$\frac{b+c}{c-a}=1-\frac{b+a}{a-c},\quad \frac{c+a}{a-b}=1-\frac{c+b}{b-a},\quad \frac{c-a}{b+c}=1-\frac{a+b}{b+c},\quad \frac{a-b}{c+a}=1-\frac{b+c}{c+a}.$$
Поэтому из неравенства, данного в условии, получаем
$$\frac{a+b}{b-c}+\frac{b+c}{c-a}+\frac{c+a}{a-b}\leqslant\frac{b-c}{a+b}+\frac{c-a}{b+c}+\frac{a-b}{c+a}\iff$$
$$1-\frac{a+c}{c-b}+1-\frac{b+a}{a-c}+1-\frac{c+b}{b-a}\leqslant 1-\frac{c+a}{a+b}+1-\frac{a+b}{b+c}+1-\frac{b+c}{c+a}\iff$$
$$-A\leqslant-\frac{c+a}{a+b}-\frac{a+b}{b+c}-\frac{b+c}{c+a}\iff A\geqslant\frac{c+a}{a+b}+\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}.$$
Из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом для трёх чисел имеем
$$\frac{c+a}{a+b}+\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{c+a}{a+b}\cdot\frac{a+b}{b+c}\cdot\frac{b+c}{c+a}}=3.$$
Откуда $A\geqslant 3$.

Покажем, что $A>3$. Действительно, в неравенстве $A\geqslant 3$ знак равенства возможен лишь в случае, когда в используемом неравенстве о среднем арифметическом и среднем геометрическом для трёх чисел имеет место равенство, что возможно лишь при равенстве всех трёх чисел, т.е. при
$$\frac{c+a}{a+b}=\frac{a+b}{b+c}=\frac{b+c}{c+a}. \tag{1}$$
Однако, поскольку неравенства из условии задачи не изменяются при циклической замене $a\to b\to c\to a$, то, не нарушая общности, можем считать, что a — наибольшее из трёх чисел a, b и c, т.е., $a>b$ и $a>c$ (все числа попарно различны). Поэтому
$$\frac{b+c}{c+a}<\frac{a+c}{c+a}=1,\quad \text{а}\quad \frac{a+b}{b+c}>\frac{c+b}{b+c}=1,$$
откуда следует, что равенства (1) невозможны. Следовательно, $A>3$, что и требовалось доказать.

11.3. Для доказательства утверждения задачи установим, что справедлива следующая

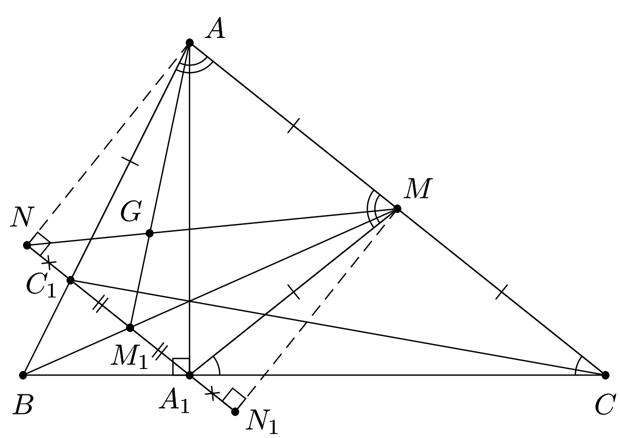
Лемма. *Если A_1 и C_1 — такие внутренние точки сторон BC и AC треугольника ABC, соответственно, что прямые AA_1 и CC_1 пересекаются на медиана BM, то прямые A_1C_1 и AC параллельны.*

Доказательство леммы. Через X обозначим точку пересечения прямых AA_1 и CC_1. Проведем через вершину B прямую ℓ параллельную стороне AC. Пусть A_2 и C_2 — точки пересечения прямой ℓ с прямыми AA_1 и CC_1 соответственно (рассматриваемые прямые пересекаются, так как $A_1 \neq A$ и $C_1 \neq C$). Так как $\ell \parallel AC$, то треугольник AXM подобен треугольнику A_2XB, а треугольник CXM — треугольнику C_2XB. Следовательно,

$$BA_2 : MA = BX : XM \quad \text{и} \quad BC_2 : MC = BX : XM.$$

Так как $MA = MC$, то $BA_2 = BC_2$. Так как $\ell \parallel AC$, то треугольник AA_1C подобен треугольнику A_2A_1B, а значит, $BA_1 : A_1C = BA_2 : AC$. Аналогичным образом устанавливается справедливость равенства $BC_1 : C_1A = BC_2 : AC$. Следовательно, $BA_1 : A_1C = BC_1 : C_1A$, а значит, прямые A_1C_1 и AC параллельны. Утверждение леммы доказано.

Пусть M_1 — точка пересечения прямых BM и A_1C_1, а N и N_1 − основания перпендикуляров, опущенных на прямую A_1C_1 из точек A и M соответственно.Так как точка пересечения прямых CC_1 и AA_1 принадлежит медиане BM, то $A_1C_1 \parallel AC$. Следовательно, ANN_1M − прямоугольник, а также справедливо равенство $A_1M_1 = M_1C_1$, т.е. AM_1 − медиана треугольника AC_1A_1. Пусть G − точка пересечения прямых NM и AM_1. Для решения задачи достаточно доказать, что G − точка пересечения медиан треугольника AC_1A_1, или, другими словами, доказать равенство $AG : GM_1 = 2$. Так как A_1M − медиана в прямоугольном треугольнике AA_1C, то $A_1M = MC = MA$. Поэтому, $\angle MA_1C = \angle A_1CM$.



Так как угол $\angle AMA_1$ является внешним для треугольника MA_1C, то $\angle A_1MA = 2\angle BCA = \angle CAB$. Таким образом, AC_1A_1M − равнобедренная трапеция с основаниями AM и C_1A_1. Так как угол $\angle BAC$ − острый, то $AM > C_1A_1$.

Следовательно, $NC_1 = A_1N_1 = \dfrac{AM - C_1A_1}{2}$. Поэтому, имеет место равенство

$$M_1N = M_1C_1 + C_1N = \frac{C_1A_1}{2} + \frac{AM - C_1A_1}{2} = \frac{AM}{2}.$$

Так как $AM \parallel M_1N$, то треугольники AGM и M_1GN подобны. Следовательно,

$$AG : GM_1 = AM : M_1N = AM : \frac{AM}{2} = 2.$$

11.4. Для решения задачи установим, что справедливо следующее утверждение.

Лемма. *Если в королевстве количество дорог не меньше, чем количество городов, то найдутся два города, связанные не менее двумя маршрутами без общих дорог.*

Доказательство. Количество городов королевства обозначим через n. Докажем утверждение леммы методом математической индукции по количеству городов. База индукции при $n = 2$ проверяется элементарно. Предположим, что утверждение леммы доказано при количестве городов равном $n = k$, докажем утверждение леммы для $n = k + 1$. Выберем произвольный город королевства и организуем следующий процесс: из текущего города переедим в ранее не посещённый город, связанный дорогой с текущим, и т.д. Так как количество городов в королевстве конечно, то определенный таким образом процесс не будет продолжаться бесконечно долго. Рассмотрим последний посещённый город, который обозначим через A. Если количество дорог, выходящих из города A, не менее двух, то найдется не использованная дорога, которая связывает город A с некоторым ранее посещённым городом B. Следовательно, города A и B связаны не менее двумя маршрутами без общих дорог. Если же из города A выходит менее двух дорог, то исключим из рассмотрения город A и выходящую, быть может, из него дорогу, после чего городов останется k, а дорог не менее k. Для завершения доказательства леммы достаточно воспользоваться предположением индукции. Лемма доказана.

Докажем, что из условия задачи следует, что количество дорог в королевстве не меньше чем количество городов, т.е. не меньше чем 448. Действительно, пронумеруем города числами от 1 до 448. Рассмотрим таблицу размера 448×2016. В клетку таблицы на пересечении строки с номером i и столбца с номером j поставим крестик, если в названии города с номером i встречается j-ая буква алфавита. Так как название каждого города королевства состоит из 6 различных букв, то общее количество крестиков в таблице равно $6 \times 448 = 2688$. Каждой дороге между городами взаимнооднозначно соответствует пара крестиков, стоящих в одном столбце. Пусть в столбце с номером j,

$j \in \{1, 2, \ldots, 2016\}$, стоит m_j крестиков, тогда количество различных пар крестиков в j-ом столбце равно $m_j(m_j-1)/2$. Общее количество M различных пар крестиков, стоящих в каком-либо одном столбце таблицы равно

$$M = \frac{m_1(m_1-1)}{2} + \frac{m_2(m_2-1)}{2} + \ldots + \frac{m_{2016}(m_{2016}-1)}{2} =$$
$$= \frac{m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_{2016}^2 - (m_1 + m_2 + \ldots + m_{2016})}{2}.$$

Справедливо неравенство $m_1^2+m_2^2+\ldots+m_{2016}^2 \geqslant \dfrac{1}{2016}(m_1+m_2+\ldots+m_{2016})^2$, которое доказывается домножением на 2016 и применением неравенства $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых. Так как $m_1 + m_2 + \ldots + m_{2016} = 2688$, то

$$M \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{2688^2}{2016} - 2688\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(12 \times 224)^2}{9 \times 224} - 12 \times 224\right) = 2 \times 224 = 448,$$

а значит, количество дорог в королевстве не меньше количества городов. Утверждение задачи следует из приведенной леммы.

Замечание. Утверждение задачи будет выполнено, и в том случае, когда в королевстве будет не более 404 города.

Задачи III этапа LXVII Белорусской математической олимпиады школьников

Второй день

Е.А.Барабанов, ведущий научный сотрудник Института математики АН Беларуси,

И.И.Воронович, доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации БГУ,

В.И.Каскевич, доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации БГУ,

С.А.Мазаник, зав. кафедрой высшей математики БГУ

Условия

8 класс

5. По дороге М1, вдоль которой стоят километровые столбы с числами, возрастающими на всем протяжении в одном направлении, с постоянной скоростью движется автомобиль. В некоторый момент времени водитель заметил и запомнил трёхзначное число на километровом столбе, возле которого он проехал (все цифры этого числа различны). Ровно через 3 часа автомобиль поравнялся с километровым столбом, на котором было число, записанное теми же цифрами, но все цифры поменяли свои позиции в записи этого числа. Ещё через 3 часа автомобиль снова поравнялся с километровым столбом, на котором было число, записанное теми же цифрами, что и раньше, но в записи этого числа снова все цифры поменяли свои позиции.

Какой может быть скорость этого автомобиля ?

6. Найдите все пары натуральных чисел $(a,\ b)$, $a \geqslant b$, удовлетворяющих равенству

$$ab = 20\ \cdot \text{НОД}\,(a,\ b) + 17\ \cdot \text{НОК}\,(a,\ b).$$

7. Дан параллелограмм $ABCD$. Рассмотрим всевозможные параллелограммы $BCEF$ такие, что:

1) $AB = CE$,

2) параллелограммы $ABCD$ и $BCEF$ лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BC.

Докажите, что всевозможные точки пересечения отрезков AE и DF лежат на одной окружности.

8. Какое наибольшее число прямоугольников 1×8 можно вырезать из прямоугольной таблицы 75×85? (Разрезы должны проходить по границам клеток таблицы).

9 класс

5. На параболе $y = x^2$ выбирается произвольная точка A, отличная от точки O – вершины параболы, и отмечается точка B – проекция точки A на ось абсцисс. Через точку B проводится прямая ℓ_A, перпендикулярная прямой OA.

Докажите, что все такие прямые ℓ_A пересекаются в одной точке.

6. Пусть $S(a)$ обозначает сумму цифр в десятичной записи числа a. Найдите все натуральные числа n, для которых выполняется равенство

$$n + 2 \cdot S(n) + 3 \cdot S(S(n)) + 4 \cdot S(S(S(n))) = 2017.$$

7. Квадратные трёхчлены $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ таковы, что

$$f(1) = g(2) = h(3), \quad f(2) = g(3) = h(1), \quad f(3) = g(1) = h(2).$$

Докажите, что многочлен $f(x) + g(x) + h(x)$ является константой.

8. Какое наибольшее число прямоугольников 1×9 можно вырезать из прямоугольной таблицы 94×104? (Разрезы должны проходить по границам клеток таблицы).

10 класс

5. На координатной плоскости Oxy (O – начало координат) изображены парабола $y = x^2$ и прямая, не параллельная оси абсцисс. Прямая проходит через точку P, лежащую на оси ординат, и пересекает левую ветвь параболы в точке A, а правую ветвь – в точке B (точка B расположена выше точки A). Точки D и C – проекции точек A и B на ось абсцисс соответственно. В трапецию $APOD$ вписана окружность, радиус которой равен 3/8.

Докажите, что в трапецию $PBCO$ можно вписать окружность и найдите её радиус.

6. Квадратные трёхчлены $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ таковы, что $f(1)+g(1)+h(1) = 1$ и

$$f(4) = 4g(2) = 16h(1), \quad g(4) = 4h(2) = 16f(1), \quad h(4) = 4f(2) = 16g(1).$$

Докажите, что $f(x) + g(x) + h(x) = x^2$.

7. На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ отложили равные отрезки AK, BL, CM и DN. Пусть X — точка пересечения прямых KM и LN, а Y — точка пересечения прямых AN и BM.

Докажите, что прямая XY параллельна стороне BC.

8. Какое наибольшее число прямоугольников 1×10 можно вырезать из прямоугольной таблицы 116×174? (Разрезы должны проходить по границам клеток таблицы).

11 класс

5. На координатной плоскости Oxy изображены парабола $y=x^2$ и прямая, проходящая через точку Q с координатами $(0;q)$, $q\neq0$. Прямая пересекает параболу в точках A и B. Точки D и C – проекции точек A и B на ось абсцисс соответственно.

Докажите, что в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда его площадь равна q^2.

6. Многочлены третьей степени $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ таковы, что

$$f(1)=g(2)=h(3)=4,\quad f(2)=g(3)=h(1)=5,\quad f(3)=g(1)=h(2)=6.$$

Найдите многочлен $F(x)=f(x)+g(x)+h(x)$, если известно, что $F(0)=3$.

7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ отметили точки M, N, K и L – середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно. Пусть P и Q – середины отрезков AL и LD.

Докажите, что прямые PM, LN и QK пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда прямые AD и BC параллельны.

8. Какое наибольшее число прямоугольников 2×11 можно вырезать из прямоугольной таблицы 70×140? (Разрезы должны проходить по границам клеток таблицы).

Решения

8 класс

8.5. Ответ : 111 км/ч.

Пусть на первом из рассматриваемых столбов записано число $\overline{abc}$. Тогда на втором столбе записано $\overline{bca}$ или $\overline{cab}$, а на третьем соответственно $\overline{cab}$ или $\overline{bca}$. Видим, что три числа на рассматриваемых столбах — это числа $\overline{abc}$, $\overline{bca}$ и $\overline{cab}$. Из условия следует, что второй столб находится на равных расстояниях от первого и третьего столбов. Поэтому одно из чисел $\overline{bca}$ или $\overline{cab}$ равно среднему арифметическому двух других из трех рассматриваемых чисел.

Пусть средним арифметическим является $\overline{bca}$. Иными словами $2\cdot\overline{bca} = \overline{abc}+\overline{cab}$, т. е. $200b+20c+2a = 100a+10b+c+100c+10a+b$, откуда после упрощения получим $189b = 108a + 81c$. Разделив все коэффициенты на 27, получим

$$7b = 4a + 3c. \qquad (*)$$

Это равенство очевидно выполняется при $a = b = c$. Однако из условия следует, что цифры a, b и c различны. Перепишем равенство $(*)$ в виде $7(b-a) = 3(c-a)$. Видим, что $(c-a)\,\vdots\,7$. Поскольку c и a — различные цифры, то при $c > a$ получим $c-a = 7$, $b-a = 3$, а при $c < a$ получим $a-c = 7$, $a-b = 3$. В первом случае существует две возможности (ни одна из цифр не равна нулю, так как число не может начинаться с нуля): 1) $c = 8$, $a = 1$ и тогда $b = 4$; 2) $c = 9$, $a = 2$ и тогда $b = 5$. Во втором случае также существует две возможности: 3) $a = 8$, $c = 1$ и тогда $b = 5$; 4) $a = 9$, $c = 2$ и тогда $b = 6$. Таким образом, числа на столбах — это либо 1) 148, 481 и 814, либо 2) 259, 592 и 925, либо 3) 851, 518 и 185, либо 4) 962, 629 и 296. Поскольку во всех случаях разность между наибольшим и наименьшим числами в этих тройках равна $814-148 = 925-259 = 851-185 = 962-296 = 666$, то это означает, что в этом случае автомобиль за 6 часов проехал 666 км. Поэтому его скорость равна 111 км/ч.

Пусть теперь средним арифметическим является $\overline{cab}$. Тогда аналогично получаем

$$7c = 4b + 3a, \qquad (**)$$

откуда снова либо $a = b = c$, что не соответствует условию задачи, либо, переписав $(**)$ в виде $7(c-b) = 3(a-b)$, находим, что $a-b = 7$, $c-b = 3$ при $a > b$, и $b-a = 7$, $b-c = 3$ при $a < b$. Это снова дает четыре решения: числа $\overline{abc}$, $\overline{cab}$ и $\overline{bca}$ — это либо 1) 814, 481 и 148, либо 2) 925, 592 и 259, либо 3) 185, 518 и 851, либо 4) 296, 629 и 962. В этом случае скорость движения автомобиля также равна 111 км/ч.

8.6. (37, 37); (54, 27); (88, 22); (105, 21); (95, 38); (90, 72); (190, 19); (360, 18).

Пусть НОД$(a,\ b) = d$. Тогда $a = d\,a_1$, $b = d\,b_1$, где НОД$(a_1,b_1) = 1$, и НОК$(a,b) = d\,a_1b_1$. Тогда уравнение из условия задачи можно переписать в виде $d\,a_1d\,b_1 = 20d+17d\,a_1b_1$. Сократив множитель d, получим $d\,a_1b_1 = 20+17a_1b_1$. Видим, что

$$20 = d\,a_1b_1 - 17a_1b_1 = a_1b_1(d-17).$$

Учитывая, что НОД$(a_1,\ b_1) = 1$ и $a_1 \geqslant b_1$, поскольку по условию $a \geqslant b$, возможны только следующие случаи.

1) $a_1 = b_1 = 1$, $d - 17 = 20$. Тогда $d = 37$ и $a = b = 37$.

2) $a_1 = 2$, $b_1 = 1$, $d - 17 = 10$. Тогда $d = 27$ и $a = 54$, $b = 27$.

3) $a_1 = 4$, $b_1 = 1$, $d - 17 = 5$. Тогда $d = 22$ и $a = 88$, $b = 22$.

4) $a_1 = 5$, $b_1 = 1$, $d - 17 = 4$. Тогда $d = 21$ и $a = 105$, $b = 21$.

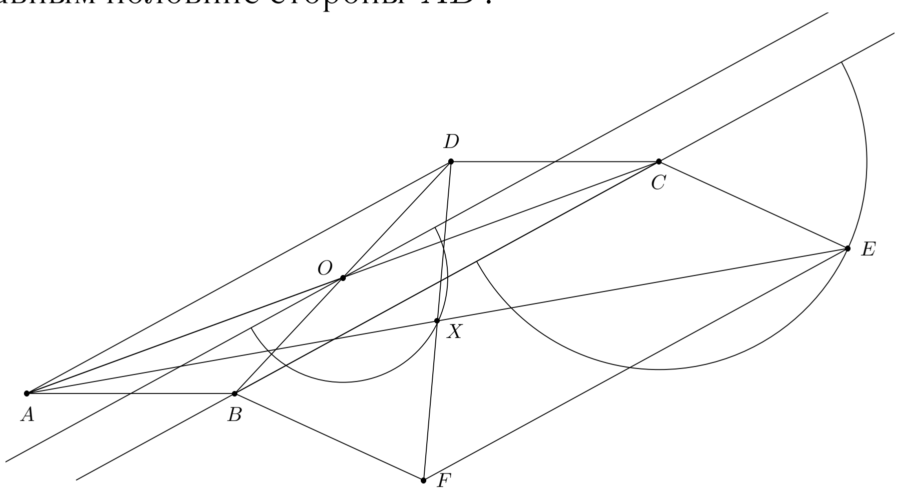
5) $a_1 = 5$, $b_1 = 2$, $d - 17 = 2$. Тогда $d = 19$ и $a = 95$, $b = 38$.

6) $a_1 = 5$, $b_1 = 4$, $d - 17 = 1$. Тогда $d = 18$ и $a = 90$, $b = 72$.

7) $a_1 = 10$, $b_1 = 1$, $d - 17 = 2$. Тогда $d = 19$ и $a = 190$, $b = 19$.

8) $a_1 = 20$, $b_1 = 1$, $d - 17 = 1$. Тогда $d = 18$ и $a = 360$, $b = 18$.

8.7. Покажем, что все точки пересечения отрезков AE и DF лежат на окружности с центром в точке пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ и радиусом, равным половине стороны AB.



Поскольку $ABCD$ — параллелограмм, то отрезки AD и BC равны и параллельны. Аналогично, отрезки BC и FE равны и параллельны. Следовательно, четырёхугольник $ADEF$ — параллелограмм, и, так как в параллелограмме диагонали пересекаются в серединах, то точка пересечения отрезков AE и DF является серединой отрезка AE.

Пусть O — середина отрезка AC, точка X — середина отрезка AE. Отрезок OX является средней линией треугольника ACE, следовательно, OX равно половине стороны CE и параллельна ей (в случае, если точки A, C, E лежат на одно прямой, треугольник ACE вырожденный, но, очевидно, OX также равно половине стороны CE и параллельна ей). Обозначим окружность с центром в точке C и радиусом AB через Ω, а окружность с центром в точке O и радиусом $AB/2$ — через ω.

Поскольку параллелограммы $ABCD$ и $BCEF$ лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BC, то всевозможные точки E лежат на окружности Ω и находятся в разных полуплоскостях с точкой A относительно прямой BC. Это означает, что всевозможные точки X лежат на окружности ω и находятся в разных полуплоскостях с точкой A относительно прямой, проходящей через точку O параллельно BC.

8.8. Ответ : 795.

Заметим, что прямоугольник $m \times n$ всегда можно полностью разрезать на куски 1×8, если одна из его сторон — m или n — делится на 8. На рисунке 1 данный прямоугольник 75×85 разбит на прямоугольник 3×5 и прямоугольники 72×5, 3×80 и 72×80. Каждый из трёх последних прямоугольников разрезается на куски 1×8 — соответственно на 45, на 30 и на 720 таких кусков. Стало быть, из данного прямоугольника можно вырезать $720 + 30 + 45 = 795$ кусков 1×8.

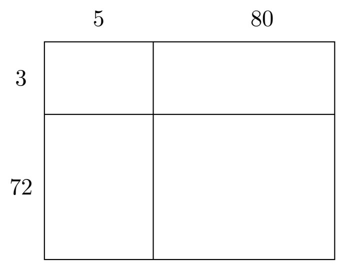


Рис. 1

1	2	3	4	5	6	7	8	1
2	3	4	5	6	7	8	1	
3	4	5	6	7	8	1		
4	5	6	7	8	1			
5	6	7	8	1				
6	7	8	1					
7	8	1						
8	1							
1								

Рис. 2

Покажем, что более чем 795 прямоугольных кусков 1×8 вырезать не удастся. Покрасим клетки данной таблицы в 8 цветов как показано на рисунке 2. Легко видеть, что любой прямоугольник 1×8 всегда накрывает ровно по одной клетке каждого цвета. Если вырезать из таблицы прямоугольный фрагмент 3×5, в котором нет клеток восьмого цвета, то в остальной части клеток каждого цвета будет поровну, т.е. $\dfrac{75 \cdot 85 - 15}{8} = 795$. Так как во фрагменте 3×5 клеток восьмого цвета нет, то всего в таблице имеется 795 клеток этого цвета. Так как каждый кусок 1×8 должен накрывать одну клетку восьмого цвета, то таких кусков не может быть больше, чем 795.

9.5.Пусть $A(a; a^2)$, $B(a; 0)$, $O(0; 0)$, и $P_A(0; p)$ — точка пересечения прямой ℓ_A с осью абсцисс. Не нарушая общности, считаем $a > 0$ (см. рис. 1).

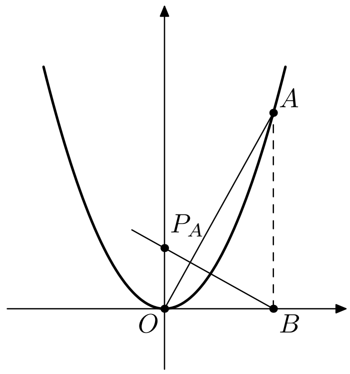


Рис. 1

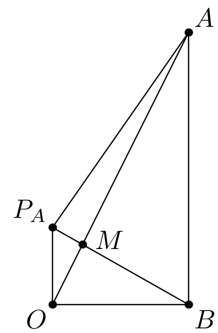


Рис. 2

Первое решение. Рассмотрим четырёхугольник $ABOP_A$, который, очевидно, является прямоугольной трапецией, так как $\angle ABO = \angle BOP_A = 90^\circ$ (см. рис. 2). Так как $ABOP_A$ — прямоугольная трапеция, то $OP_A \parallel AB$, и тогда $\angle P_AOA = \angle OAB$ (внутренние накрест лежащие углы). Поскольку диагонали трапеции перпендикулярны, то $\angle P_AMO = 90^\circ = \angle ABO$. Следовательно, треугольники P_AMO и OBA подобны (по двум углам). Кроме того, прямоугольные треугольники P_AMO и B_AOB тоже подобны , так как OM — высота прямоугольного треугольника P_AOB, откуда $\angle P_AOM = \angle P_ABO$. Следовательно подобны и треугольники OBA и P_AOB Поэтому

$$\frac{OP_A}{OB} = \frac{OB}{AB} \iff \frac{p}{a} = \frac{a}{a^2} \iff p = 1.$$

Таким образом, координаты точки P_A — $(0; 1)$ — не зависят от a. Откуда следует, что все прямые ℓ_A пересекаются в одной точке.

Второе решение. Используем обозначения предыдущего решения. Построим уравнение прямой OA. Оно имеет вид $y = kx$, так как прямая проходит через начало координат. Поскольку точка A принадлежит прямой, то для её координат выполнено равенство $a^2 = ka$, откуда $k = a$ $(a \neq 0)$. Пусть уравнение прямой BP_A имеет вид $y = \alpha x + \beta$. Так как по условию прямые OA и BP_A перпендикулярны, то произведение угловых коэффициентов этих прямых равно $\alpha a = -1$. Значит, уравнение прямой BP_A имеет вид $y = -\dfrac{1}{a} \cdot x + \beta$. Поскольку точка B принадлежит этой прямой, то для её координат выполнено равенство $0 = -\dfrac{1}{a} \cdot a + \beta$, откуда $\beta = 1$. Таким образом $y = -\dfrac{1}{a} \cdot x + 1$ —

уравнение прямой BP_A, и тогда, так как P_A лежит на этой прямой, её координаты удовлетворяют равенству $p = -\frac{1}{a} \cdot 0 + 1$, откуда $p = 1$. Таким образом, координаты точки $P_A(0;1)$ — не зависят от a. Откуда следует, что все прямые ℓ_A пересекаются в одной точке.

9.6. Ответ : 1945.

Так как $n \equiv S(n) \pmod 9$ для любого натурального n, то

$n+2\cdot S(n)+3\cdot S(S(n))+4\cdot S(S(S(n))) \equiv n+2n+3n+4n \equiv 10n \equiv n \pmod 9$.

А так как $2017 \equiv 1 \pmod 9$, то из уравнения

$$n + 2 \cdot S(n) + 3 \cdot S(S(n)) + 4 \cdot S(S(S(n))) = 2017 \qquad (*)$$

следует $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 9)$, т. е. $n = 9k + 1$ Далее, так как согласно $(*)$ $n < 2017$, то $S(n) \leqslant S(1999) = 28$. С учетом того, что $n \equiv 1(\mathrm{mod}\, 9)$, а, значит, и $S(n) \equiv 1(\mathrm{mod}\, 9)$, величина $S(n)$ может принимать только значения 28, 19, 10 и 1.

Если $S(n) = 28$, то $S(S(n)) = 2 + 8 = 10$, $S(S(S(n))) = 1 + 0 = 1$. Тогда согласно $(*)$ получаем: $n + 2 \cdot 28 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 1 = 2017$, откуда $n = 1927$. Но $S(1927) = 19 \neq 28$. Поэтому такое значение n не удовлетворяет уравнению $(*)$.

Если $S(n) = 19$, то $S(S(n)) = 1 + 9 = 10$, $S(S(S(n))) = 1 + 0 = 1$. Тогда согласно $(*)$ получаем: $n + 2 \cdot 19 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 1 = 2017$, откуда $n = 1945$. И, действительно, $S(1945) = 19$. Поэтому $n = 1945$ является решение уравнения $(*)$.

Если $S(n) = 10$, то $S(S(n)) = 1$ и $S(S(S(n))) = 1$. Тогда согласно $(*)$ получаем: $n+2\cdot10+3\cdot1+4\cdot1 = 2017$, откуда $n = 1990$. Но $S(1990) = 19 \neq 10$. Поэтому такое значение n не удовлетворяет уравнению $(*)$.

При $S(n) = 1$ получаем $S(S(n)) = 1$ и $S(S(S(n))) = 1$. Тогда согласно $(*)$ получаем: $n+2\cdot1+3\cdot1+4\cdot1 = 2017$, откуда $n = 2008$. Но $S(2008) = 10 \neq 1$. Поэтому такое значение n также не удовлетворяет уравнению $(*)$.

9.7. Обозначим $F(x) = f(x) + g(x) + h(x)$. Перепишем данные в условии равенства в виде

$$f(1) = g(2) = h(3), \quad g(1) = h(2) = f(3), \quad h(1) = f(2) = g(3).$$

Складывая эти равенства, получаем

$$F(1) = F(2) = F(3). \qquad (1)$$

Пусть $F(x) = ax^2 + bx + c$ и $F(1) = A$, где A — некоторое действительное число. Тогда из равенств (1) получаем систему

$$\begin{cases} a + b + c &= A, \\ 4a + 2b + c &= A, \\ 9a + 3b + c &= A. \end{cases} \qquad (1)$$

Вычитая из второго и третьего равенств первое, получим

$$\begin{cases} 3a + b &= 0, \\ 8a + 2b &= 0. \end{cases} \tag{2}$$

Вычитая из второго равенства этой системы удвоенное первое, найдем $2a = 0$, откуда $a = 0$. Тогда из первого уравнения системы (2) находим $b = 0$, и из первого уравнения системы (1) находим $c = A$. Таким образом, $F(x) = A$ при всех действительных x, что и требовалось доказать.

9.8. Ответ : 1084.

Заметим, что прямоугольник $m \times n$ всегда можно полностью разрезать на куски 1×9, если одна из его сторон — m или n — делится на 9. На рисунке 1 данный прямоугольник 94×104 разбит на прямоугольник 4×5 и прямоугольники 90×5, 4×99 и 90×99. Каждый из трёх последних прямоугольников разрезается на куски 1×9 — соответственно на 50, на 44 и на 990 таких кусков. Стало быть, из данного прямоугольника можно вырезать $990 + 50 + 44 = 1084$ кусков 1×9.

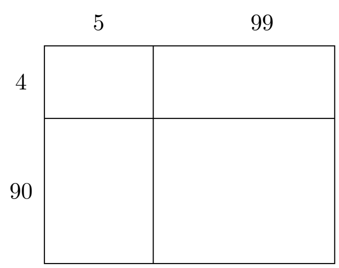


Рис. 1

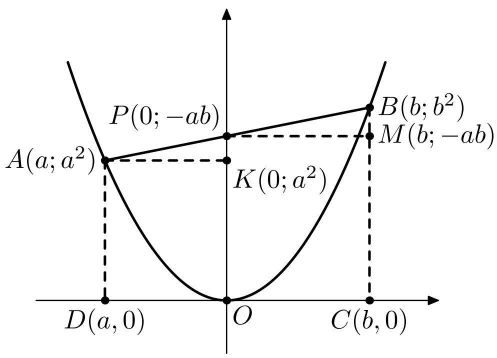
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1
2	3	4	5	6	7	8	9	1	
3	4	5	6	7	8	9	1		
4	5	6	7	8	9	1			
5	6	7	8	9	1				
6	7	8	9	1					
7	8	9	1						
8	9	1							
9	1								
1									

Рис. 2

Покажем, что более чем 1084 прямоугольных кусков 1×9 вырезать не удастся. Покрасим клетки данной таблицы в 9 цветов как показано на рисунке 2. Легко видеть, что любой прямоугольник 1×9 всегда накрывает ровно по одной клетке каждого цвета. Если вырезать из таблицы прямоугольный фрагмент 4×5, в котором нет клеток девятого цвета, то в остальной части клеток каждого цвета будет поровну, т.е. $\dfrac{94 \cdot 104 - 20}{9} = 1084$. Так как во фрагменте 4×5 клеток девятого цвета нет, то всего в таблице имеется 1084 клеток этого цвета. Так как каждый кусок 1×9 должен накрывать одну клетку девятого цвета, то таких кусков не может быть больше, чем 1084.

10.5. Ответ : Ответ: $R = 3/4$.

Пусть $O(0;0)$, $A(a;a^2)$, $B(b;b^2)$, $P(0;p)$. Тогда $C(b;0)$, $D(a;0)$. Из условия



следует, что $b^2 > a^2$. Пусть $K(0;a^2)$ — проекция точки A на ось ординат, а M — проекция точки P на прямую BC. Легко видеть (см. рисунок), что $AD = a^2$, $BC = b^2$, $PM = b$, $AK = DO = -a$. Найдём ординату p точки P. Для этого построим уравнение прямой AB : пусть уравнение искомой прямой —

$$y = kx + c. \tag{1}$$

Так как точки A и B лежат на этой прямой, то их координаты должны удовлетворять (1), поэтому $a^2 = ka + c$ и $b^2 = kb + c$. Из полученных равенств легко находим $k = a + b$ и $c = -ab$, т.е., уравнение прямой AB имеет вид $y = (a + b)x - ab$. Поскольку точка P лежит на прямой AB, то подставляя координаты точки P в уравнение прямой, находим $p = -ab$. Таким образом, $P(0;-ab)$ и $M(b;-ab)$. Следовательно, $KP = -ab - a^2$, $BM = b^2 + ab$, $PO = -ab$.

Тогда по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника APK имеем

$$AP = \sqrt{AK^2 + PK^2} = \sqrt{(-a)^2 + (-ab - a^2)^2} = \sqrt{a^2(1 + (a + b)^2)}.$$

Для того чтобы в трапецию $APOD$ можно было вписать окружность необходимо и достаточно, чтобы суммы длин её противоположных сторон были равны, т.е.

$$AP + DO = AD + PO \iff \sqrt{a^2(1 + (a + b)^2)} - a = a^2 - ab. \tag{1}$$

Так как по условию в трапецию $APOD$ вписана окружность, то, во-первых, из (1) следует, что

$$a^2 - ab + a > 0 \implies [a < 0] \implies a - b + 1 < 0, \tag{2}$$

а, во-вторых, из (1) следует, что

$$a^2(1+(a+b))^2 = a^2((a-b)+1)^2 \iff a^2(1+(a+b))^2 = a^2((a-b)^2+1+2(a-b)) \iff$$

$$4ab = 2(a - b) \iff 2ab = a - b. \tag{3}$$

Аналогично, применяя теорему Пифагора к треугольнику PBM, находим

$$PB = \sqrt{PM^2 + BM^2} = \sqrt{b^2 + (b^2 + ab)^2} = \sqrt{b^2(1 + (a + b)^2)}.$$

Далее имеем

$$PB + OC = PO + BC \iff \sqrt{b^2(1 + (a + b)^2)} + b = -ab + b^2 \iff$$

$$[(1) \implies b^2 - ab - b = b(b - a - 1) > 0] \iff$$

$$b^2(1 + (a + b)^2) = b^2((b - a) - 1)^2 = b^2((b - a)^2 + 1 - 2(b - a)) \iff$$

$$4ab = 2(a - b) \iff 2ab = a - b.$$

В силу (3) это означает, что в трапецию $PBCO$ также можно вписать окружность.

Пусть r и R — радиусы окружностей, вписанных в трапеции $APOD$ и $PBCO$ соответственно. Поскольку обе трапеции прямоугольные, то $2r = -a$, $2R = b$. Тогда из (1) получаем

$$-8Rr = -2r - 2R \iff R = \frac{r}{4r - 1}.$$

Подставляя данное в условии значение $r = 3/8$, получаем $R = 3/4$.

Замечание. Отметим, что возможность вписать окружность в трапецию $PBCO$ следует из подобия трапеций $APOD$ и $PBCO$. Действительно, все соответственные углы у этих трапеций очевидно равны, а их соответствующие стороны пропорциональны, так как

$$AD = a^2,\ PO = -ab,\ BC = b^2,\ DO = -a,\ OC = b,$$

$$AP = -a\sqrt{1 + (a + b)^2},\ PB = b\sqrt{1 + (a + b)^2},$$

откуда

$$\frac{AD}{PO} = \frac{AP}{PB} = \frac{DO}{OC} = \frac{PO}{BC} = -\frac{a}{b}.$$

10.6. Обозначим старшие коэффициенты квадратных трёхчленов $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ через α, β и γ соответственно. Рассмотрим многочлен $f(2x) - 4g(x)$. Очевидно, что его степень не выше 2, а коэффициент при x^2 равен $4(\alpha - \beta)$. В силу первого и третьего из данных в условии равенств

$$f(4) = 4g(2) = 16h(1), \quad g(4) = 4h(2) = 16f(1), \quad h(4) = 4f(2) = 16g(1)$$

заключаем, что $x = 2$ и $x = 1$ — корни многочлена $f(2x) - 4g(x)$, поэтому

$$f(2x) - 4g(x)4(\alpha - \beta)(x - 1)(x - 2).$$

Совершенно аналогично, находим

$$g(2x)-4h(x)=4(\beta-\gamma)(x-1)(x-2), \quad h(2x)-4f(x)=4(\gamma-\alpha)(x-1)(x-2).$$

Складывая полученные три равенства, получим, что при всех действительных x выполнено

$$f(2x)+g(2x)+h(2x)-4(f(x)+g(x)+h(x))=0. \tag{1}$$

Обозначим $F(x)=f(x)+g(x)+h(x)$. Тогда из (1) следует, что

$$F(2x)=4F(x) \tag{2}$$

для всех действительных x. Пусть $F(x)=ax^2+bx+c$. Теперь равенство (2) перепишется в виде $4ax^2+2bx+c=4ax^2+4bx+4c$, или $2bx+3c=0$ для всех действительных x. Отсюда необходимо получаем $c=0$ и $b=0$. Следовательно, $F(x)=ax^2$. Поскольку из условия следует, что $F(1)=1$, то $a=1$, т.е., $F(x)=x^2$, что и требовалось доказать.

Второе решение.

Обозначим $F(x)=f(x)+g(x)+h(x)$. Складывая данные в условии равенства

$$f(4)=4g(2)=16h(1), \quad g(4)=4h(2)=16f(1), \quad h(4)=4f(2)=16g(1),$$

получаем

$$F(4)=4F(2)=16F(1)=[F(1)=1 \text{ по условию}]=16. \tag{1}$$

Пусть $F(x)=ax^2+bx+c$. Тогда из равенств (1) получаем систему

$$\begin{cases} a+b+c &=1,\\ 4a+2b+c &=4,\\ 16a+4b+c &=16. \end{cases}$$

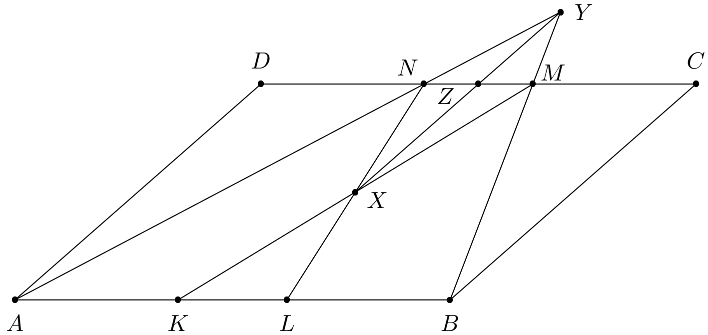
Решая которую, находим $a=1,\ b=0,\ c=0$. Действительно,

$$\begin{cases} a+b+c &=1,\\ 4a+2b+c &=4,\\ 16a+4b+c &=16 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a+b+c &=1,\\ 3a+b &=3,\\ 15a+3b &=15. \end{cases}$$

Вычитая из третьего уравнения системы утроенное второе, получаем $6a=6$, т.е., $a=1$, и тогда из второго уравнения получаем $b=0$, и теперь из первого уравнения находим $c=0$.

Таким образом, $f(x)+g(x)+h(x)=F(x)=x^2$, что и требовалось доказать.

10.7. Пусть прямая, проходящая через точку Y параллельно стороне BC пересекает сторону CD в точке Z.



Так как четырёхугольники $ZYCB$ и $ZYDA$ являются трапециями, то получаем две пары подобных треугольников: $\triangle ZYM \sim \triangle CBM$ и $\triangle ZYN \sim \triangle DAN$. Из этих подобий следуют равенства отношений: $ZM : CM = ZY : CB$ и $ZN : DN = ZY : DA$. Поскольку в этих отношениях $CM = DN$ и $CB = DA$, то $ZM = ZN$, т.е. Z — середина отрезка MN. Так как точка X является точкой пересечения диагоналей параллелограмма $KNML$, то X — середина отрезка MK, а отрезок XZ — средняя линия треугольника MNK. По свойству средней линии треугольника, $XZ \parallel NK \parallel BC$.

Через точку Z проходят прямые YZ и XZ, параллельные стороне BC, значит, эти прямые совпадают и точка Z лежит на прямой XY, параллельной стороне BC.

Замечание. В зависимости от того, что больше, $2AK$ или AB, возможны два различных положения точки Y: внутри или снаружи параллелограмма. Приведённое решение подходит к обоим случаям.

10.8. Ответ : Ответ : 2016.

Заметим, что прямоугольник $m \times n$ всегда можно полностью разрезать на куски 1×10, если одна из его сторон — m или n — делится на 10. На рисунке 1 данный прямоугольник 116×174 разбит на прямоугольник 4×6 и прямоугольники 170×6, 4×110 и 170×110. Каждый из трёх последних прямоугольников разрезается на куски 1×10 — соответственно на 102, на 44 и на 1870 таких кусков. Стало быть, из данного прямоугольника можно вырезать $102 + 44 + 1870 = 2016$ кусков 1×10.

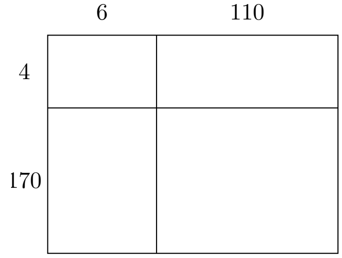


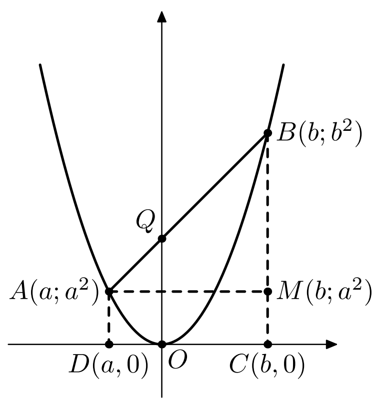
Рис. 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	
3	4	5	6	7	8	9	10	1		
4	5	6	7	8	9	10	1			
5	6	7	8	9	10	1				
6	7	8	9	10	1					
7	8	9	10	1						
8	9	10	1							
9	10	1								
10	1									
1										

Рис. 2

Покажем, что более чем 2016 прямоугольных кусков 1×10 вырезать не удастся. Покрасим клетки данной таблицы в 10 цветов как показано на рисунке 2. Легко видеть, что любой прямоугольник 1×10 всегда накрывает ровно по одной клетке каждого цвета. Если вырезать из таблицы прямоугольный фрагмент 4×6, в котором нет клеток десятого цвета, то в остальной части клеток каждого цвета будет поровну, т.е. $\dfrac{116 \cdot 174 - 24}{10} = 2016$. Так как во фрагменте 4×6 клеток десятого цвета нет, то всего в таблице имеется 2016 клеток этого цвета. Так как каждый кусок 1×10 должен накрывать одну клетку десятого цвета, то таких кусков не может быть больше, чем 2016.

11.5. Пусть O — начало координат, $A(a;a^2)$, $B(b;b^2)$. Тогда $C(b;0)$, $D(a;0)$. Очевидно,



что если $a^2 = b^2 = q$, то четырёхугольник $ABCD$ — прямоугольник и в него можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он является квадратом. Прямоугольник является квадратом тогда и только тогда, когда его стороны равны, т.е. $DC = BC = b^2 = q$, что равносильно тому, что площадь этого прямоугольника равна q^2.

Предположим, что $b^2 > a^2$. Пусть прямая, проходящая через точку A параллельно оси абсцисс, пересекает прямую BC в точке M. Легко видеть (см. рисунок), что $AD = a^2$, $BC = b^2$, $AM = b - a$ и $BM = b^2 - a^2$. Тогда по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника BAM имеем

$$AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{(b-a)^2 + (b^2-a^2)^2}.$$

Для того чтобы в трапецию $ABCD$ можно было вписать окружность необходимо и достаточно, чтобы суммы длин её противоположных сторон были равны, т.е.,

$$AB + CD = AD + BC \iff \sqrt{(b-a)^2 + (b^2-a^2)^2} + (b-a) = a^2 + b^2 \implies$$

$$(b-a)^2 + (b^2-a^2)^2 = \big((a^2+b^2) - (b-a)\big)^2 \iff$$
$$(b-a)^2 + (b^2-a^2)^2 = (a^2+b^2)^2 + (b-a)^2 - 2(b-a)(a^2+b^2) \iff$$
$$2(b-a)(a^2+b^2) = 4a^2b^2. \tag{1}$$

Следовательно, равенство (1) является необходимым для того, чтобы в трапецию $ABCD$ можно было вписать окружность.

Покажем, что равенство (1) является и достаточным для того, чтобы в трапецию $ABCD$ можно было вписать окружность. Действительно, если (1) выполнено, то

$$2(b-a)(a^2+b^2) = 4a^2b^2 = 4a^2b^2 = |2ab|^2 \leqslant (a^2+b^2)^2 \implies (b-a) \leqslant a^2 + b^2,$$

т.е.

$$a^2 + b^2 - b + a \geqslant 0. \tag{2}$$

Поэтому

$$2(b-a)(a^2+b^2)=4a^2b^2 \iff (b-a)^2+(b^2-a^2)^2=\big((a^2+b^2)-(b-a)\big)^2 \overset{(2)}{\Longrightarrow}$$

$$\sqrt{(b-a)^2+(b^2-a^2)^2}+(b-a)=a^2+b^2 \iff AB+CD=AD+BC.$$

таким образом выполнение равенства (1) необходимо и достаточно для того, чтобы в трапецию $ABCD$ можно было вписать окружность.

Кроме того, площадь $S(ABCD)$ прямоугольной трапеции $ABCD$ равна

$$S(ABCD)=\frac{AD+BC}{2}\cdot CD=\frac{a^2+b^2}{2}\cdot(b-a).$$

Таким образом, из (1) следует, что необходимым и достаточным условием возможности вписать окружность в трапецию $ABCD$ является выполнение условия

$$S(ABCD)=a^2b^2. \tag{3}$$

Найдём соотношение, связывающее ординату q точки Q с a и b. Для этого построим уравнение прямой $AB:$ пусть уравнение искомой прямой –

$$y=kx+c. \tag{4}$$

Так как точки A и B лежат на этой прямой, то их координаты должны удовлетворять (4), поэтому $a^2=ka+c$ и $b^2=kb+c$. Из полученных равенств легко находим $k=a+b$ и $c=-ab$, т.е., уравнение прямой AB имеет вид $y=(a+b)x-ab$. Поскольку точка Q лежит на прямой AB, то подставляя координаты точки Q в уравнение прямой, находим $q=-ab$.

Окончательно из (3) получаем, что равенство $S(ABCD)=q^2$ является необходимым и достаточным условием возможности вписать окружность в трапецию $ABCD$, что и требовалось доказать.

Случай, когда $a^2>b^2$ рассматривается аналогично.

Отметим, что на рисунке изображён случай, когда $q>0$, однако приведённое решение подходит и к случаю, когда $q<0$.

11.6. Ответ: $f(x)+g(x)+h(x)=2x^3-12x^2+22x+3.$

Обозначим $F(x)=f(x)+g(x)+h(x)$. Перепишем данные в условии равенства в виде

$$f(1)=g(2)=h(3)=4,\quad g(1)=h(2)=f(3)=6,\quad h(1)=f(2)=g(3)=5.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$F(1)=F(2)=F(3)=15. \tag{1}$$

Из полученного равенства следует, что числа 1, 2 и 3 — три различные корня уравнения $F(x)-15=0$. Поскольку очевидно, что степень многочлена $F(x)$ не выше 3 (как сумма трёх многочленов третьей степени), то $F(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)+15$. Так как по условию $3 = F(0) = -6a+15$, то $a = 2$ и

$$F(x) = 2(x-1)(x-2)(x-3)+15 = 2x^3-12x^2+22x+3.$$

Непосредственная проверка показывает, что найденный многочлен $F(x)$ удовлетворяет равенствам (1).

11.7. Предположим, что прямые AD и BC параллельны. Пусть прямая QK пересекает прямые BC и NL в точках R и S соответственно (см. рис. 1). Поскольку $CK = KD$, то четырёхугольник $CRDQ$ — параллелограмм и $CR = QD$. Треугольники SQL и SRN подобны с коэффициентом подобия $SL : SN = QL : RN = (AD/4) : (BC/2 + AD/4) = AD : (2BC + AD)$. Аналогично, если обозначить через R' и S' точки пересечения прямой MP с прямыми BC и NL, то получим подобные треугольники $S'PL$ и $S'R'N$ с таким же коэффициентом подобия, т.е. $SL : SN = S'L : S'N$, что равносильно равенству $1 + NL/SL = 1 + NL/S'L$. Это означает, что точки S и S' совпадают и прямые PM, LN и QK пересекаются в одной точке.

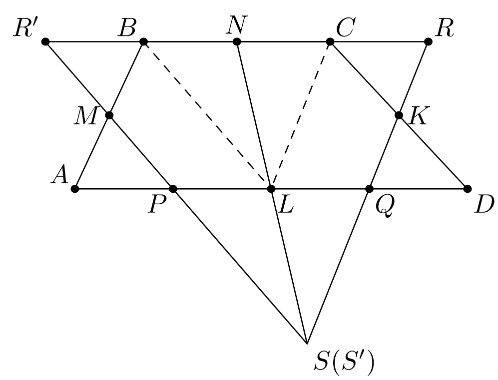


Рис. 1

Докажем обратное утверждение.

Первый способ. Пусть прямые PM, LN и QK пересекаются в точке S. Воспользуемся следующим хорошо известным фактом:

Лемма. Если отрезок, соединяющий две стороны треугольника, делится пополам медианой, проведённой к третьей стороне, то он параллелен этой стороне.

Пусть прямые QK и MP пересекают прямую BC в точках R и R' соответственно (см. рис. 1). Отрезки QK и PM являются средними линиями треугольников DCL и ABL соответственно, следовательно, $QK \parallel LC$ и $PM \parallel LB$, откуда $SR \parallel LC$ и $SR' \parallel LB$. Тогда по теореме Фалеса $NC : CR = NL : LS = NB : BR'$, и так как $NB = NC$, то $NR = NR'$. Из полученного равенства следует, что SN – медиана треугольника RSR'. Теперь требуемая параллельность $PQ \parallel BC$ следует напрямую из леммы.

Второй способ. Пусть прямые PM, LN и QK пересекаются в точке S. Для того, чтобы доказать, что прямые AD и BC параллельны, докажем вспомогательную лемму.

Лемма. Пусть векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ непараллельны, а x, y, p, q — действительные числа. Если векторы $x\vec{b}+y\vec{c}$ и $p\vec{b}+q\vec{c}$ параллельны, то пары чисел (x, y) и (p, q) пропорциональны ($xq = py$).

Доказательство. Если векторы $x\vec{b}+y\vec{c}$ и $p\vec{b}+q\vec{c}$ параллельны, то для некоторого действительного числа t верно равенство $x\vec{b}+y\vec{c} = t*(p\vec{b}+q\vec{c})$, которое равносильно равенству $(x-tp)\vec{b} = (y-tq)\vec{c}$. Но, так как векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ непараллельны, то из последнего равенства следует, что числа $(x-tp)$ и $(y-tq)$ равны нулю, т.е. $x = tp$, $y = tq$, $xq = tpq = py$. Лемма доказана.

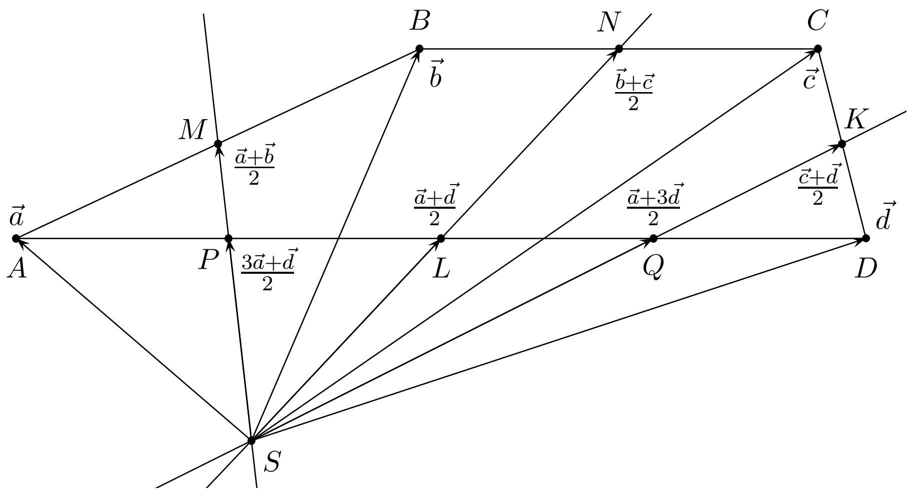


Рис. 2

Обозначим векторы $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ и $\overrightarrow{SD}$ через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ соответственно (см. рис.2). Так как векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ непараллельны, то любой вектор на плоскости можно записать в виде их линейной комбинации. Пусть $\vec{a} = x\vec{b}+y\vec{c}$, а $\vec{d} = u\vec{b}+v\vec{c}$, запишем в таком же виде остальные векторы.

$$\overrightarrow{SM} = (\vec{a}+\vec{b})/2 = 0.5(x+1)\vec{b}+0.5y\vec{c}, \quad \overrightarrow{SK} = (\vec{c}+\vec{d})/2 = 0.5u\vec{b}+0.5(v+1)\vec{c},$$
$$\overrightarrow{SN} = (\vec{b}+\vec{c})/2 = 0.5\vec{b}+0.5\vec{c}, \quad \overrightarrow{SL} = (\vec{d}+\vec{a})/2 = 0.5(x+u)\vec{b}+0.5(y+v)\vec{c},$$
$$\overrightarrow{SP} = (\vec{a}+\overrightarrow{AL})/2 = (3\vec{a}+\vec{d})/4 = (0.75x+0.25u)\vec{b}+(0.75y+0.25v)\vec{c},$$
$$\overrightarrow{SQ} = (\vec{d}+\overrightarrow{AL})/2 = (\vec{a}+3\vec{d})/4 = (0.25x+0.75u)\vec{b}+(0.25y+0.75v)\vec{c}.$$

Так как точка S является точкой пересечения прямых PM, LN и QK, то $\overrightarrow{SM} \parallel \overrightarrow{SP}$, $\overrightarrow{SL} \parallel \overrightarrow{SN}$ и $\overrightarrow{SQ} \parallel \overrightarrow{SK}$. Воспользуемся следующими цепочками следствий:

$$\overrightarrow{SM} \parallel \overrightarrow{SP} \Rightarrow 2\overrightarrow{SM} \parallel 4\overrightarrow{SP} \Rightarrow 2\overrightarrow{SM} \parallel 4\overrightarrow{SP} - 6\overrightarrow{SM} \Rightarrow (x+1)\vec{b} + y\vec{c} \parallel (u-3)\vec{b} + v\vec{c},$$

$$\overrightarrow{SL} \parallel \overrightarrow{SN} \Rightarrow 2\overrightarrow{SL} \parallel 2\overrightarrow{SN} \Rightarrow \vec{b} + \vec{c} \parallel (x+u)\vec{b} + (y+v)\vec{c},$$

$$\overrightarrow{SK} \parallel \overrightarrow{SQ} \Rightarrow 2\overrightarrow{SK} \parallel 4\overrightarrow{SQ} \Rightarrow 2\overrightarrow{SK} \parallel 4\overrightarrow{SQ} - 6\overrightarrow{SK} \Rightarrow u\vec{b} + (v+1)\vec{c} \parallel x\vec{b} + (y-3)\vec{c}.$$

По доказанной лемме это означает, что можно записать систему уравнений:

$$\begin{cases} (x+1)v = y(u-3), \\ y + v = x + u, \\ u(y-3) = (v+1)x. \end{cases} \qquad (1)$$

Складывая первое и третье уравнения системы (1), получим равенство $v - x = 3(u-y)$, а из второго равенства системы (1) следует равенство $v - x = u - y$. Следовательно, $v - x = u - y = 0$, т.е. $x = v$ и $y = u$.

Используя полученные равенства, найдём

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SD} = (x-u)\vec{b} + (y-v)\vec{c} = (x-y)\vec{b} - (x-y)\vec{c} = (x-y)\overrightarrow{CB},$$

откуда следует, что прямые AD и BC параллельны.

Замечание. Из решения видно, что точки P и Q не обязательно должны быть серединами отрезков AL и LD. Для того, чтобы требуемое утверждение оставалось верным, достаточно, чтобы точки P и Q делили сторону AD в одинаковом отношении, считая от вершин A и D соответственно.

11.8. Ответ : 444.

Заметим, что прямоугольник $m \times n$ всегда можно полностью разрезать на куски 2×11, если одна из его сторон — m или n — делится на 11, а другая — на 2. На рисунке 1 данный прямоугольник 70×140 разбит на прямоугольник 4×8 и прямоугольники 66×8, 4×132 и 66×132. Каждый из трёх последних прямоугольников разрезается на куски 2×11 — соответственно на 24, на 24 и на 396 таких кусков. Стало быть, из данного прямоугольника можно вырезать $24 + 24 + 396 = 444$ кусков 2×11.

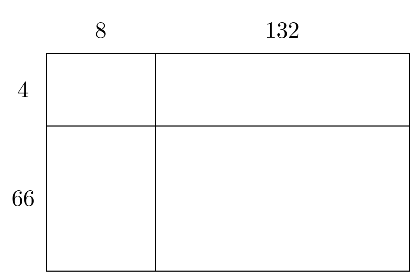


Рис. 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	
3	4	5	6	7	8	9	10	11	1		
4	5	6	7	8	9	10	11	1			
5	6	7	8	9	10	11	1				
6	7	8	9	10	11	1					
7	8	9	10	11	1						
8	9	10	11	1							
9	10	11	1								
10	11	1									
11	1										
1											

Рис. 2

Покажем, что более чем 444 прямоугольных кусков 2×11 вырезать не удастся. Покрасим клетки данной таблицы в 11 цветов как показано на рисунке 2. Легко видеть, что любой прямоугольник 2×11 всегда накрывает ровно по две клетке каждого цвета. Поэтому клеток первого цвета в таблице имеется $48 + 48 + 792 + 1 = 889$ (одна клетка первого цвета в прямоугольнике 4×8, остальные — в прямоугольниках 66×8, 4×132 и 66×132). Так как каждый прямоугольник 2×11 должен накрывать ровно по 2 клетки первого цвета, то таких прямоугольников 2×11 не может быть больше $\left[\dfrac{889}{2}\right] = 444.$