Задачи III этапа LXVIII Белорусской математической олимпиады школьников

Первый день

Условия

VIII класс

1. В озере рыболовецкого хозяйства живут караси, карпы и одна прожорливая щука, других рыб в озере нет. Сегодня средний вес карпа в 4 раза больше среднего веса карася в озере, а средний вес всей рыбы в озере, не считая щуки, в 2 раза меньше среднего веса карпа. Каждый день щука съедает не меньше одной, но не больше четырёх рыб.

Оказалось, что в какой-то из дней, вчера или сегодня, в озере оказалось ровно 2018 рыб, не считая щуки.

Сколько рыб съела щука в ночь со вчера на сегодня?

2. Найдите все возможные пары натуральных чисел a и b, для которых дробь $\dfrac{a^2+a+1}{ab-1}$ также является натуральным числом.

3. Диагонали AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O.

Найдите значение отношения OA/OC, если известно, что $AB = BC$ и $AD = DO = OB$.

4. Множество A состоит из 8 элементов. Подмножество этого множества назовём *небольшим*, если оно содержит не более половины элементов исходного множества A.

Какое наименьшее количество *небольших* подмножеств можно отметить так, чтобы для любой пары элементов из множества A нашлось отмеченное подмножество, содержащее оба элемента из этой пары?

IX класс

1. Действительные числа a, b и c удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} a(b-c) = a^2bc + 1, \\ b(c-a) = ab^2c + 1. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения величины abc^2.

2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC построен квадрат $ABDE$ (точки E и C лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AB). Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

Найдите величину угла EID.

3. Стороны AB, BC и CA треугольника ABC равны 7, 5 и 3, соответственно. На отрезке AB отмечены такие точки K, D и L, что CK — биссектриса угла ACD, а CL — биссектриса угла DCB.

Найдите длину отрезка CD, если $CK = CL$.

4. В комнате находилось 19 человек (лжецов и правдивых). 10 человек по очереди покинули комнату. Каждый из них при выходе из комнаты делал заявление: "В комнате лжецов осталось больше, чем правдивых."

Сколько лжецов могло быть в комнате первоначально?

X класс

1. Действительные числа a, b и c удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} (a+b)(b+c) = c - a - 1, \\ (a+b)(a+c) = b - c - 1. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения величины $(a+c)(b+c)$.

2. Решите в натуральных числах k, l, m и n уравнение

$$17(klmn + kl + mn + kn + 1) = 54(lmn + l + n).$$

3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность.

Найдите длину диагонали AC, если $AB = 6$. $BC = BD = 8$ и BD – биссектриса угла ABC.

4. На острове жили N человек (лжецов и правдивых). Не менее половины островитян по очереди уехали с острова. Каждый из них, покидая остров, заявил: "На острове лжецов осталось больше, чем правдивых."

Сколько лжецов могло быть на острове первоначально?

XI класс

1. Рациональные числа a и b таковы, что $a^2 - 2ab = -4$ и $b^3 - 2a^2b = 8$. Определите все возможные пары (a, b) таких чисел.

2. Школьник Лёша несколько раз проделал одну и ту же операцию: задумал два различных натуральных числа, дающих в сумме 2018, и перемножил задуманные числа с их положительной разностью, после чего записал результат в тетрадку. Известно, что все задуманные Лёшей пары чисел различны.

Докажите, что никакое число не могло быть выписано больше двух раз.

3. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC построен квадрат $ABDE$ (точки E и C лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AB). Биссектриса угла $\angle ACB$ пересекает прямые AB и DE в точках L и N, соответственно. Описанная окружность треугольника ABN пересекает отрезок CL в точке K.

Докажите, что $CK = KL$.

4. Множество A состоит из 10 элементов. Подмножество этого множества назовём *небольшим*, если оно содержит не более половины элементов исходного множества A.

Какое наименьшее количество *небольших* подмножеств можно отметить так, чтобы для любой пары элементов из множества A нашлось отмеченное подмножество, содержащее оба элемента из этой пары?

Решения

8 класс

8.1. Ответ: 2 рыбы.

Пусть X – общий вес карпов в озере сегодня, а N – их количество. Пусть Y – общий вес карасй в озере сегодня, А M – их количество. Тогда

$$\frac{X}{N} = 4\frac{Y}{M}. \tag{1}$$

С другой стороны, средний вес одной рыбы в озере сегодня равен $\dfrac{X+Y}{M+N}$ и поэтому

$$\frac{X+Y}{M+N} = \frac{X}{2N}. \tag{2}$$

Из (1) следует, что $Y = \dfrac{XM}{4N}$, и тогда, подставляя это значение в (2), получаем

$$\frac{X + \dfrac{XM}{4N}}{M+N} = \frac{X}{2N} \implies 4N + 2M = 2M + 2N \implies M = 2N.$$

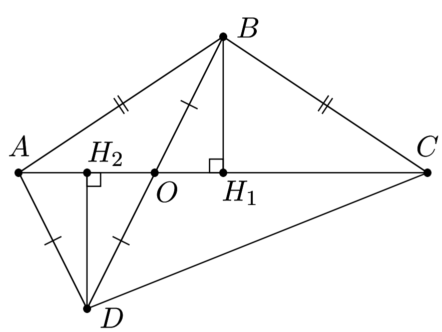
Следовательно, общее количество рыб в озере сегодня, не считая щуки, должно делится на 3. Поскольку 2018 на 3 не делится, то 2018 рыб в озере, не считая щуки, было вчера. Сегодня же в озере будет или 2017, или 2016, или 2015, или 2014 рыб (щука съедает от одной до четырёх рыб в день). Однако только число 2016 делится на 3, и поэтому сегодня в озере 2016 рыб, т.е. щука съела 2 рыбы.

8.2. Ответ: $(a, b) \in \{(1,2),\ (1,4),\ (2,1),\ (2,4),\ (4,1),\ (4,2)\}$.

Пусть a и b натуральные числа, для которых $a^2 + a + 1$ нацело делится на $ab - 1$. Тогда $b(a^2 + a + 1) = a(ab-1) + (ab-1) + a + b + 1 \,\vdots\, ab - 1$, а значит, дробь $\dfrac{a+b+1}{ab-1}$ является натуральным числом. Поскольку числа a и b симметричным образом присутствуют в числителе и знаменатели последней дроби, то без нарушения общности считаем, что $a \leqslant b$. Если $a \geqslant 3$, то $ab-1 \geqslant 3b-1 > a+b+1$, а значит, $a+b+1$ не делится на $ab-1$. Пусть $a=1$, тогда $b+2 \,\vdots\, b-1$, а значит, $b+2-(b-1)=3 \,\vdots\, b-1$. Следовательно, $b=2$ либо 4. Пусть $a=2$, тогда $b+3 \,\vdots\, 2b-1$, а значит, $2(b+3)-(2b-1)=7 \,\vdots\, 2b-1$. Следовательно, так как $b \geqslant a = 2$, то $b=4$. Непосредственная проверка показывает, что пары $(1,2)$, $(1,4)$, $(2,1)$, $(2,4)$, $(4,1)$ и $(4,2)$ чисел удовлетворяют условию задачи.

8.3. Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

Пусть H_1 и H_2 — основания перпендикуляров, опущенных на прямую AC из вершин



B и D, соответственно. Так как треугольники ABC и ADO равнобедренные, то $AH_1 = H_1C$ и $AH_2 = H_2O$. Углы $\angle BOH_1$ и $\angle H_2OD$ равны как вертикальные. Следовательно, треугольники BOH_1 и DOH_2 равны, а значит, $H_2O = OH_1$. Таким образом, $OA = 2OH_2$,

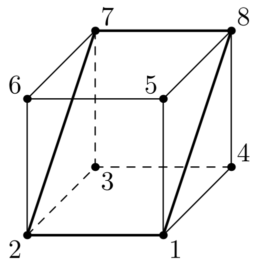
$$OC = OH_1 + H_1C = 4OH_2 \quad \text{и} \quad OA/OC = 1/2.$$

8.4. Ответ: 6.

Каждый элемент x множества A образует 7 пар с остальными элементами множества A. С другой стороны, присутствие x в небольшом подмножестве даёт не более трёх пар с присутствием x, так как кроме x в небольшом подмножестве ещё не более трёх элементов. Поэтому элемент x содержится не менее, чем в $\dfrac{7}{3} = 2\dfrac{1}{3}$ небольших подмножествах. Итак, любой элемент из A содержится не менее, чем в трёх небольших подмножествах. Поэтому общее количество небольших подмножеств не меньше, чем $\dfrac{8 \cdot 3}{4} = 6$.

Покажем, что 6 небольших подмножеств можно отметить с соблюдением условия задачи.

Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Тогда набор следующих небольших подмножеств удовлетворяет условию:



$$A_1\{1, 2, 7, 8\},\ A_2\{2, 3, 5, 8\},\ A_3\{3, 4, 5, 6\},$$

$$A_4\{1, 4, 6, 7\},\ A_5\{1, 3, 5, 7\},\ A_6\{2, 4, 6, 8\}.$$

Это проверяется непосредственно, но можно для наглядности это сделать так. Пусть A – множество вершин куба. Тогда отмеченные подмножества – это вершины всех шести прямоугольгиков вида, указанного на рисунке.

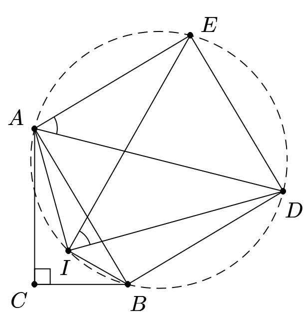
9 класс

9.1. Ответ: -1.

Пусть $x = ac$ и $y = bc$. Искомая величина равна $abc^2 = xy$. В силу первого уравнения из условия задачи справедливо равенство $ab - x = abx + 1$, т. е. $(ab+1)x = ab-1$. Предположим, что $ab+1 = 0$, тогда $ab-1 = 0$, а значит, $1 = -1$. Следовательно, $ab + 1 \neq 0$ и $x = \dfrac{ab-1}{ab+1}$. Аналогичным образом из второго уравнения получаем $y - ab = aby + 1$, т. е. $y = \dfrac{ab+1}{1-ab}$. Поэтому, $abc^2 = xy = -1$.

9.2. Ответ: $\angle EID = 45°$.

Так как центр вписанной окружности треугольника является точкой пересечения его биссектрис, то $\angle IAB = \dfrac{1}{2}\angle CAB$ и $\angle IBA = \dfrac{1}{2}\angle CBA$. Следовательно,



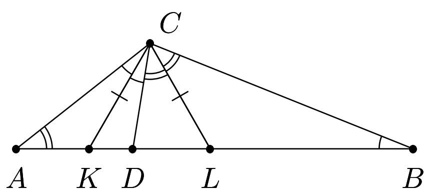
$$\angle AIB = 180° - \angle IAB - \angle IBA =$$

$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle CAB + \angle CBA) = 135°.$$

Так как $ABDE$ — квадрат, то $\angle ADB = 45^\circ$. Поэтому, $\angle AIB + \angle ADB = 135^\circ + 45^\circ = 180^\circ$. Таким образом, $AIBD$ — вписанный четырёхугольник, а значит, точка I принадлежит описанной окружности квадрата $ABDE$. Так как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги, равны, то $\angle EID = \angle EAD = 45^\circ$.

9.3. Ответ: $CD = \dfrac{15}{8}$.

В силу теоремы косинусов для треугольника ABC имеет место равенство



$49 = 9+25-30\cos\angle ACB$, а значит, $\cos\angle ACB = -\dfrac{1}{2}$, т. е. $\angle ACB = 120^\circ$. Пусть $\angle ACK = \angle KCD = x$ и $\angle BCL = \angle LCD = y$. Тогда $2(x+y) = 120^\circ$, следовательно, $x + y = 60^\circ$. В силу условия задачи справедливо равенство $CK = CL$, поэтому треугольник CKL — равносторонний, а значит, $\angle CKL = \angle CLK = 60^\circ$. Так как угол $\angle CLK$ — внешний для треугольника CLB, то $\angle CBL = \angle CLK - \angle LCB = 60^\circ - y = x$. Треугольник ACK подобен треугольнику ABC согласно первому признаку подобия треугольников, поэтому, $\dfrac{AK}{AC} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CK}{CB}$, а значит, $AK = \dfrac{9}{7}$ и $CK = \dfrac{15}{7}$. Треугольник KCD подобен треугольнику KBC согласно первому признаку подобия треугольников, поэтому, $\dfrac{CD}{CB} = \dfrac{CK}{KB}$. Так как $KB = AB - AK = \dfrac{40}{7}$, то $CD = \dfrac{CB \cdot CK}{KB} = \dfrac{15}{8}$.

9.4. Ответ : 10.

После того, как из комнаты вышел последний 10-й человек, в комнате осталось 9 человек. Пусть лжецов среди них на k больше, чем правдивых ($k = 1,\ 3, 5, 7$ или 9). Тогда последние k человек, покинувшие комнату, являются правдивыми. Пока они выходили лжецов в комнате оставалось больше, чем правдивых. Когда эти k человек ещё находились в комнате, а все предшествующие им вышли, в комнате было $9 + k$ человек, лжецов и правдивых поровну. Поэтому человек, который вышел из комнаты $(k + 1)$-м с конца, оставив в комнате поровну лжецов и правдивых, был лжецом. А тогда, когда он еще находился в комнате, а предшествующие вышли , лжецов было на 1 больше. Поэтому человек, который вышел из комнаты $(k+2)$-м с конца, был правдивым. Продолжив, рассматривать выходящих далее с $(k+3)$-го до перевого, видим, что лжецы и правдивые чередуются. Итак, лжецов и правдивых среди $9+k$ человек, оставшихся в комнате и последних k вышедших, поровну. Среди остальных $10-k$ человек, вышедщих из комнаты первыми, лжецы и правдивые чередуются, заканчивая лжецом. Так как число $10-k$ нечетное, то среди этих $10-k$ человек лжецов на 1 больше, чем правдивых. В результате и всего лжецов вначале в комнате было на 1 больше, чем правдивых, т.е. их было 10.

Если среди оставшихся в конце в комнате 9 человек было больше правдивых, то аналогичные рассуждения приводят к тому же ответу.

10 класс

10.1. Ответ: -1.

Пусть $x=b+c$ и $y=a+c$. Искомая величина равна $(a+c)(b+c)=xy$. В силу первого уравнения из условия задачи справедливо равенство $(a+b)x=x-(a+b+1)$, т. е. $(a+b-1)x=-(a+b+1)$. Предположим, что $a+b-1=0$, тогда $a+b+1=0$, а значит, $1=-1$. Следовательно, $a+b-1\neq 0$ и $x=-\dfrac{a+b+1}{a+b-1}$. Аналогичным образом из второго уравнения получаем $(a+b)y=(a+b-1)-y$, т. е. $y=\dfrac{a+b-1}{a+b+1}$. Поэтому, $(a+c)(b+c)=xy=-1$.

10.2. Ответ: $(k;l;m;n)=(3;5;1;2)$.

Перепишем исходное уравнение в виде

$$(54-17k)(lmn+l+n)=17(mn+1). \qquad (1)$$

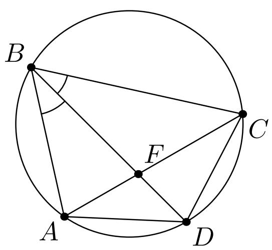
Из (1) следует, что $0<54-17k<17$, так как k,l,m,n – натуральные числа, причем очевидно, что $lmn+l+n>mn+1$. Из полученного двойного неравенства имеем $2\frac{3}{17} < k < 3\frac{3}{17}$, откуда $k = 3$. Подставим это значение в (1) и перепишем полученное уравнение в виде

$$(17 - 3l)(mn + 1) = 3n. \tag{2}$$

Опять же, так как $mn + 1 > n$, то из (2) получаем $0 < 17 - 3l < 3$, т.е. $\frac{14}{3} < l < \frac{17}{3}$, откуда $l = 5$. Подставляя в (2), получим $2(mn + 1) = 3n$ или $2 = n(3 - 2m)$, откуда однозначно $m = 1$, $n = 2$.

10.3. Ответ: 7.

Пусть F – точка пересечения диагоналей AC и BD. По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника отношение $AF : FC$ равно $AB : BC = 6 : 8 = 3 : 4$. Поэтому можно обозначить $AF = 3x$, $FC = 4x$. Далее, $AD = DC$ как хорды, на которые опираются равные вписанные углы (BD – биссектриса угла ABC); обозначим $AD = DC = y$. Заметим, что треугольники FDC и CDB подобны ($\angle FCD = \angle CAD = \angle CBD$ и угол D общий). Поэтому



$$\frac{FD}{DC} = \frac{DC}{BD} = \frac{FC}{BC}, \quad \text{или} \quad \frac{FD}{y} = \frac{y}{8} = \frac{4x}{8}.$$

Тогда, во-первых, $y = 4x$, во-вторых, $FD = \frac{y^2}{8} = 2x^2$. Далее, по теореме о пересекающихся хордах имеем $AF \cdot FC = DF \cdot FB$, или $3x \cdot 4x = 2x^2(8 - 2x^2)$, т.е. $6 = 8 - 2x^2$, откуда $x = 1$. Поэтому $AC = 3x + 4x = 7x = 7$.

10.4. Ответ: $\left[\frac{N+1}{2}\right]$.

Пусть сначала $N = 2n + 1$ – нечётное. Тогда остров покинули не меенее $n + 1$ человек. Рассмотрим тот момент когда остров покинули ровно $n + 1$ человек и на острове осталось n жителей. Пусть среди оставшихся n жителей лжецов на k больше, чем правдивых. Тогда последние k человек (из $n+1$-го), покинувшие остров, являются правдивыми. Пока они выходили лжецов на острове оставалось больше, чем правдивых. Когда эти k человек ещё находились на острове, а все предшествующие уехали, на острове было $n+k$ человек, лжецов и правдивых поровну. Поэтому человек, который уехал с острова $(k+1)$-м с конца, оставив на острове поровну лжецов и правдивых, был лжецом. А тогда, когда он еще находился на острове, а предшествующие уже уехали , лжецов было на 1 больше. Поэтому человек, который уехал с острова комнаты $(k+2)$-м с конца, был правдивым. Продолжив, рассматривать уехавших далее с $(k+3)$-го до перевого, видим, что лжецы и правдивые чередуются. Итак, лжецов и правдивых среди $n+k$ человек, оставшихся на острове и последних k уехавших, поровну. Среди остальных $n+1-k$ уехавших с острова, лжецы и правдивые чередуются, заканчивая лжецом. Так как число $n+1-k$ нечетное (ведь $n-k$ и $n+k$ имеют одинаковую чётность, а $n+k$ – чётное), то среди этих $n+1-k$ человек лжецов на 1 больше, чем правдивых. В результате и всего лжецов вначале на острове было на 1 больше, чем правдивых, т.е. их было $n+1$.

Если среди оставшихся на острове n человек , было больше правдивых, то аналогичные рассуждения приводят к тому же ответу.

Если $N=2n$ – чётное, то рассуждая аналогично, можно прийти к заключению, что вначале лжецов на острове было ровно половину, т.е. n человек. Независимо от чётности числа N ответ можно представить в виде $\left[\dfrac{N+1}{2}\right]$ (здесь квадратные скобки обозначают целую часть числа).

11 класс

11.1. Ответ: $(-2,-2)$.

Поскольку $(-4)^3=-8^2$, то $(a^2-2ab)^3+(b^3-2a^2b)^2=0$. После раскрытия скобок и приведения подобных членов приходим к уравнению

$$a^6-6a^5b+16a^4b^2-8a^3b^3-4a^2b^4+b^6=0 \qquad (*)$$

Так как из второго равенства условия видно, что $b\neq 0$, то обе части равенства ($*$) можно разделить на b^6. Сделав замену переменных $t=a/b$, получим уравнение

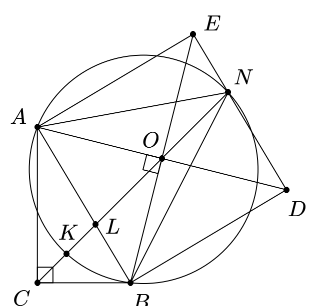
$$t^6-6t^5+16t^4-8t^3-4t^2+1=0 \qquad (**)$$

Как известно, все рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами находятся среди несократимых дробей, числитель которых делит свободный член, а знаменатель делит старший коэффициент. Следовательно, рациональными корнями уравнения $(**)$ могут быть только ± 1. Нетрудно видеть, что подходит только $t = 1$, значит, $a = b$. Тогда равенство $b^3 - 2a^2 b = 8$ примет вид $a^3 - 2a^3 = 8$, откуда $a^3 = -8$ и $a = b = -2$.

Замечание. В уравнении $(*)$ все одночлены имеют одинаковую степень (равную 6), такие уравнения называются однородными уравнениями (шестой степени). Замена, использованная в решении задачи, применима к однородным уравнениям двух переменных любой степени: вначале надо разделить на одну из переменных в степени, равной степени всех одночленов, после чего ввести новую переменную — отношение старых двух переменных.

11.2. Обозначим меньшее из задуманных Лёшей чисел через m, а число, записанное в тетрадку, через $P(m)$. По условию $P(m)$ вычисляется как значение многочлена $m(2018 - m)(2018 - 2m)$ третьей степени. Заметим, что у этого многочлена старший коэффициент положителен, а корни — числа 0, 1009 и 2018. Значит, многочлен $P(m)$ возрастает и отрицателен на интервале $(-\infty, 0)$, положителен и имеет ровно один максимум на интервале $(0, 1009)$, отрицателен и имеет ровно один минимум на интервале $(1009, 2018)$ и возрастает и положителен на интервале $(2018, +\infty)$. Так как Лёша выписывает в тетрадку значения этого многочлена на промежутке $(0, 1009)$, то никакое число не может быть выписано больше двух раз.

11.3. Пусть O — центр квадрата $ABDE$. Докажем, что точка O принадлежит прямой LN. Действительно, так как $\angle AOB = 90^\circ$, то $ACBO$ — вписанный четырёхугольник. Следовательно, учитывая, что $\triangle AOB$ — равнобедренный треугольник с основанием AB, имеем цепочку равенств $\angle ACO = \angle OBA = \angle OAB = \angle OCB$, а значит, биссектриса угла $\angle ACB$ проходит через точку O. Так как квадрат — центрально симметричный четырёхугольник, то $LO = ON$.



Введём следующие обозначения: $CK = a$, $KL = b$ и $LO = ON = c$. Так как

$ACBO$ — вписанный четырёхугольник, то $AL \cdot LB = CL \cdot LO = (a+b)c$. Так как $AKBN$ — вписанный четырёхугольник, то $AL \cdot LB = KL \cdot LN = 2bc$. Следовательно, $(a+b)c = 2bc$, а значит, $a = b$, так как $c \neq 0$. Таким образом, $CK = KL$.

11.4. Ответ: 6.

Каждый элемент x множества A образует 9 пар с остальными элементами множества A. С другой стороны, присутствие x в небольшом подмножестве даёт не более четырёх пар с присутствием x, так как кроме x в небольшом подмножестве ещё не более четырёх элементов. Поэтому элемент x содержится не менее, чем в $\frac{9}{4} = 2\frac{3}{4}$ небольших подмножествах. Итак, любой элемент из A содержится не менее, чем в трёх небольших подмножествах. Поэтому общее количество небольших подмножеств не меньше, чем $\frac{10 \cdot 3}{5} = 6$.

Покажем, что 6 небольших подмножеств можно отметить с соблюдением условия задачи.

Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Тогда, как легко проверить, набор следующих небольших подмножеств удовлетворяет условию:

$$A_1\{1, 2, 3, 4, 5\},\ A_2\{1, 2, 6, 7, 9\},\ A_3\{2, 3, 7, 8, 10\},$$

$$A_4\{3, 4, 8, 9, 6\},\ A_5\{4, 5, 9, 10, 7\},\ A_6\{5, 1, 10, 6, 8\}.$$

Пример можно построить и из наглядных соображений. Рассмотрим любой додекаэдр – правильный многогранник с 20 вершинами, все 12 граней которого – правильные пятиугольники. Отождествим в нем пары центрально симметричных вершин.Тогда 6 оставшихся граней – искомые небольшие подмножества.

Задачи III этапа LXVIII Белорусской математической олимпиады школьников

Второй день

Условия

VIII класс

5. Дан квадратный трёхчлен $x^2 - px + q$ с натуральными коэффициентами p и q. Компьютерная программа умеет выполнять только одно действие: выбрать произвольный натуральный корень a введённого трёхчлена и подставить его вместо q. Если у нового полученного трёхчлена натуральных корней нет, то программа завершает работу.

Докажите, что, если для некоторого трёхчлена x^2-px+q программа может выполнить любое количество действий, то q делится на $p-1$.

6. Решите уравнение $p^8 + p^5 + 1 = q^2$ в простых числах p и q.

7. На сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены точки K и N соответственно. Отрезки AN и BK пересекаются в точке M.

Найдите длину отрезка AB, если $AM=MN=4$, $KB=KC=6$, $AK=3$.

8. В каждой клетке квадратной доски $n\times n$ стоит по одной фишке. За один ход можно выбрать две фишки, стоящие в различных клетках, и переместить их либо в соседние клетки справа, либо в соседние клетки снизу. Покидать доску фишки не могут.

При каких натуральных $n \geqslant 2$ за несколько ходов можно переместить все фишки в правый нижний угол доски, если на каждом ходу фишки перемещаются

а) в одинаковом направлении,

в) всегда в разном направлении?

IX класс

5. Найдите все действительные числа a, для которых при всех натуральных значениях n верно неравенство $(1+a)^n \geqslant 2(n-1)a$.

6. Решите уравнение $p^8 - p^4 = q^5 - q$ в простых числах p и q.

7. В неравнобедренном треугольнике ABC отмечен ортоцентр H. Прямая AH пересекает описанную окружность треугольника в точках A и D. Касательная к описанной окружности в точке D пересекает прямую BC в точке K. Точка H_1 симметрична точно H относительно середины отрезка BC.

Докажите, что $AH_1 \perp KH$.

8. Дан равносторонний треугольник со стороной 2018. Прямыми, параллельными его сторонам, он разбит на равносторонние треугольники со стороной 1 (единичные треугольники). Все единичные отрезки полученной треугольной сетки покрашены в три цвета (один из которых красный), так, что у каждого единичного треугольника все три стороны имеют разные цвета

Какое число единичных отрезков красного цвета может быть на периметре данного треугольника со стороной 2018 ? (Найдите все возможные значения.)

X класс

5. Последовательность (a_n) чисел определяется по правилам: $a_1 = 2$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = 8$, а каждое следующее число равно сумме всех предыдущих чисел, имеющих номера отличной от его чётности. (В частности, первые семь членов равны: 2,0,1,8,8,11,19).

Докажите, что в полученной последовательности каждое число, начиная с седьмого, равно сумме двух предыдущих.

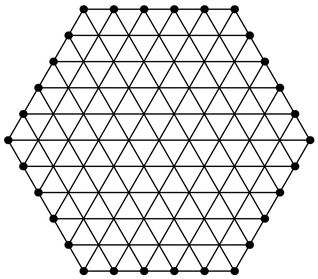
6. В параболу $y = x^2$ вписан четырёхугольник $ABCD$, у которого $AB = AD$, $BC = CD$. При этом точка A лежит на левой ветви параболы, а точки B, C, D — на правой ветви. Числа a, b, c, d – абсциссы точек A, B, C, D соответственно.

Докажите, что $b^2 + d^2 + 2ac = -1$.

7. Вне квадрата $ABCD$ выбрана точка E так, что лучи EA и EB пересекают прямую CD в точках F и G и порядок следования точек на прямой: G, C, D, F. В треугольники ADF и BCG вписаны по квадрату так, что у каждого из квадратов две стороны лежат на катетах и одна вершина — на гипотенузе соответствующего треугольника.

Докажите, что сумма длин сторон вписанных квадратов равна длине стороны квадрата $ABCD$ тогда и только тогда, когда угол AEB прямой.

8. Дан правильный шестиугольник со стороной n, все его стороны разбиты



на n единичных отрезков. Через точки деления проведены прямые, параллельными сторонам шестиугольника, в результате чего данный шестиугольник разбился на равносторонние треугольники со стороной 1 (единичные треугольники) (см. рисунок). Все единичные отрезки полученной треугольной сетки покрашены в три цвета, один из которых синий, так, что у каждого единичного треугольника все три стороны имеют разные цвета.

Определите, какое наименьшее и какое наибольшее число единичных отрезков синего цвета может быть в такой раскраске.

XI класс

5. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geqslant abc \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}.$$

6. Найдите все определенные на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения функции f и g, удовлетворяющие равенству

$$f(f(x+y)) = xf(y) + g(x)$$

при всех действительных x и y.

7. На стороне BC треугольника ABC выбраны точки D и E, отличные от вершин B и C, такие, что $\angle BAD = \angle EAC$. На отрезках AB, AD, AE и AC отмечены соответственно точки D_1, B_1, C_1 и E_1, такие, что справедливы равенства

$$AD_1 = \frac{1}{2}AD, \quad AB_1 = \frac{1}{2}AB, \quad AC_1 = \frac{1}{2}AC \quad \text{и} \quad AE_1 = \frac{1}{2}AE.$$

Прямые B_1E_1 и C_1D_1 пересекаются в точке X.

а) Докажите, что прямая AX делит угол $\angle D_1XE_1$ пополам.

б) Докажите, что прямая AX перпендикулярна стороне BC.

8. В клетки квадратной таблицу $n \times n$ записывают числа, в каждую ровно по одному. Заполненную таблицу назовём „магическим квадратом“, если сумма чисел, записанных в любой строке, равна сумме чисел, записанных в любом столбце. Дана таблица, в которой уже записаны k чисел, при этом известно, что её можно дополнить (записать числа в оставшиеся клетки) до магического квадрата.

Докажите, что:

а) при $k = n^2 - 2n$ количество способов дополнить таблицу до магического квадрата бесконечно,

б) при $k = n^2 - 2n + 1$ количество способов дополнить таблицу до магического квадрата бесконечно.

Решения

8 класс

8.5. Обозначим корни квадратного трёхчлена через x_1 и x_2. По теореме Виета $x_1 + x_2 = p$ и $x_1 x_2 = q$. Из первого равенства следует, что, если один из корней является натуральным числом, то второй корень является целым числом. Из второго равенства следует, что оба корня положительны, следовательно, они оба натуральны. Это означает, что после каждого действия свободный член заменяется на какой-то свой делитель и, в частности, каждый раз не увеличивается. Следовательно, после нескольких ходов у многочлена свободный член перестанет изменяться.

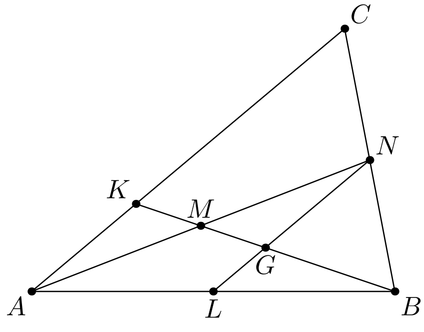
Пусть квадратные трёхчлены, получаемые после $x^2 - px + r$ совпадают с ним, это означает, что один из его корней равен r. Из теоремы Виета следует, что второй корень равен единице и выполнено равенство $r + 1 = p$. Получается, что число $r = p - 1$ является делителем начального свободного члена q, что и следовало доказать.

8.6. Ответ: $p = 2$, $q = 17$.

При $p = 2$ уравнение принимает вид $289 = q^2$, откуда $q = 17$. -окажем, что других решений нет. Запишем исходное уравнение в виде $p^5(p^3 + 1) = (q - 1)(q + 1)$. Поскольку числа $q - 1$ и $q + 1$ отличаются на 2, а p — простое число, большее 3, то только одно из чисел $q - 1$ и $q + 1$ делится на p. Значит, одно из чисел $q - 1$ и $q + 1$ делится на p^5 и, заведомо, $q + 1 \geqslant p^5$. Тогда $p^5(p^3 + 1) = (q - 1)(q + 1) \geqslant p^5(p^5 - 2)$ и, после сокращения, получаем $p^3 + 1 \geqslant p^5 - 2$. Последнее неравенство невозможно, так как при $p \geqslant 3$ верны неравенства $p^5 - p^3 = p^3(p^2 - 1) \geqslant 27 \cdot 8 > 3$.

8.7. Ответ: 8.

Через точку N проведем параллельно стороне AC прямую; пусть она пересекает отрезки BM и BA в точках G и L соответственно. Заметим, что треугольники AKM и NGM равны, так как $\angle MAK = \angle MNL$ (внутренние накрест лежащие), $\angle KMA = \angle NMG$ (вертикальные) и $AM = MN$.



Поэтому $NG = AK = 3 = \frac{1}{2}CK$. Поскольку $NG \parallel CK$, то NG – средняя линия в треугольнике KBC. Тогда NL – средняя линия в треугольнике ABC, так что L – середина стороны AB. Поэтому NL – медиана в треугольнике NAB, а точка G – точка пересечения медиан в нём. Далее, треугольник BKC равнобедренный, а тогда и треугольник BGN так же равнобедренный ($BG = \frac{1}{2}BK = \frac{1}{2}KC = NG$). Поэтому $\frac{2}{3}BM = \frac{2}{3}NL$, откуда $BM = NL$. Таким образом, медианы в треугольнике ABN равны, а, значит, он равнобедренный, т.е. $AB = AN = AM + MN = 8$.

8.8. Ответ: а) ни при каких натуральных n; б) при всех натуральных n.

а) Предположим, что при некотором n удалось переместить все фишки в правый нижний угол доски. Рассмотрим последний сделанный ход. Так как за ход перемещаются фишки, стоящие в различных клетках, а у угловой клетки есть только две соседние с ней (назовём их «в» и «н»), то на последнем ходу фишки из «в» и «н» переместились в угловую клетку. Но у этих фишек различное направление перемещения, что противоречит условию. Следовательно, так сделать не возможно.

б) Рассмотрим таблицы $n \times n$ двух типов:

тип 1) фишки стоят согласно условию;

тип 2) фишки стоят только в клетках верхней строки и левого столбца, причём в каждой клетке стоит по одной фишке.

Докажем по индукции, что для всех натуральных $n \geqslant 2$ в таблице каждого из этих двух типов все фишки возможно переместить в угол.

База: $n = 2$. В таблице 2×2 любого из двух типов достаточно первым ходом переместить любые две соседние фишки (этим ход определяется однозначно), после чего останется однозначных второй ход.

Шаг индукции: предположим, что для всех n от 1 до k в таблицах $n \times n$ каждого из двух типов все фишки возможно переместить в угол, докажем, что и в таблице $(n+1) \times (n+1)$ каждого из двух типов все фишки возможно переместить в угол.

Рассмотрим таблицу $(n+1) \times (n+1)$ первого типа. По предположению индукции в правом нижнем квадрате $n \times n$ все фишки можно переместить в правый нижний угол, при этом, останется таблица $(n+1) \times (n+1)$ второго типа. Следовательно, достаточно рассмотреть таблицу второго типа.

Рассмотрим таблицу $(n+1) \times (n+1)$ второго типа. Выберем фишки A и B, стоящие в левом и правом верхнем углах соответственно. Передвинем их n раз так, что фишка A станет на место фишки B, которая, в свою очередь, переместится в правый нижний угол. после этого n раз будем выбирать симметричную относительно главной диагонали пару фишек C и D, стоящих, соответственно, в верхней строке и левом столбце и сдвигать C

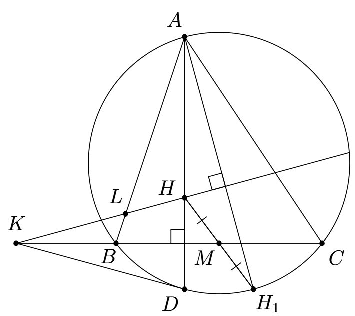
вниз, а D вправо. Наконец, выберем фишки E и F, стоящие, соответственно, в левом и правом краях второй сверху строки. Передвинем их $n-1$ раз так, что фишка E станет на место фишки F, которая, в свою очередь, переместится в правый нижний угол. В результате получим таблицу $n \times n$ второго типа, в которой, по предположению индукции, все фишки можно передвинуть в правый нижний угол.

9 класс

9.5. Ответ: $p=2$, $q=3$.

При $p=2$ уравнение принимает вид $q^5-q=240$. Левая часть этого равенства делится на простое число q, а все простые делители числа 240 — это 2, 3 и 5. Лёгким перебором получаем решение $q=3$. Покажем, что других решений нет. Запишем исходное уравнение в виде $p^4(p^4-1)=q(q^2-1)(q^2+1)$. Поскольку числа q^2-1 и q^2+1 отличаются на 2, число q взаимно просто с ними обоими, а p — простое число, большее 3, то только одно из чисел q, q^2-1 и q^2+1 делится на p. Значит, одно из чисел q, q^2-1 и q^2+1 делится на p^4 и, заведомо, $q^2+1 \geqslant p^4$. Тогда $q^5-q=p^4(p^4-1) \leqslant (q^2+1)q^2$ и, после сокращения, получаем $q^4-1 \leqslant q^3+q$. Последнее неравенство невозможно, так как при $q \geqslant 2$ верны неравенства $q^3-1 \geqslant 2q^2-1 > q^2 > q$, откуда следует $q^4-1 \geqslant 2q^3-1 > q^3+q$.

9.6. Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. Без нарушения общности считаем, что $\beta > \gamma$. Так как $ABDC$ — вписанный четырёхугольник, $AH \perp BC$ и $BH \perp AC$, то справедливы равенства



$$\angle HBC = 90^\circ - \gamma = \angle DAC = \angle DBC,$$

а значит, CK — серединный перпендикуляр к отрезку HD. Следовательно,

$$\angle CKH = \angle DKC = \angle DBC - \angle BDK =$$
$$= \angle HAC - \angle HAB = \beta - \gamma.$$

Пусть L — точка пересечения прямых KH и BA. Тогда

$$\angle ALH = \angle KLB = \angle LBC - \angle BKL = \beta - (\beta - \gamma) = \gamma.$$

Так как $HM = MH_1$ и $BM = MC$, то $BHCH_1$ — параллелограмм. Следовательно, $\angle BH_1C = \angle BHC = \angle 180^\circ - \alpha$, а значит, точка H_1 лежит на описанной окружности треугольника ABC. Поэтому, справедливы равенства $\angle LAH_1 = \angle BCH_1 = \angle HBC = 90^\circ - \gamma$, из которых следует, что $AH_1 \perp KH$.

9.7. Ответ: $a \in [-1; +\infty)$.

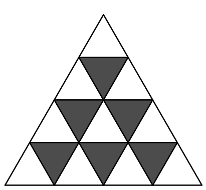
Подставив значение $n = 1$ в неравенство из условия, получим неравенство $1 + a \geqslant 0$, следовательно, $a \geqslant -1$. Покажем, что все такие a подойдут. Заметим, что для всех $a \in [-1, 0]$ неравенство выполняется, так как $(1 + a)^n \geqslant 0 \geqslant 2(n - 1)a$.

+сталось доказать неравенство из условия для всех $a > 0$ и натуральных $n \geqslant 2$. Рассмотрим выражение $(1 + a)^n$ после раскрытия скобок: 1) слагаемое $1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1^n$ встретится ровно один раз; 2) слагаемое $1 \cdot 1 \ldots 1 \cdot a = 1^{n-1} \cdot a$ встретится ровно n раз, так как оно получается при выборе слагаемого a ровно в одной из n скобок; 3) слагаемое $1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot a \cdot a = 1^{n-2} \cdot a^2$ встретится ровно $n(n-1)/2$ раз, поскольку оно получается при выборе слагаемого a ровно в двух скобках, а $n(n-1)/2$ — и есть число пар, которые можно выбрать из n элементов. Следовательно, верно неравенство $(1+a)^n > 1+an+a^2n(n-1)/2$. Для завершения решения достаточно для всех натуральных $n \geqslant 2$ и действительных $a > 0$ доказать неравенство $1 + an + a^2n(n-1)/2 \geqslant 2(n-1)a$.

Домножим полученное неравенство на 2 и рассмотрим его как квадратное относительно переменной a, получим $n(n-1)a^2-(n-2)a+1 > 0$. Дискриминант левой части равен $(n-2)^2-4n(n-1) = 4-3n^2$. При всех натуральных $n \geqslant 2$ последнее выражение отрицательно, следовательно, решением квадратичного неравенства является вся числовая прямая, и, значит, все $a > 0$ удовлетворяют условию задачи.

9.8. Ответ: 2018.

Покрасим в шахматном порядке единичные треугольники как показано на рисунке.

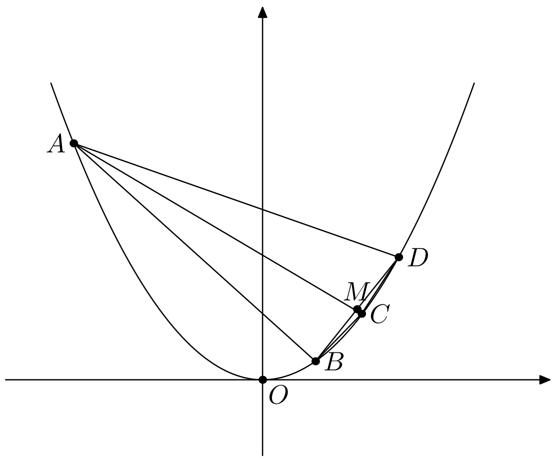


Каждый единичный отрезок данной треугольной сетки является стороной одного и только одного белого единичного треугольника. Так как у каждого единичного треугольника по одной стороне каждого цвета, то всего красных отрезков ровно третья часть всех единичных отрезков. Далее, каждый единичный отрезок сетки, не лежащий на периметре данного треугольника, является стороной одного и только одного черного треугольника. Поэтому ровно третья часть из таких отрезков – красные. Поэтому и из всех отрезков, принадлежащих периметру данного треугольника, ровно одна треть, а именно 2018, красные.

10 класс

10.5. Требуемое равенство записывается в виде $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Заметим, что по определению $a_{n+2} = a_{n+1} + a_{n-1} + a_{n-3} + \ldots$, а $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + \ldots$. Вычитая из первого равенства второе, получим равенство $a_{n+2} - a_n = a_{n+1}$, которое, очевидно, равносильно требуемому.

10.6. Легко получить уравнения прямых AC и BD, зная абсциссы точек A, B, C, D.



Имеем

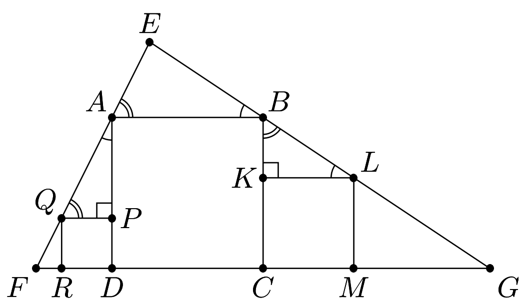
$$AC:\ y=(a+c)x-ac;\quad BD: y=(b+d)x-bd.$$

Так как диагонали AC и BD перпендикулярны, то произведение угловых коэффициентов прямых AC и BD равно -1, т.е. $(a+c)(b+d)=-1$. Далее, так как M – середина отрезка BM, то $M\left(\dfrac{b+d}{2},\dfrac{b^2+d^2}{2}\right)$. Подставляя координаты точки M в уравнение прямой AC, получим

$$\frac{b^2+d^2}{2}=(a+c)\frac{b+d}{2}-ac.$$

Отсюда $\dfrac{b^2+d^2}{2}=-\dfrac{1}{2}-ac$ или $b^2+d^2=-1-2ac$, что равносильно требуемому равенству $b^2+d^2+2ac=-1$.

10.7. Пусть квадрат $DPQR$ вписан в треугольник ADF так, что точки P и Q лежат на отрезках AD и AF, соответственно; а квадрат $CKLM$ вписан в треугольник BCG так, что точки K и L лежат на отрезках BC и BG, соответственно. Обозначим длины сторон квадратов $DPQR$ и $CKLM$ через a и b, соответственно.

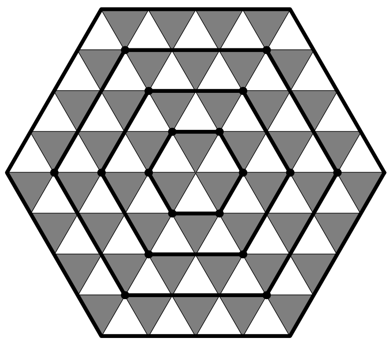


Предположим, что сторона квадрата $ABCD$ равна $a+b$. Тогда $AP=AD-DP=b$ и $BK=BC-CK=a$, следовательно, прямоугольные треугольники APQ и LBK равны. Получаем цепочку равенств: $90^\circ=\angle KBL+\angle QAP=(90^\circ-\angle BAE)+(90^\circ-\angle ABE)$. Значит, $\angle BAE+\angle ABE=90^\circ$ и угол AEB прямой.

-окажем утверждение в обратную сторону. Предположим, что угол AEB прямой, тогда из равенства $\angle EAB+\angle EBA=90^\circ$ следует, что $\angle EAB=\angle AQP=\angle KBL$ и $\angle EBA=\angle BLK=\angle QAP$. Значит, треугольники APQ и LBK подобны. Если обозначить длину стороны квадрата $ABCD$ через c, то равенство отношений $AP:PQ=LK:KB$ сторон треугольников запишется в виде $(c-a):a=b:(c-b)$. Решая пропорцию, получаем $(c-a)(c-b)=ab$, откуда $c=a+b$, что и требовалось доказать.

10.8. Ответ: минимальное число синих отрезков равно $3n^2$,
максимальное – $3n^2+3n$.

Покрасим в шахматном порядке единичные треугольники данной треугольной сетки



как показано на рисунке. В этой покраске число черных треугольников очевидно равно числу белых. Сосчитаем их количество. Заметим, что в любом треугольнике со стороной n, разбитом на единичные треугольники линиями, параллельными его сторонам, единичных квадратов ровно n^2. Так как данный шестиугольник разбивается на 6 треугольников со стороной n, то всего единичных треугольников в данном разбиении ровно $6n^2$. Каждый отрезок на границе шестиугольника служит стороной ровно одного единичного треугольника, а любой другой отрезок – ровно двух треугольников, поэтому общее число единичных отрезков в данной сетке равно $\frac{3\cdot 6n^2+6n}{2}=9n^2+3n$. Заметим, что в нашей шахматной раскраске каждый единичный отрезок служит стороной не более чем одного черного треугольника. Поэтому число отрезков любого из трех цветов не менее чем $3n^2$. Тогда число отрезков каждого цвета не более чем $9n^2+3n-2\cdot 3n^2=3n^2+3n$. Значение $3n^2+3n=6+12+...+6n$ достигается как показано на рисунке – на нем жирными линиями показаны синие отрезки, остальные отрезки покрасим в цвета 1 и 2 по очереди в каждом шестиугольном кольце; каждый из этих цветов присутствует, таким образом, по $3n^2$ раз.

11 класс

11.5. *Первое решение.* Умножим левую и правую части неравенства на $3(ab+bc+ca)$, после чего, раскрыв скобки, приведём подобные слагаемые:

$$a^4b+a^4c+b^4a+b^4c+c^4a+c^4b-2a^3bc-2ab^3c-2abc^3\geqslant 0.$$

Требуемое неравенство следует из справедливости следующих равенств:

$$\begin{aligned}
a^4b+c^4b-a^3bc-c^3ba &= a^3b(a-c)+c^3b(c-a)=b(a^3-c^3)(a-c)=\\
&=\frac{1}{2}b(a-c)^2\big(a^2+c^2+(a+c)^2\big),\\
b^4a+a^4c-b^3ca-a^3cb &= b^3c(b-a)+a^3c(a-b)=c(b^3-a^3)(b-a)=\\
&=\frac{1}{2}c(b-a)^2\big(b^2+a^2+(b+a)^2\big),\\
c^4b+b^4a-c^3ab-b^3ac &= c^3a(c-b)+b^3a(b-c)=a(c^3-b^3)(c-b)=\\
&=\frac{1}{2}a(c-b)^2\big(c^2+b^2+(c+b)^2\big).
\end{aligned}$$

Второе решение. Без нарушения общности считаем, что $a \geqslant b \geqslant c$, а значит $a^{-1} \leqslant b^{-1} \leqslant c^{-1}$. Преобразуем требуемое неравенство, умножив его левую и правую части на $\dfrac{3(ab+bc+ca)}{abc}$:

$$(a^3+b^3+c^3)(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}) \geqslant 3(a^2+b^2+c^2).$$

Последнее неравенство справедливо в силу перестановочного неравенства.

11.6. Ответ: $f(x)=a$, $g(x)=a-ax$, где a – произвольное действительное число.

Подставим $y=0$ в данное уравнение

$$f(f(x+y)) = xf(y)+g(x), \tag{1}$$

получим

$$f(f(x)) = ax+g(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где $a=f(0)$. Далее, подставляя $x=0$ в (1), получим

$$f(f(y)) = b \quad \forall y \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

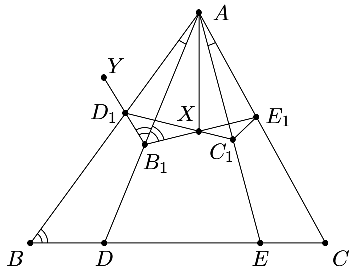
где $b=g(0)$. Т виду (3) равенства (1) и (2) примут соответственно вид $b=xf(y)+g(x)$ и $b=ax+g(x)$ при всех $x,y\in\mathbb{R}$. Из последнего равенства получаем $g(x)=b-ax$. Кроме того, приравнивая, получим

$$xf(y)+g(x) = ax+g(x) \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}.$$

Подставляя в это равенство $x=1$, получим $f(y)=a$ при любом действительном y. Следовательно, $f(x)=a$ – постоянная функция. Тогда из (3) получим $a=f(f(y))=b$, и поэтому $g(x)=a-ax$.

Легкая проверка показывает, что все такие пары функций удовлетворяют исходному уравнению (1).

11.7. **а)** Предположим, что точка D принадлежит отрезку BE (альтернативное расположение точек рассматривается аналогично). На луче B_1D_1 за точку D_1, отметим произвольную точку Y. Треугольники AB_1D_1 и ABD подобны, так как $AB_1 = \dfrac{1}{2}AB$ и $AD_1 = \dfrac{1}{2}AD$. Поэтому, $\angle AB_1D_1 = \angle ABD$ и



$$\angle YD_1A = \angle BD_1B_1 = 180^\circ - \angle AD_1B_1 =$$
$$= 180^\circ - \angle ADB = \angle ADE.$$

Так как $\angle B_1AE_1 = \angle B_1AC_1 + \angle C_1AE_1 = \angle B_1AC_1 + \angle B_1AD_1 = \angle BAE$ и $AB_1 = \dfrac{1}{2}AB$, $AE_1 = \dfrac{1}{2}AE$, то треугольники AB_1E_1 и ABE подобны. Следовательно, $\angle AB_1E_1 = \angle ABE$. Аналогичным образом доказывается подобие треугольников AD_1C_1 и ADC. Поэтому, $\angle AD_1C_1 = \angle ADC$. Таким образом, точка A является точкой пересечения биссектрис углов $\angle YD_1C_1$ и $\angle D_1B_1X$, а значит, равноудалена от прямых D_1X и B_1X. Следовательно, точка A принадлежит биссектрисе угла $\angle D_1XE_1$.

б) Докажем равенство $\angle BAX = 90^\circ - \angle ABC$. Так как D_1A и XA — биссектрисы углов $\angle YD_1X$ и $\angle D_1XE_1$, соответственно, то

$$\angle D_1AX = 180^\circ - \angle AD_1X - \angle AXD_1 =$$
$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B_1D_1X + 180^\circ - \angle B_1XD_1) =$$
$$= \frac{1}{2}(\angle B_1D_1X + \angle B_1XD_1) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle D_1B_1X.$$

В силу доказанного справедливо равенство $\angle D_1B_1X = 2\angle ABD$, а значит, $\angle BAX = 90^\circ - \angle ABC$, т.е. $AX \perp BC$.

11.8. *Первое решение.* При решении будем использовать следующие известные утверждения:

Утверждение 1. *Если число рёбер графа не меньше числа вершин, то в графе есть цикл.*

Утверждение 2. *Если число рёбер графа без циклов на единицу меньше числа вершин, то этот граф — дерево.*

Утверждение 3. *В любом дереве есть вершина степени один (висячая вершина).*

а) Рассмотрим граф, в котором вершинам левой доли соответствуют строки, а вершинам правой доли — столбцы. Между двумя вершинами разных дробей проведём ребро если и только если на пересечении соответствующих строки и столбца число ещё не записано. Согласно условию, в таком графе $2n$ вершин и $2n$ рёбер.

Согласно утверждению 1 в этом графе есть цикл. Рассмотрим цикл с последовательными рёбрами $x_1, x_2, \ldots, x_m$, поскольку граф двудольный, то длина m цикла – чётное число. По условию таблицу можно дополнить до магического квадрата, через y_k, $k = \overline{1,n}$ обозначим число, которое при этом записывается в клетку, соответствующую ребру x_k.

Покажем, как построить бесконечное число различных способов дополнения до магического квадрата. Выберем произвольное ненулевое число t и заменим числа $y_1, y_2, \ldots, y_m$ в числами $y_1 + t, y_2 - t, \ldots, y_m - t$ (к числам с нечётными номерами прибавим t, а из чисел с чётными номерами вычтем t). Очевидно, что при этом сумма чисел в любой строке и любом столбце не изменится и мы получим другой (для каждого t свой) способ дополнения.

б) Построим граф так же, как и в пункте **а)**. В нашем случае число рёбер на единицу меньше числа вершин. Если в графе есть цикл, то решение п. **а)** применимо и в этом пункте.

Если в графе нет циклов, то согласно утверждению 2 он является деревом. Выберем произвольное ненулевое число t и покажем, как при помощи данного в условии способа дополнения таблицы до магического квадрата построить бесконечное число различных способов. Поскольку у нас есть взаимно однозначное соответствие между клетками таблицы в которые дописаны числа и рёбрами графа, то для краткости будем говорить, что числа дописываются в рёбра графа.

Повторим $2n-1$ раз следующие операции: выберем висячую вершину (она есть согласно утверждению 3) и изменим число в выходящем из него ребре так, чтобы сумма всех чисел, в соответствующей строке или столбце увеличилась на t по сравнению с той, что была в магическом квадрате. Удалим из графа эти вершину и ребро и получим новое дерево.

После всех $2n - 1$ операций оставшееся дерево будет состоять из одной вершины. Этой вершине соответствует некоторая строка или столбец. Заметим, что, если изменёнными числам дополнить таблицу, то во всех строках и столбцах, кроме одной строки или одного столбца, сумма чисел увеличилась на $t \neq$, если сложить все суммы чисел в строках, то получится то же результат, что и при сложении всех сумм по столбцам, следовательно, и в оставшейся строке или столбце сумма чисел увеличилась на t.

Второе решение. Пусть остались незаполненными k клеток, $k \geqslant 2n - 1$. Обозначим числа, которые надо дописать в пустые клетки через $y_1, \ldots, y_k$. Условия равенства сумм чисел во всех n строках запишется в виде $n-1$ линейного уравнения. Аналогично, условия равенства сумм чисел во всех n столбцах запишется в виде $n - 1$ линейного уравнения. Поскольку, если сложить все суммы чисел в строках, то получится то же результат, что и при сложении всех сумм по столбцам, то из этих равенств следует, что сумма чисел в любой строке равна сумме чисел в любом столбе. Это означает, что дополнение таблицы равносильно решению системы из $2n - 2$ линейных уравнений от $k \geqslant 2n - 1$ переменных. Стандартный факт из линейной алгебры утверждает, что, если у такой системы есть хотя бы одно решение, то их есть бесконечно много.

Замечание. При $k \geqslant n^2 - 2n + 2$ может оказаться, что количество способов дополнить таблицу до магического квадрата конечно, например, левый верхний квадрат $(n-1) \times (n-1)$

и правый верхний угол. Такую таблицу можно дополнить до магического квадрата только записав во все оставшиеся клетки нули.