УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады
Заместитель Министра образования Республики Беларусь

Р.С. СИДОРЕНКО

21 декабря 2018 г.

LXIX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

8 – 12 января 2019 года

8 класс

Второй день

5. Натуральные числа a, b и c удовлетворяют равенству

$$\frac{a^2-a-c}{b}+\frac{b^2-b-c}{a}=a+b+2.$$

Докажите, что их сумма $a+b+c$ является квадратом натурального числа.

6. В параллелограмме $ABCD$ угол ADC равен $40°$. Точка K такова, что отрезок AK пересекает сторону BC, $AK=BC$ и $\angle BAK=80°$. А точка L такова, что отрезок CL пересекает сторону AD, $CL=AB$ и $\angle BCL=80°$.

Найдите углы треугольника BKL.

7. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2, соответственно, пересекаются в точке X. Прямая XO_1 пересекает ω_1 в точках X и A, а прямая XO_2 пересекает ω_2 в точках X и B. Точка M — середина отрезка AB. Луч MO_1 пересекает ω_1 в точке D, а луч MO_2 пересекает ω_2 в точке C.

а) Докажите, что треугольник MDC равнобедренный;

б) Докажите, что прямая DC проходит через точку X.

8. В каждой клетке таблицы 3×3 расположено по некоторому числу фишек (количества фишек указаны на рисунке). За один ход можно переместить одну фишку из любой клетки в соседнюю с ней по стороне клетку.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

За какое наименьшее число ходов можно уравнять количества фишек во всех клетках?

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 4,5 часа

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады
Заместитель Министра образования Республики Беларусь

Р. С. СИДОРЕНКО

21 декабря 2018 г.

LXVIX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

8 – 12 января 2019 года

9 класс

Второй день

5. Последовательность a_1, a_2, a_3, ... натуральных чисел определена по следующим правилам: $a_1 = 63$, а для каждого натурального $n \geqslant 2$ число a_n — это наименьшее натуральное число, делящееся на n и не меньшее a_{n-1}. (Например, $a_2 = 64$, $a_3 = 66$, $a_4 = 68$, $a_5 = 70$.)

Докажите, что каждое натуральное число встречается в этой последовательности не более одного раза.

6. Существует ли функция $f(x)$, заданная на всей числовой прямой и принимающая действительные значения, такая, что для любого действительного x выполнено равенство

$$f(|x|) + |f(x)| = x \ ?$$

7. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2, соответственно, пересекаются в двух различных точках E и F. Прямая O_1E пересекает во второй раз ω_1 в точке A, а ω_2 — в точке C. Прямая O_2E пересекает во второй раз ω_2 в точке B, а ω_1 — в точке D.

Докажите, что перпендикуляры, проведённые к прямым AC, BD и DC из точек O_1, O_2 и E, соответственно, пересекаются в одной точке.

8. В клетки таблицы $n \times n$ расставлены плюсы и минусы, в каждой клетке стоит какой-то один знак. Для каждого k от 1 до n включительно количество плюсов, стоящих в первых k строках больше количества минусов, стоящих в первых k столбцах.

Найдите наибольшее возможное количество минусов во всей таблице.

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады
Заместитель Министра образования Республики Беларусь

Р.С. СИДОРЕНКО

21 декабря 2018 г.

LXIX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

8 – 12 января 2019 года

10 класс

Второй день

5. Последовательность a_1, a_2, a_3, ... натуральных чисел определена по следующим правилам: число a_1 задано, а для каждого натурального $n \geqslant 2$ число a_n — это наименьшее натуральное число, делящееся на n и не меньшее a_{n-1}. (Например, если $a_5 = 115$, то $a_6 = 120$, $a_7 = 126$, $a_8 = 128$.)

Докажите, что если $a \leqslant 2019$, то в последовательности a_{63}, a_{64}, a_{65}, ... никакое число не встретится более одного раза.

6. Найдите все функции $f(x)$, заданные на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения, такие, что для всех действительных x выполнено равенство

$$x = -\frac{1}{2}f(|x|) + |f(x)|.$$

7. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2, соответственно, пересекаются в точке X. Прямая O_1X пересекает ω_2 в точках X и B, а прямая XO_2 пересекает ω_1 в точках X и A. Прямая O_1A пересекает ω_1 в точках A и D, а прямая O_2B пересекает ω_2 в точках B и C. Точка M — середина отрезка CD.

Докажите, что прямые MX и AB перпендикулярны.

8. Петя и Андрей по очереди ставят знаки «+» и «−» в клетки полоски $n \times 1$. Петя ходит первым и на каждом своём ходу он ставит плюс в любую свободную клетку. Андрей на своём ходу ставит минус в любую свободную клетку. Игра заканчивается, когда все клетки полоски заполнены. Выигрыш Пети — это наибольшее число k, такое, что для всех ℓ от 1 до k включительно найдутся ℓ подряд идущих клеток, в которых плюсов больше, чем минусов.

Какой наибольший выигрыш может себе гарантировать Петя?

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады Заместитель Министра образования Республики Беларусь

Р.С. СИДОРЕНКО

21 декабря 2018 г.

LXIX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

8 – 12 января 2018 года

11 класс

Второй день

5. Последовательность a_1, a_2, a_3, ... натуральных чисел определена по следующим правилам: число a_1 задано, а для каждого натурального $n \geqslant 2$ число a_n — это наименьшее натуральное число, делящееся на n и не меньшее a_{n-1}. (Например, если $a_5 = 115$, то $a_6 = 120$, $a_7 = 126$, $a_8 = 128$.)

Докажите, что начиная с некоторого номера эта последовательность совпадает с некоторой арифметической прогрессией.

6. Найдите все функции $f(x)$, заданные на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения, такие, что для всех действительных x выполнено равенство

$$x = \frac{3}{4}f(|x|) + |f(x)|.$$

7. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2, соответственно, пересекаются в двух различных точках E и F. Прямая O_1E пересекает во второй раз ω_1 в точке A, а ω_2 — в точке C. Прямая O_2E пересекает во второй раз ω_2 в точке B, а ω_1 — в точке D. Точки M и N — середины отрезков AD и BC, соответственно.

Докажите, что описанные окружности треугольников FMD и FNC пересекаются на прямой DC.

8. В некотором государстве $n \geqslant 5$ городов. Они соединены между собой дорогами так, что выполнены следующие условия: 1) любые два города соединены друг с другом не более, чем одной дорогой; 2) не все города соединены между собой; 3) между любыми четырьмя городами проходит ровно $k \geqslant 1$ дорог.

Найдите все n и k, при которых это возможно.

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады
Заместитель Министра образования Республики Беларусь

Р.С. СИДОРЕНКО

21 декабря 2018 г.

LXIX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

8 – 12 января 2018 года

11 класс

Первый день

1. Точка C с абсциссой -2 принадлежит гиперболе $y = 1/x$. Через C проведены две прямые с угловыми коэффициентами 2 и $1/2$, пересекающие гиперболу в точках A и B (отличных от точки C) соответственно.

Найдите координаты центра описанной окружности треугольника ABC.

2. Существует ли натуральное число n, которое можно представить как в виде $n = a^2 - b$, так и в виде $n = b^2 - c$, где a, b, c — три различных натуральных делителя числа n?

(К делителям числа n также относятся 1 и само число n.)

3. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке N. Известно, что вписанные окружности треугольников ABN и CBN касаются друг друга. Кроме того, вписанные окружности треугольников ADN и CDN также касаются друг друга.

Найдите все возможные значения отношения $AN : NC$.

4. В первом ряду зрительного зала 300 мест. В этом ряду сидят 25 зрителей.

а) Докажите, что среди попарных расстояний между этими зрителями найдутся два равных.

б) Докажите это же утверждение для 25 зрителей и 330 мест в ряду.

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады
Заместитель Министра образования Республики Беларусь

Р.С. СИДОРЕНКО

21 декабря 2018 г.

LXIX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

8 – 12 января 2019 года

10 класс

Первый день

1. Параболы $y = x^2 - 2$ и $x = y^2 - 2$ пересекаются в точках A, B, C и D, причём точка D лежит в третьей четверти координатной плоскости.

Найдите координаты центра окружности, описанной около треугольника ABC.

2. а) Найдите хотя бы одно натуральное число n, которое можно представить в виде $n = a^2 - b$ и в виде $n = c^2 - d$, где a, b, c, d — натуральные делители числа n и $a \neq c$.

(К делителям числа n также относятся 1 и само число n.)

б) Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n, удовлетворяющих условию пункта **а)**.

3. На высоте BD остроугольного треугольника ABC отметили точку E такую, что описанные окружности треугольников ADE и BEC касаются в E. Угол AED равен $50°$.

Найдите градусную меру угла $\angle BCE$.

4. Про два набора $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ действительных чисел известно, что $x_i \geqslant y_j$ для любых номеров i, j. Пусть $P = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(x_i - y_i)$, а $G = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i - \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} y_j$.

Докажите, что верно двойное неравенство $P \leqslant G \leqslant nP$.

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады
Заместитель Министра образования Республики Беларусь

Р. С. СИДОРЕНКО

21 декабря 2018 г.

LXVIX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

8 – 12 января 2019 года

9 класс

Первый день

1. Для действительных положительных чисел x, y, z докажите неравенство

$$x^2z(4x-3y)+y^2x(4y-3z)+z^2y(4z-3x)>0.$$

2. Найдите все возможные значения цифр a и b, при которых верно равенство

$$(\overline{ab})^3=\overline{(a-3)(b-3)(b+2)(a+2)ab}.$$

(Как обычно, запись $\overline{xy...z}$ означает число, десятичная запись которого состоит из цифр x, y, $\ldots$, z в указанном порядке, например, $\overline{136}=136$.)

3. Медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке G. Точки M и N — середины отрезков GA и GB, а K и L — середины отрезков CB_1 и CA_1 соответственно. Отрезки KN и LM пересекаются в точке S.

Найдите отношение длин $CS:SG$.

4. Упорядоченные наборы $x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_n$ и $y_1\geqslant y_2\geqslant\ldots\geqslant y_n$ натуральных чисел записали в два ряда один над другим:

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n, \end{matrix}$$

и вычислили $M=\max(x_1+y_2,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)$ — наибольшую сумму чисел в столбцах.

Могло ли оказаться так, что, после того, как числа во второй строке переставили между собой, наибольшая сумма чисел в столбцах стала меньше M?

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады
Заместитель Министра образования Республики Беларусь

Р.С. СИДОРЕНКО

21 декабря 2018 г.

LXIX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

8 – 12 января 2019 года

8 класс

Первый день

1. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист, а ещё через 15 минут вслед за ним выехал второй велосипедист. Через 27 минут после выезда второго велосипедиста из пункта B в пункт A выехал мотоциклист. Все трое участников движения встретились ровно посередине между пунктами A и B. Мотоциклист, доехав до A, и второй велосипедист, доехав до B, развернулись, поехали в обратном направлении и снова одновременно встретились с первым велосипедистом.

За сколько минут мотоциклист проехал расстояние от B до A?

2. Шестизначное число $\overline{abcdef}$ делится на 3367.

Докажите, что сумма чисел $\overline{bcdefa}+\overline{fabcde}$ также делится на 3367.

(Как обычно, запись $\overline{xy...z}$ означает число, десятичная запись которого состоит из цифр x, y, $\ldots$, z в указанном порядке, например, $\overline{136}=136$.)

3. Через вершину D прямоугольника $ABCD$ проведена прямая ℓ, не имеющая с прямоугольником $ABCD$ никаких других общих точек кроме точки D. На прямой ℓ отмечена точка M так, что площадь треугольника MBD в два раза больше площади треугольника MAD.

Найдите все возможные значения отношения площадей треугольников MCD и MAD.

4. Забор состоит из менее 40 дощечек (штакетник), расположенных через равные промежутки. На некоторых из них сидит по воробью, всего 10 воробьёв.

а) Докажите, что среди попарных расстояний между воробьями найдутся два равных.

б) Докажите, что это утверждение останется в силе даже если один из воробьёв улетит.

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 4,5 часа

LXIX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

8 – 12 января 2018 года

Решения

Второй день

8 класс

8.5. Умножим обе части данного равенства на ab :

$$a^3 - a^2 - ac + b^3 - b^2 - bc = (a+b)ab + 2ab \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a^3 + b^3 - (a+b)ab = a^2 + 2ab + b^2 + ac + bc \quad \Leftrightarrow$$

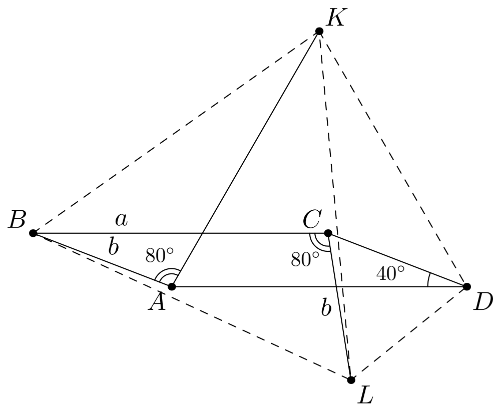
$$\Leftrightarrow \quad (a+b)(a^2 - ab + b^2) - (a+b)ab = (a+b)^2 + (a+b)c \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (a+b)(a^2 - 2ab + b^2) = (a+b)(a+b+c).$$

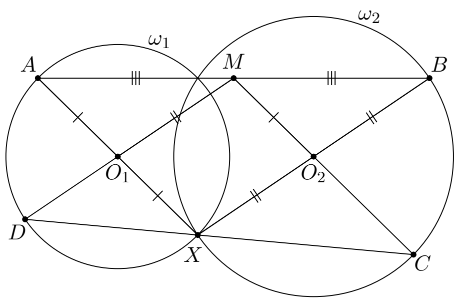
Так как числа a и b натуральные, то $a+b \neq 0$. Поэтому из полученного равенства следует, что $a+b+c = a^2 - 2ab + b^2$, т. е. $a+b+c = (a-b)^2$. Тем самым, утверждение доказано.

8.6. Ответ: все углы равны 60°.

Обозначим $AD = BC = a$ и $AB = CD = b$. Треугольники ABK и CLB равны по первому признаку равенства, так как $AK = BC = a$, $AB = CL = b$ и $\angle BAK = 80^\circ = \angle BCL = 80^\circ$. Так как $KA = AD$, то треугольник AKD равнобедренный, а угол при вершине равен $\angle KAD = \angle BAD - 80^\circ = (180^\circ - 40^\circ) - 80^\circ = 60^\circ$. Поэтому треугольник AKD равносторонний и в нём $\angle ADK = 60^\circ$ и $KD = a$. Аналогично, треугольник CDL также равносторонний, $\angle CDL = 60^\circ$ и $DL = b$. Тогда в треугольнике DKL стороны $KD = a$, $LD = b$, и угол между ними $\angle LDK = 60^\circ + 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$. Значит, треугольник LDK равен треугольникам ABK и BCL. Из равенства этих трёх треугольников следует, что треугольник BKL равносторонний и все его углы равны 60°.



8.7. а) Пусть r_1 и r_2 — длины радиусов окружностей ω_1 и ω_2, соответственно.



Так как отрезки MO_1 и MO_2 — средние линии треугольника AXB, то

$$MO_1 = \frac{1}{2}XB = r_2 \quad \text{и} \quad MO_2 = \frac{1}{2}AX = r_1,$$

значит, $MD = MO_1 + O_1D = r_2 + r_1 = O_2C + MO_2 = MC$.

б) Из параллельностей $MO_1 \parallel BX$ и $MO_2 \parallel AX$ следует равенство углов $\angle DO_1X = \angle O_1XO_2 = \angle CO_2X$. Треугольники DO_1X и CO_2X равнобедренные с основаниями DX и CX, поэтому $\angle O_1XD = \angle O_2XC = 90^\circ - \dfrac{\angle O_1XO_2}{2}$. Поэтому $\angle DXO_1 + \angle O_1XO_2 + \angle CXO_2 = 180^\circ$, а значит, точка X лежит на прямой DC.

8.8. Ответ: за 24 хода.

Количество всех фишек в таблице равно 45, поэтому в конце в каждой клетке таблицы должно стоять по 5 фишек. В частности, в каждой строке таблицы и в каждом ее столбце суммарное количество фишек будет равно 15. В самом начале в первой строке таблицы стоит 6 фишек, а в третьей — 24. Поэтому понадобится по крайней мере 9 ходов, чтобы в первой строке стояло 15 фишек. Ни при одном из этих ходов число фишек в третьей строке не меняется. Следовательно, понадобится не менее 9 других ходов, чтобы в третьей строке стало 15 фишек. Таким образом, для уравнивания фишек в клетках таблицы нужно не менее $9 + 9 = 18$ „вертикальных” ходов. Аналогично, в исходной таблице в первом столбце стоит 12 фишек, а в третьем — 18. Поэтому понадобится не менее $3 + 3 = 6$ „горизонтальных” ходов для уравнивания фишек в клетках таблицы.

Покажем, что можно обойтись 24 ходами. Передвигая в столбцах фишки снизу вверх, можно сперва уравнять количества фишек в клетках каждого столбца. На это уйдет $(2+2)+(3+3)+(4+4) = 18$ вертикальных ходов. Затем, получив таблицу на рисунке, передвинем в каждой строке по 2 раза фишки справа налево. За $2 + 2 + 2 = 6$ горизонтальных ходов получим требуемую расстановку. Итого, хватило 24 хода, значит, это и есть искомое минимальное количество ходов.

4	5	6
4	5	6
4	5	6

Второе решение. Покажем, как ещё можно доказать, что потребуется не менее 24 ходов. Пронумеруем столбцы слева направо, а строки сверху вниз числами $0, 1, 2$. Каждой фишке поставим в соответствие её „вес” — сумму номеров столбца и строки, в которых она стоит. За один ход вес ровно одной фишки изменяется на единицу. В исходной таблице сумме весов всех фишек равна 114, а в таблице, которую требуется получить, — 90, следовательно, понадобится не менее 24 ходов.

9 класс

9.5. Рассмотрим произвольный номер n. Среди n подряд идущих чисел a_{n-1}, $a_{n-1}+1$, $a_{n-1}+2$, $a_{n-1}+3\ldots, a_{n-1}+(n-1)$ хотя бы одно делится на n, значит, по определению, это число равно a_n. Поэтому $a_n \leqslant a_{n-1}+(n-1)$. Записывая аналогичны неравенства для номеров $n-1, n-2, \ldots, 3, 2$, получим цепочку неравенств:

$$a_n \leqslant a_{n-1}+(n-1) \leqslant a_{n-2}+(n-2)+(n-1) \leqslant \ldots \leqslant a_1+\frac{n(n-1)}{2}. \qquad (1)$$

Предположим, что в последовательности встретятся два одинаковых числа. Поскольку эта последовательность неубывающая, то в таком случае в ней есть два одинаковых соседних члена. Пусть $a_n = a_{n+1} = A$. По определению последовательности число A делится на взаимно простые числа n и $(n+1)$, следовательно, A делится на их произведение $n(n+1)$, т. е. $a_n \geqslant n(n+1)$. Объединяя полученное неравенство с (1), получаем, что $a_1+\frac{n(n-1)}{2} \geqslant a_n \geqslant n(n+1)$, откуда $a_1 \geqslant n(n+3)/2$.

Неравенство $63 \geqslant n(n+3)/2$ равносильно неравенству $126 > n(n+3)$. Заметим, что $126 < 10\cdot 13$ и произведение $n(n+3)$ возрастает при увеличении n. Значит, два равных соседних члена могут присутствовать только в первых 10 членах последовательности. Выпишем эти 10 членов и убедимся что и среди них нет равных: $a_1 = 63$, $a_2 = 64$, $a_3 = 66$, $a_4 = 68$, $a_5 = 70$, $a_6 = 72$, $a_7 = 77$, $a_8 = 80$, $a_9 = 81$, $a_{10} = 90$. Следовательно, в последовательности вообще нет двух одинаковых чисел.

9.6. Ответ: не существует.

Предположим, что такая функция существует. Положим в данном в условии равенстве

$$f(|x|)+|f(x)| = x, \qquad (1)$$

например, $x = 1$. Получим

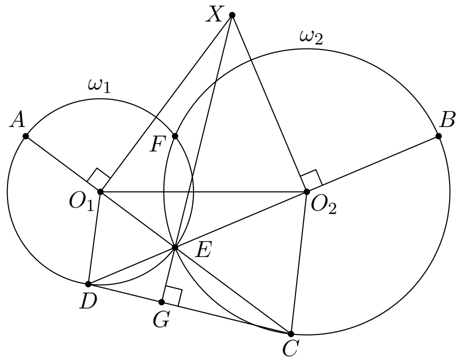
$$f(1)+|f(1)| = 1. \qquad (2)$$

Если $f(1) < 0$, то $|f(1)| = -f(1)$ и равенство (2) очевидно неверно. Поэтому $f(1) \geqslant 0$, и из (2) находим $f(1)+f(1) = 1$, т. е. $f(1) = 1/2$.

Подставляя в равенство (1) значение $x = -1$, получаем, что $f(1)+|f(-1)| = -1$. Так как $f(1) = 1/2$, то $|f(-1)| = -3/2$, что противоречит неравенству $|f(-1)| \geqslant 0$.

Значит, функций, удовлетворяющих условию задачи, не существует.

9.7. Так как $\angle O_2EC = \angle O_1ED$, $O_1E = O_1D$ и $O_2E = O_2C$, то $\triangle O_1ED$ и $\triangle O_2EC$ — подобные равнобедренные треугольники. Следовательно, $EO_1 : ED = EO_2 : EC$ и значит, $\triangle ECD \sim \triangle EO_2O_1$. В частности, верно равенство $\angle GCE = \angle O_1O_2E$.



Пусть X — точка пересечения перпендикуляров, проведённых к прямым AC и BD в точках O_1 и O_2, соответственно (так как окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в двух различных точках E и F, то рассматриваемые перпендикуляры не параллельны друг другу). Тогда $\angle XO_1E = \angle XO_2E = 90°$, а значит, четырёхугольник XO_1EO_2 вписанный. В нём $\angle O_1EX = \angle O_1O_2X$ как опирающиеся на дугу O_1X. Пусть прямые XE и DG пересекаются в точке G (см. рисунок, другие варианты расположения точек рассматриваются аналогично). Тогда $\angle GCE + \angle GEC = \angle O_1EX + \angle O_1O_2E = \angle O_1O_2X + \angle O_1O_2E = 90°$, т.е. $EG \perp DC$.

9.8. Ответ: $[\frac{n^2-1}{2}]$.

При $k = n$ условие задачи означает, что во всей таблице количество минусов меньше количества плюсов. Так как всего расставлены n^2 знаков, то минусов не больше $[\frac{n^2-1}{2}]$ — это число на единицу меньше $\frac{n^2}{2}$ в случае чётного n, а в случае нечётного n оно ровно на единицу меньше, чем количество плюсов. Покажем, что столько минусов можно расставить, соблюдая условие задачи.

Выделим в таблице $n \times n$ главную диагональ, идущую из левого верхнего в правый нижний угол таблицы. Во все клетки над этой диагональю поставим плюсы, а во все клетки под диагональю поставим минусы. На само́й диагонали будем расставлять знаки двигаясь из верхнего левого угла вправо вниз: в угловой клетке поставим плюс, после чего будем чередовать плюсы и минусы по одному, начиная с плюса. При такой расстановке знаков разность количества плюсов в первых k строках и количества минусов в первых k столбцах зависит только от количества соответствующих знаков на диагонали, т.е. равна 1 при нечётных k и 2 при чётных k. Заметим также, что при $k = n$ эта разность совпадает с $n^2 - 2[\frac{n^2-1}{2}]$, следовательно, требуемый пример построен.

10 класс

10.5. Рассмотрим произвольный номер n. Среди n подряд идущих чисел a_{n-1}, $a_{n-1}+1$, $a_{n-1}+2$, $a_{n-1}+3\ldots, a_{n-1}+(n-1)$ хотя бы одно делится на n, значит, по определению, это число равно a_n. Поэтому $a_n \leqslant a_{n-1}+(n-1)$. Записывая аналогичны неравенства для номеров $n-1, n-2, \ldots, 3, 2$, получим цепочку неравенств:

$$a_n \leqslant a_{n-1}+(n-1) \leqslant a_{n-2}+(n-2)+(n-1) \leqslant \ldots \leqslant a_1+\frac{n(n-1)}{2}. \qquad (1)$$

Предположим, что в последовательности встретятся два одинаковых числа. Поскольку эта последовательность неубывающая, то в таком случае в ней есть два одинаковых соседних члена. Пусть $a_n = a_{n+1} = A$. По определению последовательности число A делится на взаимно простые числа n и $(n+1)$, следовательно, A делится на их произведение $n(n+1)$, т.е. $a_n \geqslant n(n+1)$. Объединяя полученное неравенство с (1), получаем, что $a_1+\frac{n(n-1)}{2} \geqslant a_n \geqslant n(n+1)$, откуда $a_1 \geqslant n(n+3)/2$.

Из неравенства $2019 \geqslant a_1 \geqslant n(n+3)/2$ следует неравенство $4038 > n(n+3)$. Заметим, что $4038 < 4158 = 63 \cdot 66$ и произведение $n(n+3)$ возрастает при увеличении n. Значит, при любом заданном $a_1 \leqslant 2019$ равенство $a_n = a_{n+1}$ невозможно ни при каких $n \geqslant 63$ и в последовательности $a_{63}, a_{64}, a_{65}, \ldots$ нет одинаковых чисел.

10.6. Ответ: $f(x) = 2x$ при $x \geqslant 0$ и $f(x) = 0$ при $x < 0$.

Заменяя в данном в условии равенстве

$$x = -\frac{1}{2}f(|x|) + |f(x)| \qquad (1)$$

x на $-x$, получим

$$-x = -\frac{1}{2}f(|-x|) + |f(-x)|.$$

Складывая это равенство с (1), получим $0 = -f(|x|) + |f(x)| + |f(-x)|$. Следовательно, $f(|x|) \geqslant 0$ для всех x. Значит для всех $x \geqslant 0$ верно $f(x) \geqslant 0$ и $f(x) = |f(x)|$.

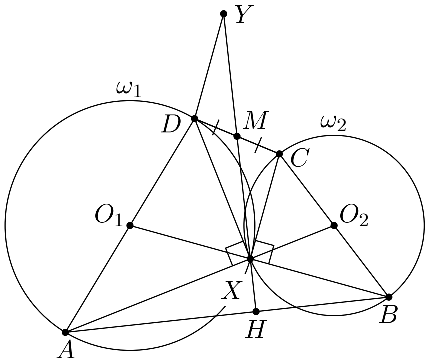
Подставим в (1) произвольный $x \geqslant 0$:

$$x = -\frac{1}{2}f(|x|) + |f(x)| = -\frac{1}{2}f(x) + f(x) = \frac{1}{2}f(x).$$

Поэтому $f(x) = 2x$ для всех $x \geqslant 0$. Значит, в равенстве (1) можно заменить $f(|x|)$ на $2|x|$. При этом (1) примет вид $x = |f(x)| - |x|$, следовательно, $|f(x)| = x + |x|$. При всех $x < 0$ сумма $x + |x|$ равна нулю, поэтому $f(x) = 0$ для любого $x < 0$.

Обратно (обязательный шаг решения), легко видеть, что функция, заданная условиями $f(x) = 2x$ при $x \geqslant 0$ и $f(x) = 0$ при $x < 0$, удовлетворяет условию задачи.

10.7. Пусть прямые MX и AB пересекаются в точке H (см. рисунок, другие варианты расположения точек рассматриваются аналогично). Так как AD и BC — диаметры, то $\angle DXA = \angle CXB = 90°$. Пусть Y — точка симметричная X относительно M. Докажем подобие $\triangle DXY \sim \triangle XAB$. Из этого будет следовать, что $\angle AXH = 180° - \angle DXA - \angle DXY = 90° - \angle XAH$, а значит, $MX \perp AB$.



В равнобедренных треугольниках O_1XA и O_2XB равны углы $\angle O_1XA$ и $\angle O_2XB$ при основаниях, поэтому $\angle XAD = \angle XBC$, следовательно, $\triangle DXA \sim \triangle CXB$ и $DX : XC = AX : XB$. В силу построения четырёхугольник $XDYC$ — параллелограмм, значит, $XC = DY$ и $\angle YDX = 180° - \angle DXC$. Получаем, что $DX : DY = DX : XC = AX : XB$ и $\angle YDX = 180° - \angle DXC = 180° - (360° - \angle DXA - \angle CXB - \angle AXB) = \angle AXB$. Таким образом, треугольники DXY и XAB подобны по второму признаку подобия.

10.8. Ответ: $n + \frac{-1+(-1)^{n+1}}{2}$, т.е. n, если n нечётно, и $n-1$, если n чётно.

Покажем вначале, что при нечётном n первый игрок может гарантировать себе выигрыш n (очевидно, что этот выигрыш максимален). Пронумеруем клетки номерами от $-(n-1)/2$ до $(n-1)/2$. На первом ходу первый игрок поставит плюс в центральную клетку. После этого он будет ставить плюс в клетку, симметричную ходу второго относительно центральной клетки.

Рассмотрим заполненную полоску. Если ℓ — нечётное число, то в клетках с номерами от $-(\ell-1)/2$ до $(\ell-1)/2$ стоит ровно на один плюс больше. Если же ℓ — чётное число, то в одной из клеток с номерами $-\ell/2$ и $\ell/2$ стоит плюс, а в другой — минус. Значит, в одной из полосок: с номерами от $-\ell/2$ до $\ell/2-1$ и с номерами от $-\ell/2+1$ до $\ell/2$, стоит плюсов на два больше, чем минусов, а в другой — плюсов и минусов поровну. Следовательно, его выигрыш действительно равен n.

Пусть теперь n — чётное число. Ясно, что выигрыш первого игрока меньше n, так как во всей полоске в конце игры будет стоять поровну плюсов и минусов. Покажем, что он может гарантировать себе выигрыш $n-1$. Для этого первый игрок выделит произвольную крайнюю клетку и будет играть в игру на оставшейся полоске $(n-1) \times 1$ (назовём её основной) по описанной выше стратегии. Если второй игрок на своём ходу ставит минус в выделенную клетку, то первый игрок ставит плюс в произвольную пустую клетку.

Заметим, что после того, как выделенная клетка занята, первый не может сделать ход только в том случае, когда в основной полоске в центре стоит плюс, а симметричные относительно её клетки либо обе пусты, либо в них стоят противоположные знаки. В таком случае первый игрок снова поставит плюс в произвольную клетку и продолжит действовать по прежней стратегии. В итоге он обеспечит себе выигрыш $n-1$ на основной полоске.

11 класс

11.5. Докажем более сильное утверждение, из которого следует утверждение задачи. А именно, покажем, что существуют такие номер $M \in \mathbb{N}$ и число $k \in \mathbb{N}$, что при всех $n \geqslant M$ верно равенство $a_n = kn$.

Рассмотрим произвольный номер n. Среди n подряд идущих чисел a_{n-1}, $a_{n-1}+1$, $a_{n-1}+2$, $a_{n-1}+3\ldots, a_{n-1}+(n-1)$ хотя бы одно делится на n, значит, по определению, это число равно a_n. Поэтому $a_n \leqslant a_{n-1}+(n-1)$. Записывая аналогичны неравенства для номеров $n-1, n-2, \ldots, 3, 2$, получим цепочку неравенств:

$$a_n \leqslant a_{n-1}+(n-1) \leqslant a_{n-2}+(n-2)+(n-1) \leqslant \ldots \leqslant a_1+\frac{n(n-1)}{2}. \qquad (1)$$

Заметим, что при всех $n \geqslant \sqrt{2a_1}$ из (1) следует $a_n \leqslant a_1+\frac{n(n-1)}{2} < \frac{n^2}{2}+\frac{n^2-n}{2} < n^2$. В качестве M возьмём произвольное число такое, что $a_n < n^2$ при всех $n \geqslant M$ (например, подойдёт $M = [\sqrt{2a_1}\,]+1$). По определению число a_M делится на M, пусть $k = a_M/M$. Покажем, что выбранные M и k удовлетворяют сформулированному в начале утверждению, для этого докажем индукцией по номеру $n \geqslant M$, что $a_n = kn$.

База индукции верна по определению числа k, докажем её шаг. Пусть для некоторого $i \geqslant M$ верно равенство $a_i = ki$. Согласно определению M, верно неравенство $a_i < i^2$, следовательно, $k < i$. Значит, число $(k-1)(i+1) = ki+(k-i-1)$ меньше, чем $a_i = ki$. Следующее за ним число, делящееся на $i+1$, равно $k(i+1)$ и оно больше ki, поэтому, по определению оно равно a_{i+1}, т. е., шаг индукции, а вместе с ним и утверждение доказаны.

11.6. Ответ: $f(x) = -4x$ при $x \geqslant 0$ и $f(x) = 2x$ или $f(x) = -2x$ при $x < 0$.

Заменяя в данном в условии равенстве

$$x = \frac{3}{4}f(|x|)+|f(x)| \qquad (1)$$

x на $-x$, получим

$$-x = \frac{3}{4}f(|-x|)+|f(-x)|.$$

Складывая это равенство с (1), получим $0 = \dfrac{3}{2}f(|x|)+|f(x)|+|f(-x)|$. Следовательно, $f(|x|) \leqslant 0$ для всех x. Значит для всех $x \geqslant 0$ верно $f(x) \leqslant 0$ и $|f(x)| = f(x)$.

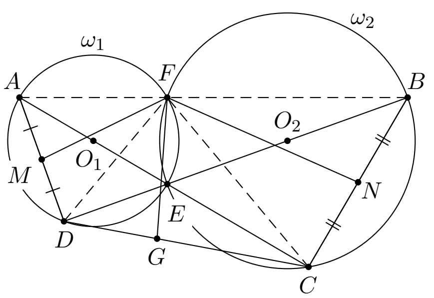
Подставим в (1) произвольный $x \geqslant 0$:

$$x = \frac{3}{4}f(|x|)+|f(x)| = \frac{3}{4}f(x)-f(x) = -\frac{1}{4}f(x),$$

откуда $f(x) = -4x$ для всех $x \geqslant 0$. Значит, в (1) можно заменить $f(|x|)$ на $-4|x|$. При этом (1) примет вид $x = -3|x|+|f(x)|$, следовательно, $|f(x)| = x+3|x|$. При любом $x < 0$ получаем $|f(x)| = x-3x = -2x$. Поэтому $f(x) = \pm 2x$ для каждого $x < 0$ (выбор знака $+$ или $-$ свой для каждого x).

Таким образом, $f(x) = -4x$ при $x \geqslant 0$ и $f(x) = 2x$ или $f(x) = -2x$ при $x < 0$. Осталось убедиться, что любая такая функция удовлетворяют условию. В самом деле, при $x \geqslant 0$ получаем верное равенство $\frac{3}{4}f(|x|)+|f(x)| = -3x+4x = x$, а при $x < 0$ — верное равенство $\frac{3}{4}f(|x|)+|f(x)| = -3|x|+|\pm 2x| = x$.

11.7. Так как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги, равны, то $\angle FCE = \angle FBE$ и $\angle FAE = \angle FDE$. Следовательно, треугольники FCA и FBD подобны и $FB : FC = FD : FA$. Поскольку $\angle BFC = \angle BEC = \angle AED = \angle AFD$, то треугольники FBC и FDA также подобны. Отрезки FN и FM — соответствующие медианы в подобных треугольниках, а значит, $\angle FNB = \angle FMD$. Пусть описанные окружности треугольников FMD и FNC пересекаются в точке G (см. рисунок, другие варианты расположения точек рассматриваются аналогично). Тогда $\angle FGC + \angle FGD = 180° - \angle FNC + 180° - \angle FMD = 180°$. Следовательно, точки D, G и C лежат на одной прямой.



11.8. Ответ: $n = 5$, $k = 3$.

Рассмотрим граф, в котором вершины соответствую городам, а рёбра — дорогам. Условие 3) вместе с неравенством $k \geqslant 1$ говорят о том, что граф не является пустым, а условие 2) говорит о том, что граф не является полным, откуда следует, что $k < 6$. Заметим также, что, если некоторый граф удовлетворяет условиям задачи, то и его дополнение тоже удовлетворяет условиям с заменой k на $6 - k$, поэтому, можно считать, что $k \in \{1, 2, 3\}$.

Случай $k = 1$, невозможен. Действительно, предположим, что $k = 1$. В графе есть есть по крайней мере одно ребро, пусть оно соединяет вершины A и B. Выбирая любые две из оставшихся вершин, получаем четвёрку, в которой AB — единственное ребро. Значит, AB — единственное ребро во всём графе. Взяв любые три вершины C, D и E, отличные от A и B, получим, что в четвёрке A, C, D, E нет ни одного ребра, что противоречит условию.

Для $k = 2$ и $k = 3$ сделаем предварительные подсчёты. Всего есть C_n^4 четвёрок вершин, в каждой из них проходит ровно k рёбер, при этом, каждое ребро входит ровно в C_{n-2}^2 четвёрок. Значит, общее количество рёбер равно

$$\frac{C_n^4}{C_{n-2}^2} \cdot k = \frac{n!}{4!(n-4)!} \cdot \frac{2!(n-4)!}{(n-2)!} \cdot k = \frac{n(n-1)}{12} \cdot k. \qquad (1)$$

Каждое ребро считается два раза в общей сумме степеней n вершин, следовательно, найдётся вершина, степень которой не меньше, чем

$$\frac{n(n-1)}{12} \cdot k \cdot \frac{2}{n} = \frac{(n-1)k}{6}. \qquad (2)$$

Покажем, что случай $k = 2$ также невозможен. Предположим, что $k = 2$. Ни у одной вершины степень не может быть больше 2, так как в противном случае, выбрав вершину и трёх её соседей, придём к противоречию с третьим условием. Из (2) получаем неравенство $\frac{(n-1)\cdot 2}{6} \leqslant 2$, что равносильно неравенству $n \leqslant 7$. Остались значения $n \in \{5, 6, 7\}$. Для них чисел верно неравенство $\frac{(n-1)\cdot 2}{6} > 1$, значит, согласно (2), в графе есть вершина степени 2. Пусть вершина A имеет степень 2 и соединена с вершинами B и C. Выберем любые две из остальных $n - 3 \geqslant 2$ вершин: D и E. В четвёрках A, B, C, D и A, B, C, E уже есть по два ребра: AB и AC, так что, вершины B и C не соединены ни между собой, ни с одной из вершин D и E. Значит, в четвёрке B, C, D, E единственно возможное ребро — это DE, что противоречит условию.

Рассмотрим последнюю возможность $k = 3$. Предположим, что в графе есть вершина степени не меньше 4: пусть вершина A соединена с вершинами B, C, D и E. В четвёрке

B, C, D, E проходит ровно 3 ребра, не ограничивая общности, будем считать, что вершины B и C соединены. Тогда в четвёрке A, B, C, D проходит не менее 4 рёбер: AB, AC, AD и BC, что противоречит условию. Значит, степень любой вершины не превосходит 3. Из (2) заключаем, что $\frac{(n-1)\cdot 3}{6} \leqslant 3$, что равносильно неравенству $n \leqslant 7$. Таким образом, вновь остались значения $n \in \{5, 6, 7\}$. Сразу отметим, что $n \neq 6$, так как в этом случае, согласно равенству (1), количество рёбер в графе равно $\frac{6\cdot 5\cdot 3}{12} = 7.5$ — дробное число.

Предположим, что $n = 7:$ в этом случае неравенство $\frac{(n-1)\cdot 3}{6} \leqslant 3$, полученное из (2) является равенством, следовательно, степени всех вершин равны 3. Рассмотрим произвольную вершину A и трёх её соседей B, C и D. Поскольку в четвёрке $ABCD$ уже есть 3 ребра: AB, AC и AD, то между вершинами B, C и D не проходит ни одного ребра. Выберем произвольную вершину E из оставшихся трёх. Три ребра в четвёрке B, C, D, E могут быть выбраны единственным образом: рёбра BE, CE и DE. Получаем, что каждая из вершин B, C и D соединены с каждой из трёх вершин, отличных от A, B, C и D. Следовательно, степени вершин B, C и D равны 4, что противоречит доказанному ранее. Таким образом, $n \neq 7$.

Последняя оставшаяся возможность $n = 5$ доставляет ответ. Достаточно взять простой цикл длины 5 (государство, в котором ровно 5 городов, причём каждый соединён ровно с двумя другими).

LXIX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

8 – 12 января 2018 года

Решения

Первый день

8 класс

8.1. Ответ: за 36 минут.

Пусть $2S$ — расстояние между пунктами A и B (в км), v_1 и v_2 — скорости первого и второго велосипедистов, а V — скорость мотоциклиста (в км/ч). Тогда время первого велосипедиста до первой встречи равно $\dfrac{S}{v_1}$ (ч). Второй велосипедист выехал через 15 мин после первого, т. е. через $\dfrac{1}{4} = 0.25$ часа, и был в дороге $\dfrac{S}{v_2}$ (ч). А мотоциклист выехал через $15 + 27 = 42$ мин после первого велосипедиста, т. е. через $\dfrac{42}{60} = \dfrac{7}{10} = 0.7$ часа, и был в дороге $\dfrac{S}{V}$ (ч). Каждый из трёх участников движения до первой встречи проехал расстояние S. Поэтому верно двойное равенство

$$\frac{S}{v_1} = \frac{S}{v_2} + 0.25 = \frac{S}{V} + 0.7\,. \tag{1}$$

Мотоциклист и второй велосипедист от первой встречи до второй вместе проехали расстояние, равное $4S$, а скорость их сближения составляла $V + v_2$. Первый и второй велосипедисты от первой встречи до второй вместе проехали расстояние, равное $2S$, а скорость их сближения составляла $v_1 + v_2$. Время между встречами у всех троих участников движения одинаковое. Поэтому

$$\frac{4S}{V + v_2} = \frac{2S}{v_1 + v_2}\,. \tag{2}$$

Обозначим $\dfrac{S}{v_1}$ через t. Из (1) находим: $\dfrac{S}{v_2} = t - 0.25$ и $\dfrac{S}{V} = t - 0.7$. Из (2) следует равенство $V + v_2 = 2(v_1 + v_2)$, что равносильно $V = 2v_1 + v_2$, поэтому $\dfrac{V}{S} = \dfrac{2v_1}{S} + \dfrac{v_2}{S}$. Подставляя найденные выражения дробей через t, получаем уравнение $\dfrac{1}{t - 0,7} = \dfrac{2}{t} + \dfrac{1}{t - 0,25}$, которое равносильно $\dfrac{5}{10t - 7} = \dfrac{1}{t} + \dfrac{2}{4t - 1}$, или, после преобразований, $\dfrac{5}{10t - 7} = \dfrac{6t - 1}{4t^2 - t}$. По правилу пропорции получаем уравнение $20t^2 - 5t = 60t^2 - 52t + 7$, которое равносильно $40t^2 - 47t + 7 = 0$. Левая часть этого уравнения раскладывается на множители:

$$40t^2 - 47t + 7 = 40t^2 - 40t - 7t + 7 = 40t(t - 1) - 7(t - 1) = (40t - 7)(t - 1).$$

Значит, корни этого уравнения: $t = 1$ и $t = \dfrac{7}{40}$, причём второй корень не подходит, иначе время мотоциклиста в дороге до первой встречи $t - 0.7 < 0$.) Следовательно, мотоциклист проехал половину расстояния между пунктами B и A за $1 - 0.7 = 0.3$ часа, а всё расстояние между этими пунктами — за 0.6 часа, т. е. за 36 минут.

8.2. Покажем, что если шестизначное число делится на 3367, то число, полученное из исходного перестановкой его первой цифры (цифры шестого разряда) на последнее место (в первый разряд), также будет делится на 3367. Действительно, легко видеть, что

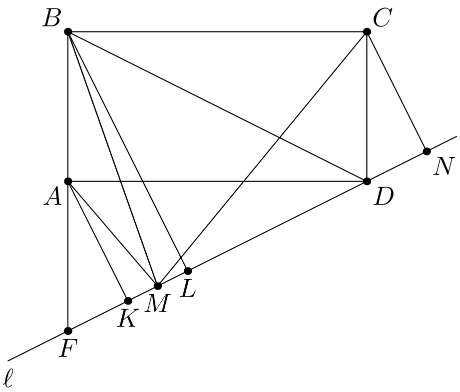
$$\overline{bcdefa} = 10 \cdot (\overline{abcdef} - 10^5 \cdot a) + a = 10\overline{abcdef} - 999999a.$$

Поскольку $999999 = 3367 \cdot 297$ и $\overline{abcdef}$ делится на 3367, то и разность $10\overline{abcdef} - 999999a$ делится на 3367, а значит, $\overline{bcdefa}$ делится на 3367.

Таким образом из делимости на 3367 числа $\overline{abcdef}$ последовательно следует делимость на 3367 чисел $\overline{bcdefa}$, $\overline{cdefab}$, $\overline{defabc}$, $\overline{efabcd}$, и, наконец, числа $\overline{fabcde}$. Тогда на 3367 делится и сумма $\overline{bcdefa} + \overline{fabcde}$, что и требовалось доказать.

8.3. Ответ: $S(MCD) : S(MAD) = 1$.

Проведем из точек A, B и C перпендикуляры AK, BL и CN на прямую ℓ.



Продлим сторону BA до пересечения с прямой ℓ в точке F. Так как

$$S(MBD) = \frac{1}{2} MD \cdot BL = 2S(MAD) = 2 \cdot \frac{1}{2} MD \cdot AK,$$

то $BL = 2AK$ и, поскольку $AK \parallel BL$, то AK — средняя линия в треугольнике FBL. Поэтому $FA = AB$, откуда $CD = AB = FA$. Из параллельности прямых AF и CD следует равенство углов $\angle AFK = \angle CDN$. Поэтому прямоугольные треугольники AKF и CND равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, равны их катеты: $AK = CN$, а значит,

$$S(MCD) = \frac{1}{2} MD \cdot CN = \frac{1}{2} MD \cdot AK = S(MAD),$$

т. е. искомое отношение равно 1.

8.4. Достаточно доказать утверждение пункта б). Переформулируем задачу следующим образом: даны 9 различных натуральных чисел, строго меньших 40. Требуется доказать, что среди попарных разностей между ними есть две равные.

Обозначим данные числа в порядке возрастания $a_1 < a_2 < \ldots < a_8 < a_9$. По условию $1 \leqslant a_1 < a_9 < 40$, поэтому $a_9 - a_1 < 39$. Представим разность $a_9 - a_1$ двумя способами:

$$a_9 - a_1 = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_8 - a_7) + (a_9 - a_8), \tag{1}$$

$$a_9 - a_1 = (a_3 - a_1) + (a_5 - a_3) + (a_7 - a_5) + (a_9 - a_7). \tag{2}$$

В правой части (1) находится 8 слагаемых, а в правой части (2) — 4 слагаемых. Все 12 слагаемых в правых частях (1) и (2) — это разности разных пар чисел a_i. Предположим, что среди всех возможных попарных разностей нет двух одинаковых, т. е. каждое значение встречается не более одного раза. Тогда сложив равенства (1) и (2), получим оценку

$$2(a_9 - a_1) \geqslant 1 + 2 + \ldots + 12 = \frac{13 \cdot 12}{2},$$

откуда $a_9 - a_1 \geqslant \dfrac{13 \cdot 12}{4} = 13 \cdot 3 = 39$, что противоречит неравенству $a_9 - a_1 < 39$, следовательно, предположение неверно и требуемое утверждение доказано.

9 класс

9.1. Раскрыв скобки в требуемом неравенстве

$$x^2z(4x-3y)+y^2x(4y-3z)+z^2y(4z-3x)>0, \qquad (1)$$

получим цепочку равносильных неравенств:

$$4x^3z-3x^2yz+4y^3x-3xy^2z+4z^3y-3xyz^2>0 \iff$$

$$4x^3z-4x^2yz+x^2yz+4y^3x-4xy^2z+xy^2z+4z^3y-4xyz^2+xyz^2>0.$$

Сгруппировав члены, приходим к неравенству

$$xz(4x^2-4xy+y^2)+xy(4y^2-4yz+z^2)+yz(4z^2-4xz+x^2)>0,$$

которое равносильно

$$xz(2x-y)^2+xy(2y-z)^2+yz(2z-x)^2>0.$$

Последнее неравенство верно, так как все слагаемые в левой его части неотрицательны и по крайней мере одно из них является строго положительным, поскольку x, y и z положительны по условию, а скобки $(2x-y)$, $(2y-z)$ и $(2z-x)$ могут обращаться в нуль одновременно лишь при $x=y=z=0$.

9.2. Ответ: $a=7$, $b=6$.

Обозначим $t=\overline{ab}$ и рассмотрим разность

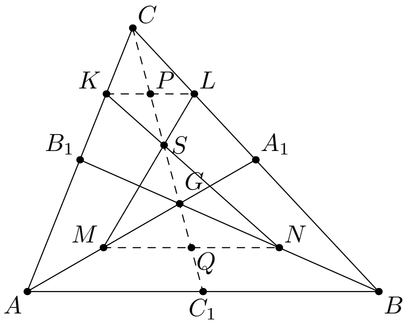
$$t^3-t=(\overline{ab})^3-\overline{ab}=\overline{(a-3)(b-3)(b+2)(a+2)00}.$$

Видно, что число $t^3-t=t(t-1)(t+1)$ делится на 100. Поскольку сумма $(a-3)+(b+2)+0$ цифр, стоящих в нечётных разрядах, равна сумме $(b-3)+(a+2)+0$ цифр, стоящих в чётных разрядах, то число $\overline{(a-3)(b-3)(b+2)(a+2)00}$ делится на 11. Следовательно, по крайней мере одно из чисел $t-1$, t и $t+1$ делится на 11. Кроме того, так как $t(t-1)(t+1)$ делится на 100, то одно из чисел $t-1$, t и $t+1$ делится на 5. Числа t и $t-1$ взаимно простые, числа t и $t+1$ взаимно простые, и, так как разность $(t+1)-(t-1)=2$, то общий делитель чисел $t+1$ и $t-1$ равен 1 или 2. Следовательно, только одно из чисел $t-1$, t и $t+1$ может делиться на 5, а вместе с тем и на 25 (в силу простоты числа 5). Среди двухзначных чисел $t=\overline{ab}$ только 25, 50 и 75 делятся на 25. Числа $t-1$, t, $t+1$ — три последовательных натуральных числа, среди которых ровно одно делится на 25, поэтому эти три числа могут быть лишь среди групп чисел $\{23,24,25,26,27\}$, $\{48,49,50,51,52\}$ и $\{73,74,75,76,77\}$. Только в третьей из указанных групп есть число, делящееся на 11, — число 77. Поэтому единственным возможным значением, удовлетворяющем условию, является число $t+1=77$, т.е. $t=76$, откуда $a=7$ и $b=6$. Проверка показывает, что указанные значения a и b действительно удовлетворяют равенству из условия:

$$\overline{(a-3)(b-3)(b+2)(a+2)ab}=438976=76^3=(\overline{ab})^3.$$

9.3. Ответ: $2:1$.

Так как отрезки B_1A_1 и MN — средние линии треугольников ACB и AGB, то они



параллельны и равны половине AB. Отрезок KL — средняя линия треугольника KCL, значит, KL равно половине B_1A_1 и параллельно ей, поэтому $MKLN$ — трапеция с отношением длин оснований $KL:MN = 1:2$. Обозначим середины отрезков KL и MN через P и Q, а середину стороны AB через C_1. Точки C, G и C_1 лежат на медиане CC_1. Точки P и Q также лежат на CC_1 как основания медиан подобных треугольников $\triangle CKL \sim \triangle CAB$ и $\triangle GAB \sim \triangle CAB$. Наконец, точка S пересечения диагоналей трапеции $MKLN$ лежит на отрезке PQ, соединяющем середины оснований этой трапеции, т. е. S тоже лежит на CC_1.

Обозначим длину медианы CC_1 через m. По теореме Фалеса $CP : m = CL : CB = 1:4$ и $GQ : QC_1 = GN : NB = 1:1$. Поскольку медианы делятся точкой пересечения $2:1$, считая от вершины, то $CG = 2m/3$ и $GC_1 = m/3$. Таким образом, $CP = m/4$ и $QC_1 = m/6$, значит, $PQ = m - m/4 - m/6 = 7m/12$. Из подобия треугольников SKP и SNQ следует, что $PS : SQ = KL : MN = 1:2$, откуда $PS = PQ/3 = 7m/36$. Окончательно находим

$$\frac{CS}{GS} = \frac{CP+PS}{CG-CP-PS} = \frac{\frac{m}{4}+\frac{7m}{36}}{\frac{2m}{3}-\frac{m}{4}-\frac{7m}{36}} = \frac{9+7}{24-9-7} = 2.$$

Второе решение. В треугольнике CB_1N отрезки CG и NK являются медианами. Поэтому точка пересечения прямых CG и NK делит отрезок CG в отношении $2:1$, считая от вершины C. Аналогично, точка пересечения прямых CG и ML делит отрезок CG в отношении $2:1$, считая от вершины C. Таким образом, точка S принадлежит отрезку CG и $CS:GS = 2$.

9.4. Ответ: нет, не может.

Предположим, что для какого-то натурального n и наборов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ случилась описанная в условии ситуация. Значит, наибольшая сумма N чисел в столбах таблицы

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_n, \end{matrix}$$

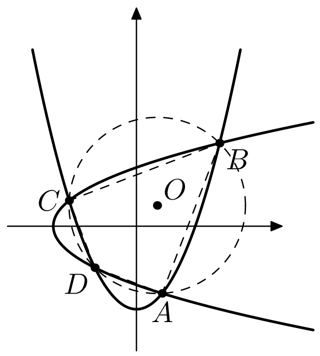
где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — какая-то перестановка чисел $y_1, y_2, \ldots, y_n$, меньше M.

Пусть M — сумма чисел в столбце с номером k, т. е. $M = x_k + y_k$. Рассмотрим суммы $x_m + z_m$ чисел в столбцах с номерами m от k до n включительно. По предположению верны неравенства $x_m + z_m \leqslant N < M = x_k + y_k \leqslant x_m + y_k$. Следовательно, числа $z_k, z_{k+1}, \ldots, z_n$ меньше y_k, а значит, в последовательности $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n$ каждое из них имеет номер больше k. Однако это невозможно, поскольку их $n-k+1$, а номеров всего $n-k$.

10 класс

10.1. Ответ: $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$.

Заметим, что если точки $K(k;k^2-2)$ и $M(m;m^2-2)$ принадлежат параболе $y=x^2-2$, то уравнение прямой KM имеет вид $y=(k+m)x-km-2$ (это легко вывести или проверить). Таким образом, угловой коэффициент прямой KM равен $k+m$. Пусть точки A, B и C лежат в четвертой, первой и второй координатных четвертях соответственно. Пары координат всех этих точек удовлетворяют обоим уравнениям $y=x^2-2$ и $x=y^2-2$, а поэтому и их разности, т. е. уравнению $y-x=x^2-y^2$, которое равносильно уравнению $(x-y)(x+y+1)=0$. Отсюда либо $y=x$, либо $y+x=-1$. Условие $y=x$ выполнено, очевидно, для точек B и D, расположенных в первой и третьей четвертях, а условие $y=-1-x$ выполнено для точек A и C.



Подставляя $y=x$ и $y=-1-x$ в уравнение $y=x^2-2$, получим уравнения $x^2-x-2=0$ и $x^2+x-1=0$, первому из которых удовлетворяют абсциссы b и d точек B и D, а второму — абсциссы a и c точек A и C. В частности, $b+d=1$, $bd=-2$ и $a^2+a-1=0$. Угловые коэффициенты прямых AD и AB равны соответственно $(a+d)$ и $(a+b)$, и их произведение равно $(a+d)(a+b)=a^2+(b+d)a+bd=a^2+a-2=-1$. Значит, углы $\angle DAB$ и $\angle DCB$ прямые. Поэтому BD — диаметр окружности, описанной вокруг четырёхугольника $ABCD$, а тогда и вокруг треугольника ABC. Центр O этой окружности — середина отрезка BD, и её координаты равны $y=x=\dfrac{b+d}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Второе решение. Пусть точка с координатами $(x;y)$ принадлежит параболам $y=x^2-2$, $x=y^2-2$ и окружности с центром $(a;b)$ и радиусом R. Тогда для неё верны равенства $x^2=y+2$, $y^2=x+2$ и $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Раскрывая в последнем равенстве скобки и подставляя выражения для x^2 и y^2 из первых двух равенств, получаем равенство $(1-2a)x+(1-2b)y+a^2+b^2+4=R^2$. Нетрудно видеть, что при $a=b=1/2$ и $R=\sqrt{9/2}$ это равенство является тождеством, следовательно, все точки пересечения парабол $y=x^2-2$ и $x=y^2-2$ лежат на окружности с центром в точке $(1/2;1/2)$ и радиусом $\sqrt{9/2}$.

10.2. Ответ: а) Например, $n=72$, или $n=88200$.

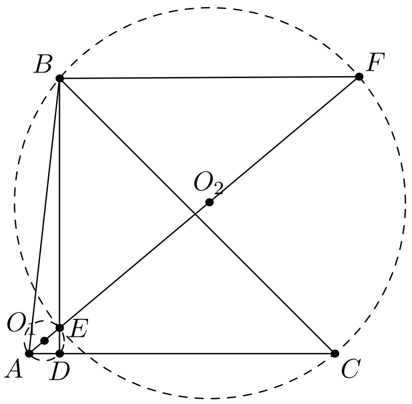
а) Пусть, например, $n=72$. Легко видеть, что 9, 12 и 72 — делители числа 72. Кроме того, равенство $72=12^2-72=9^2-9$ даёт требуемые представления.

Рассмотрим также $n=88200=2^3\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2$. Числа $300=2^2\cdot3\cdot5^2$, $1800=2^3\cdot3^2\cdot5^2$, $315=3^2\cdot5\cdot7$ и $105^2=11025=3^2\cdot5^2\cdot7^2$ — делители числа 88200. Кроме того, равенство $88200=300^2-1800=315^2-105^2$ даёт требуемые представления.

б) Положим $n=72m^2$. Тогда $n=(12m)^2-72m^2=(9m)^2-9m^2$, где $12m$, $72m^2$, $9m$ и $9m^2$ — делители числа $72m^2$. Придавая m всевозможные натуральные значения, получим бесконечное много n, удовлетворяющих условию.

10.3. Ответ: 40°.

Обозначим центры описанных окружностей треугольников ADE и BEC через O_1 и O_2 соответственно. Так как угол ADE прямой, то точка O_1 — середина отрезка AE. Поскольку окружности касаются в точке E, то она лежит на линии O_1O_2 центров этих окружностей. Следовательно, точки A, O_1, E и O_2 лежат на одной прямой. Обозначим через F точку пересечения этой прямой с описанной окружностью треугольника BEC. Углы $\angle AED$ и $\angle BEF$ равны как вертикальные, а угол $\angle EBF$ прямой, так как он опирается на диаметр. Углы $\angle EFB$ и $\angle ECB$ равны как опирающиеся на дугу BE. Значит, $\angle ECB = \angle EFB = 90^\circ - \angle BEF = = 90^\circ - \angle AED = 40^\circ$.



10.4. Пусть $P = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i - y_i) = x_k - y_k$. Поскольку $x_k \leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$ и $y_k \geqslant \min\limits_{1\leqslant j\leqslant n} y_j$, то, очевидно, $P = x_k - y_k \leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i - \min\limits_{1\leqslant j\leqslant n} y_j = G$, т. е. левое неравенство доказано.

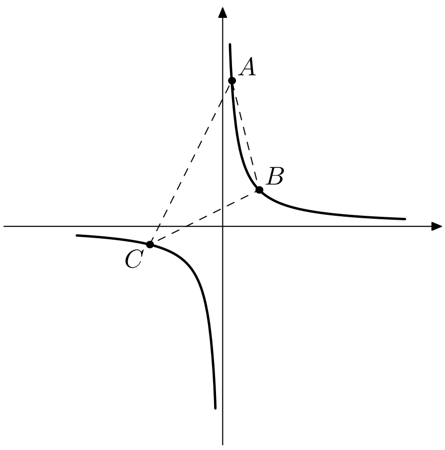
Пусть $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i = x_m$, $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n} y_j = y_\ell$ и, соответственно, $G = x_m - y_\ell$. Рассмотрим разность $S = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$. Так как каждое x_i не меньше каждого y_j, то $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - x_m \geqslant (y_1 + y_2 + \ldots + y_n) - y_\ell$, следовательно, $S \geqslant (x_m - y_\ell) = G$.

При этом, $S = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + \ldots + (x_n - y_n) \leqslant n \cdot \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i - y_i) = nP$. Таким образом, $G \leqslant S \leqslant nP$, и правое неравенство доказано.

11 класс

11.1. Ответ: $(-\frac{11}{8}; 2)$.

Уравнения указанных прямых имеют вид $y = 2(x+2) - 1/2$ и $y = (x+2)/2 - 1/2$, т. е. $y = 2x+7/2$ и $y = x/2+1/2$, соответственно. Абсциссы a и b точек A и B находятся из уравнений $\frac{1}{x} = 2x+\frac{7}{2}$ и $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$: они равны $a = 1/4$ и $b = 1$.



Пусть центр окружности, описанной около треугольника ABC, имеет координаты $(\alpha; \beta)$, и пусть R — радиус этой окружности. Тогда уравнение окружности имеет вид $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R^2 = 0$. Подставив в это уравнение $y = 1/x$, после преобразований получаем уравнение $x^4 - 2\alpha x^3 + Dx^2 - 2\beta x + 1 = 0$, где через D обозначено выражение $\alpha^2 + \beta^2 - R^2$. Поскольку точки A, B и C принадлежат этой окружности, то их абсциссы удовлетворяют этому уравнению. Подставляя последовательно $x = -2$, 1 и $1/4$, получаем систему

$$\begin{cases} 16 + 16\alpha + 4D + 4\beta + 1 = 0 \\ 1 - 2\alpha + D - 2\beta + 1 = 0 \\ 1 - 8\alpha + 16D - 128\beta + 256 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим $D = 2(\alpha+\beta) - 2$. Подставляя это выражение в первое и третье уравнения системы, приходим к

$$\begin{cases} 16 + 16\alpha + 8(\alpha+\beta) - 8 + 4\beta + 1 = 0 \\ 1 - 8\alpha + 32(\alpha+\beta) - 32 - 128\beta + 256 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 8\alpha + 4\beta = -3 \\ 8\alpha - 32\beta = -75. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим $\beta = 2$ и $\alpha = -\frac{11}{8}$.

11.2. Ответ: не существует.

Допустим, что такое число n существует, т. е. $n = a^2 - b$ и $n = b^2 - c$, где a, b и c — различные натуральные делители числа n. Из первого из этих равенств следует, что $b \,\vdots\, a$, так как $n \,\vdots\, a$ и $a^2 \,\vdots\, a$. Поэтому можно записать $b = ka$, где k — натуральное число. Аналогично из второго равенства получаем $c = \ell b$, для некоторого натурального ℓ, значит, $c = \ell ka$. Подставляя эти выражения для b и c в равенство $a^2 - b = b^2 - c$, получаем $a^2 - ka = k^2a^2 - \ell ka$, или, после сокращения на $a \neq 0$,

$$a - k = ak^2 - \ell k. \tag{1}$$

Из этого равенства видно, что $a \,\vdots\, k$, т. е. $a = kt$ для некоторого натурального t. Тогда из (1) получаем $kt - k = tk^3 - \ell k$, что равносильно (т. к. $k \neq 0$) равенству $t - 1 = tk^2 - \ell$, откуда $\ell - 1 = t(k^2-1)$, и, значит, $(\ell - 1) \,\vdots\, t$.

Из равенства $n = b^2 - c$ следует, что $b^2 \vdots c$ (так как $n \vdots c$). Поскольку $c = \ell b$, то $b^2 \vdots \ell b$, откуда $b \vdots \ell$. А так как $b = ka = k^2 t$, то $k^2 t \vdots \ell$. Из ранее полученного равенства $t - 1 = k^2 t - \ell$ вытекает, что $(t-1) \vdots \ell$. Итак, мы получили делимости

$$(\ell - 1) \vdots t \quad \text{и} \quad (t-1) \vdots \ell. \tag{2}$$

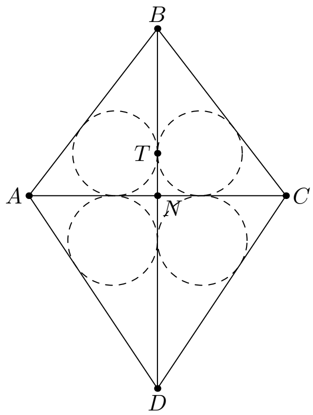
Заметим, что, если $\ell \neq 1$ и $t \neq 1$, то из (2) следует, что $\ell - 1 \geqslant t$ и $t - 1 \geqslant \ell$, что невозможно. Поэтому либо $\ell = 1$, либо $t = 1$.

Если $\ell = 1$, то $c = lb = b$ — противоречие.

Если $t = 1$, то $a = kt = k$ и $b = ka = k^2$. Но в этом случае $n = a^2 - b = k^2 - k^2 = 0$ — противоречие. Таким образом, указанных в условии натуральных чисел n не существует.

11.3. Ответ: 1.

В решении мы используем следующий известный (и легко доказываемый факт): если вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке Q, то



$$AQ = \frac{1}{2}(AB + AC - BC). \tag{1}$$

Так как вписанные окружности треугольников ABN и CBN касаются друг друга, то они касаются отрезка BN в одной и той же точке (скажем, T). Применяя формулу (1), к треугольникам ABN и CBN, получаем соответственно $NT = \frac{1}{2}(NA + NB - AB)$ и $NT = \frac{1}{2}(NC + NB - BC)$. Приравнивая правые части полученных равенств, получаем соотношение $NA - AB = NC - BC$, которое равносильно

$$NA - NC = AB - BC. \tag{2}$$

Проводя аналогичные рассуждения для треугольников ADN и CDN, получим

$$NA - NC = AD - DC. \tag{3}$$

Далее для удобства обозначим $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AN = x$, $NC = y$, $NB = z$, $ND = v$. По формуле Стюарта найдём длины отрезков x и y в треугольниках DAB и DCB:

$$x^2 = \frac{va^2 + zd^2}{v + z} - vz, \quad y^2 = \frac{vb^2 + zc^2}{v + z} - vz.$$

вычитая второе равенство из первого, получим

$$(x - y)(x + y) = \frac{v(a - b)(a + b) + z(d - c)(d + c)}{v + z}.$$

В наших обозначениях равенства (2) и (3) имеют вид $x - y = a - b$ и $x - y = d - c$, поэтому

$$(x - y)(x + y) = (x - y)\frac{v(a + b) + z(d + c)}{v + z}.$$

Если $x \neq y$, то $(x + y)(v + z) = v(a + b) + z(d + c)$, что противоречит неравенствам треугольника $x + y < a + b$ и $x + y < d + c$. Поэтому $x = y$, и тогда $a = b$ и $c = d$. Следовательно, $AN : NC = 1$.

11.4. Достаточно доказать утверждение пункта б). Переформулируем задачу следующим образом: даны 25 различных натуральных чисел, не превосходящих 330. Требуется доказать, что среди попарных разностей между ними есть равные.

Обозначим данные числа в порядке возрастания $a_1 < a_2 < \ldots < a_{24} < a_{25}$. По условию $1 \leqslant a_1 < a_{25} \leqslant 330$, поэтому $a_{25} - a_1 \leqslant 329$. Представим разность $a_{25} - a_1$ двумя способами:

$$a_{25} - a_1 = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_{24} - a_{23}) + (a_{25} - a_{24}), \tag{1}$$

$$a_{25} - a_1 = (a_3 - a_1) + (a_5 - a_3) + \ldots + (a_{23} - a_{21}) + (a_{25} - a_{23}). \tag{2}$$

В правой части (1) имеем 24 слагаемых, а в правой части (2) — 12 слагаемых. Все 36 слагаемых в правых частях (1) и (2) — это разности разных пар чисел a_i. Предположим, что среди всевозможных попарных разностей нет одинаковых, т. е. каждое значение встречается не более одного раза. Тогда сложив равенства (1) и (2), получим оценку

$$2(a_{25} - a_1) \geqslant 1 + 2 + \ldots + 36 = \frac{37 \cdot 36}{2},$$

откуда $a_{25} - a_1 \geqslant \dfrac{37 \cdot 36}{4} = 37 \cdot 9 = 333$, что противоречит неравенству $a_{25} - a_1 \leqslant 329$. Следовательно, сделанное предположение неверно и требуемое утверждение доказано.

Заметим, что утверждение пункта а) можно доказать и следующим образом. Всего попарных разностей для данных 25 чисел имеется $C_{25}^2 = \dfrac{25 \cdot 24}{2} = 300$. Если бы все разности были различными, то наибольшая из них $a_{25} - a_1$ была бы не менее 300, и тогда $a_{25} \geqslant 300 + a_1 \geqslant 300 + 1 = 301 > 300$ — противоречие.