LXX Белорусская математическая олимпиада школьников
III этап
13 – 17 января, 2020 год

8 класс

1. Пусть x и y – произвольные числа. Какое наименьшее значение может принимать выражение

$$\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}y^4 - x^2y - xy^2 + x^2 + y^2 - x - y\ ?$$

Ответ: -1.

2. Найдите все пары натуральных x и y таких, что

$$x^4 + 1511 = 8x^2 + 16y^2.$$

Ответ: $(x; y) = (5; 11)$.

3. В треугольнике ABC отметили середины A_1, B_1 и C_1 сторон BC, CA и AB соответственно. Точки K и L — середины отрезков A_1C и KC соответственно.

Докажите, что середины отрезков AC_1, B_1K и LC лежат на одной прямой.

4. В городе **P** чемпионат по теннису проходит по своеобразной олимпийской системе. В каждом туре участники делятся на пары и играют на выбывание: победитель проходит в следующий тур, а проигравший выбывает из турнира. Если количество участников тура нечётно, то, ещё до разбиения на пары, жюри случайным образом выбирает счастливчика, который проходит в следующий тур без игры. В 2020 году в чемпионате было сыграно 195 игр, после чего остался только один участник — победитель турнира.

Найдите все возможные значения количества участников чемпионата.
Ответ: 196 участников.

LXX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

13 – 17 января, 2020 год

9 класс

1. Элементы двух последовательностей неотрицательных вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ удовлетворяют неравенствам

$$a_1 \leqslant 1, \quad a_2 \leqslant 1+a_1b_1, \quad \ldots, \quad a_{n+1} \leqslant 1+a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n, \quad \ldots \quad \text{и. т. д.}$$

Докажите, что для любого натурального числа n верно неравенство

$$a_{n+1} \leqslant (1+b_1)(1+b_2)\ldots(1+b_n).$$

2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке E, а биссектрисы углов B и D пересекаются в точке F.

Докажите, что точки A, F, E и D лежат на одной окружности.

3. Найдите все натуральные числа x, y и простые числа p, удовлетворяющие уравнению $x^y \cdot y^p = p^x$.

Ответ: $(x, y, p) = (8, 2, 2)$ или $(9, 3, 3)$.

4. В городе **Р** чемпионат по теннису проходит по своеобразной олимпийской системе. В каждом туре участники делятся на пары и играют на выбывание: победитель проходит в следующий тур, а проигравший выбывает из турнира. Если количество участников тура нечётно, то, ещё до разбиения на пары, жюри случайным образом выбирает счастливчика, который проходит в следующий тур без игры. В 2020 году двое участников, прошедших во второй тур, снялись с чемпионата из-за травм, а игрок, прошедший в третий тур был отстранён допинговой комиссией. Далее эти игроки в чемпионате не участвовали и никем не были заменены. Всего было сыграно 195 игр, после чего остался только один участник — победитель турнира.

Найдите все возможные значения количества участников чемпионата.

Ответ: 199 участников.

LXX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

13 – 17 января, 2020 год

10 класс

1. Решите уравнение $1 + x + 2x^2 + 4x^3 + 8x^4 + \ldots + 2^{2019}x^{2020} = 0$.
Ответ : у уравнения нет вещественных решений.

2. Найдите все натуральные числа m, n и простые числа p, удовлетворяющие уравнению $m^p \cdot p^n = n^m$.
Ответ : $(m, n, p) = (8, 2, 2)$, $(9, 3, 3)$, $(4, 4, 2)$ или $(4, 8, 2)$.

3. На медианах AA_1 и BB_1 треугольника ABC построили равнобедренные прямоугольные треугольники AA_1K и BB_1L таким образом, что вершины K и L прямых углов расположены в той же полуплоскости относительно соотвествующих медиан, что и сторона AB.

Докажите, что середина отрезка KL равноудалена от середин медиан AA_1 и BB_1.

4. В городе **P** чемпионат по теннису проходит в несколько туров по своеобразной олимпийской системе. Если количество участников чётно, то такой тур называется *чётным*, все участники делятся на пары и играют на выбывание: победитель проходит в следующий тур, а проигравший выбывает из турнира. Если же количество участников нечётно, то такой тур называется *нечётным*, то жюри случайным образом выбирает из выбывших участников счастливчика, который возвращается в чемпионат, а далее всё проходит как в чётном туре. В 2020 всего было сыграно 199 игр, после чего остался только один участник — победитель турнира. Известно также, что было ровно 4 нечётных тура.

Найдите все возможные значения количества участников чемпионата.
Ответ : 196 участников.

LXX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

13 – 17 января, 2020 год

11 класс

1. Числа от $1, 2, 4, \ldots, 2^{2019}$ разбили на пары. В каждой паре числа a, b заменили на $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$, после чего вычислили сумму полученных 2020 чисел. Найдите наибольшее возможное значение найденной суммы.

Ответ: $\frac{2}{3}(2^{2020} - 2^{-2020})$.

2. В вершинах $4n$-угольника в некотором порядке записаны числа. Среди них числа $1, 2, \ldots, n-1, n$ встречаются про три раза, а числа $n+1, n+2, \ldots, 2n$ — по одному разу. Для каждой стороны этого $4n$-угольника Петя вычислил сумму чисел, стоящих в концах этой стороны.

Могли ли все вычисленные Петей числа оказаться различными?

Ответ: нет, не могли.

3. На медианах AA_1 и BB_1 неравнобедренного треугольника ABC построили равнобедренные прямоугольные треугольники AA_1K и BB_1L таким образом, что вершины K и L прямых углов расположены в той же полуплоскости относительно соотвествующих медиан, что и сторона AB. Точка H — основание высоты, проведённой из вершины C.

Докажите, что отрезок KL перпендикулярен стороне AB тогда и только тогда, когда $AB = 2CH$.

4. Существует ли последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ натуральных чисел, в которой каждое натуральное число встречается ровно один раз и для любого натурального числа $n \geqslant 2$ произведение $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ первых n членов последовательности является n-й степенью натурального числа?

Ответ: да, существует.

8 класс

8.1. Ответ: -1.

Выделим в данном выражении полные квадраты $\frac{1}{2}x^4 - x^2y + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(x^2-y)^2$, $\frac{1}{2}y^4 - xy^2 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}(y^2-x)^2$, $\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x-1)^2$ и $\frac{1}{2}y^2 - y + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(y-1)^2$, и получим равенство

$$\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}y^4 - x^2y - xy^2 + x^2 + y^2 - x - y = \frac{1}{2}((x^2-y)^2 + (y^2-x)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2) - 1.$$

Ясно, что наименьшее значение последнего выражения равно -1 и оно достигается, если и только если $x^2 = y$, $y^2 = x$, $x = 1$ и $y = 1$, т. е. при $x = y = 1$.

8.2. Ответ: $(x; y) = (5; 11)$.

Сделаем следующие равносильные преобразования:

$$x^4 + 1511 = 8x^2 + 16y^2 \iff (x^4 - 8x^2 + 16) - 16y^2 = -1495$$

$$\iff (4y)^2 - (x^2-4)^2 = 1495 \iff (4y - x^2 + 4)(4y + x^2 - 4) = 1495 = 5 \cdot 13 \cdot 23.$$

Заметим, что при $x = 1$ получится равенство $1 + 1511 = 8 + 16y^2$, откуда $y^2 = 94$, что невозможно при натуральных значениях y. Значит $x \geqslant 2$, поэтому $4y + x^2 - 4 > 0$ и $(4y - x^2 + 4)(4y + x^2 - 4)$ — разложение числа 1495 в произведение двух натуральных делителей, первый из которых меньше второго. Таким образом, необходимо рассмотреть только 4 случая:

1) $4y - x^2 + 4 = 1$, $4y + x^2 - 4 = 1495$;
2) $4y - x^2 + 4 = 5$, $4y + x^2 - 4 = 299$;
3) $4y - x^2 + 4 = 13$, $4y + x^2 - 4 = 115$;
4) $4y - x^2 + 4 = 23$, $4y + x^2 - 4 = 65$.

Воспользуемся тождеством $x^2 = \dfrac{(4y + x^2 - 4) - (4y - x^2 + 4) + 8}{2}$. В случаях 1), 2) и 3) натуральных решений нет, так как числа $\dfrac{1495 - 1 + 8}{2} = 751$, $\dfrac{299 - 5 + 8}{2} = 151$ и $\dfrac{115 - 13 + 8}{2} = 55$ не являются полными квадратами. В случае 4) получаем, что $x^2 = \dfrac{65 - 23 + 8}{2} = 25$, значит, $x = 5$, а $4y = 25 - 4 + 23 = 44$, т. е. $y = 11$. Итак, единственной парой, удовлетворяющей условию, является пара $(x; y) = (5; 11)$.

8.3. Обозначим середины отрезков AC_1, B_1K и LC через P, Q и R соответственно. Поскольку $BP : BA = BK : BC = 3 : 4$, то прямые PK и AC параллельны и верно равенство $PK : AC = 3 : 4$. Так как QL — средняя линия треугольника KB_1C, то она параллельна AC и $QL = B_1C/2$, следовательно, $QL = AC/4$. Поскольку $PK \parallel QL$ и $PK : QL = 3 : 1$, то прямые KL и PQ пересекаются в такой точке X на KL, что $XL : XK = 1 : 3$. Но $RL : RK = 1 : 3$, значит, точки X и R совпадают, т. е. R лежит на прямой PQ, что и требовалось доказать.

8.4. Ответ: 196 участников.

В каждом матче выбывает один участник. Следовательно, количество участников на единицу (победитель ни разу не проиграл) больше количества сыгранных игр, т. е. равно 196.

Убедимся, что в чемпионате со 196 участниками количество игр действительно равно 195. Для этого найдём количества игр, сыгранных в последовательных турах, причём для ясности будем выписывать пары, состоящие из количества сыгранных игр и участников, прошедших далее: $(98, 98)$, $(49, 49)$, $(24, 25)$, $(12, 13)$, $(6, 7)$, $(3, 4)$, $(2, 2)$ и $(1, 1)$. Таким образом, общее количество игр равно $98+49+24+12+6+3+2+1 = 195$, как и требовалось.

9 класс

9.1. Докажем утверждение задачи, используя метод математической индукции. База индукции при $n = 1$ проверяется непосредственно $a_2 \leqslant 1 + a_1 b_1 \leqslant 1 + b_1$ (мы использовали неравенства $a_1 \leqslant 1$ и $0 \leqslant b_1$). Предположим, что требуемое неравенство доказано для всех $k \leqslant n$, т. е. доказано, что

$$a_2 \leqslant 1 + b_1, \quad a_3 \leqslant (1 + b_1)(1 + b_2), \quad \ldots, \quad a_{k+1} \leqslant (1 + b_1)(1 + b_2)\ldots(1 + b_k).$$

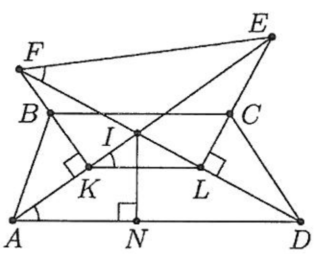
Тогда при $n = k + 1$ получаем

$$a_{k+2} \leqslant 1 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_{k+1} b_{k+1} \leqslant (1 + b_1) + (1 + b_1) b_2 + \ldots + \\ + (1 + b_1)(1 + b_2)\ldots(1 + b_k) b_{k+1} = (1 + b_1)(1 + b_2)\ldots(1 + b_{k+1}).$$

9.2. Пусть биссектрисы углов DAB и ABC пересекаются в точке K, а биссектрисы углов BCD и CDA пересекаются в точке L. Так как углы DAB и ABC — внутренние односторонние при параллельных прямых, то они в сумме дают $180°$, следовательно, а угол между их биссектрисами равен $90°$. Следовательно, $BKA = 90°$ и, аналогично, $CLD = 90°$. Поэтому четырёхугольник $FELK$ вписанный и $\angle EFD = \angle EKL$.

Докажем, что $\angle EKL = \angle EAD$, откуда будет следовать вписанность четырёхугольника $AFED$. Для этого достаточно доказать, что $KL \parallel AD$. Проведём в треугольниках ABK и CLD медианы KM и LN. По свойству медианы, проведённой к гипотенузе $AM = MK$ и $\angle MKA = \angle MAK$. Значит, $MK \parallel AD$ и, аналогично, $LN \parallel AD$. Следовательно, все четыре точки M, K, L и N лежат на одной прямой — средней линии трапеции $ABCD$ и $KL \parallel AD$.

Второе решение. Обозначим через I точку пересечения прямых AE и DF, а точки K и L определим как в первом решении (см. рис., другие варианты расположения точек рассматриваются аналогично). Опустим из I перпендикуляр IN на прямую AD. Пусть $\angle BAD = 2x$ и $\angle CDA = 2y$. Так как $BC \parallel AD$, то $\angle ABC = 180° - 2x$. Поэтому $\angle BAK + \angle ABK = x + 90° - x = 90°$, т. е. $\angle BKA = 90°$. Аналогично, $\angle CLD = 90°$, а значит, четырёхугольник $FELK$ вписан в окружность. Следовательно, $\angle EFD = \angle EKL$.



Докажем, что $KL \parallel AD$. Из этого будет следовать, что $\angle EKL = \angle EAD$ и, в частности, принадлежность точек A, F, E и D одной окружности. Рассматривая прямоугольные треугольники ABK и AIN, получаем равенства

$$AK = AB \cos x \quad \text{и} \quad AI = \frac{IN}{\sin x}.$$

Таким образом, $\dfrac{AK}{AI} = \dfrac{AB \sin 2x}{2 \cdot IN}$. Аналогично, $\dfrac{DL}{DI} = \dfrac{CD \sin 2y}{2 \cdot IN}$. Так как $AB \sin 2x$ и $CD \sin 2y$ — расстояния от точек B и C до прямой AD, соответственно, то $\dfrac{AK}{AI} = \dfrac{DL}{DI}$, т.е. $KL \parallel AD$.

9.3. Ответ: $(x, y, p) = (8, 2, 2)$ или $(9, 3, 3)$. Так как в правой части равенства стоит степень простого числа p, то числа x и y не делятся ни на какие простые числа, кроме p. Нетрудно видеть, что при $x = 1$ или $y = 1$ решений у уравнений $y^p = p$ и $x = p^x$ нет (для любого натурального числа z верно неравенство $z < 2^z$). Поэтому $x = p^a$ и $y = p^b$ для некоторых натуральных чисел a и b.

Исходное уравнение принимает вид $p^{ap^b} \cdot p^{bp} = p^{p^a}$, что равносильно

$$ap^b + pb = p^a. \qquad (1)$$

Так как $p^a > ap^b$, то $a > b$ и $p^a \vdots p^b$, а значит, и число pb делится на p^b. Но тогда $b \vdots p^{b-1}$ и, в частности $b \geqslant p^{b-1}$. При всех $b \geqslant 3$ верно неравенство $b < 2^{b-1}$. Поэтому при $b \geqslant 3$ решений нет и нам необходимо рассмотреть два случая: $b = 1$ и $b = 2$.

Случай 1. $b = 1$. Равенство (1) принимает вид $ap + p = p^a$, что равносильно $a + 1 = p^{a-1}$. При всех $a \geqslant 4$ верно неравенство $a + 1 < 2^{a-1}$. Следовательно $a = 2$ или $a = 3$ и этим вариантам соответствуют $p = 3$ и $p = 2$. Подставляя найденные значения, получаем решения $(x, y, p) = (8, 2, 2)$ и $(9, 3, 3)$.

Случай 2. $b = 2$. Из $2 \vdots p$ следует, что $p = 2$ и равенство (1) принимает вид $4a+4 = 2^a$, что равносильно $a + 1 = 2^{a-2}$. Поскольку $a + 1 < 2^{a-2}$ при всех $a \geqslant 5$, а при $a \leqslant 4$ уравнение $a + 1 = 2^{a-2}$, как нетрудно убедиться не имеет решений, то в случае 2 решений нет.

Замечание: Все использованные в решении неравенства приведены без доказательства, поскольку они стандартны и их доказательство при помощи метода математической индукции легко проводится устно.

9.4. Ответ: 199 участников.

В каждом матче выбывает один участник. Следовательно, количество участников на четыре (победитель, двое травмированных и дисквалифицированный участники ни разу не проиграли) больше количества сыгранных игр.

Убедимся, что в чемпионате со 199 участниками количество игр действительно равно 195. Для этого найдём количества игр, сыгранных в последовательных турах, причём для ясности будем выписывать пары, состоящие из количества сыгранных игр и участников, прошедших далее: $(99, 100)$, (двое травмировались, остались 98 участников), $(49, 49)$, (одного дисквалифицировали, остались 48 участников), $(24, 24)$, $(12, 12)$, $(6, 6)$, $(3, 3)$, $(1, 2)$ и $(1, 1)$. Таким образом, общее количество игр равно $99 + 49 + 24 + 12 + 6 + 3 + 1 + 1 = 195$, как и требовалось.

Замечание. В приведённом решении проверка того, что 199 участников могло участвовать в турнире, не нужна, поскольку количество игр однозначно определяется количеством выбывших игроков. Однако, в общем случае, если решение такого соответствия не задаёт, то проверка, конечно, необходима.

10 класс

10.1. Ответ: у уравнения нет вещественных решений.

Пусть a — решение уравнения из условия, очевидно, что $a < 0$. Домножив уравнение из условия на 2 и подставив a, получим равенство

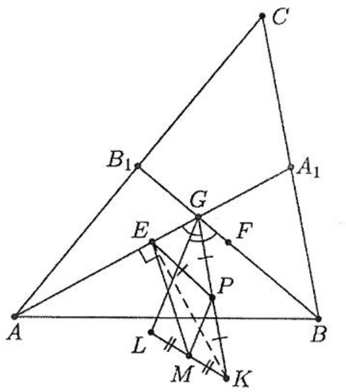
$$2 + 2a + 4a^2 + \ldots + 2^{2020}a^{2020} = 0.$$

Обозначим $2a$ через b, тогда число $b < 0$ удовлетворяет равенству

$$1 + b + b^2 + \ldots + b^{2020} = -1.$$

Домножив обе части этого равенства на $1 - b$, получим равенство $1 - b^{2021} = b - 1$. Но это невозможно, поскольку левая часть положительная, а правая — отрицательная. Следовательно, исходное уравнение не имеет решений.

10.2. Отметим середины M, E, F и P отрезков KL, AA_1, BB_1 и GK соответственно. Пусть G — точка пересечения медиан AA_1 и BB_1. Докажем подобие треугольников $\triangle EPM$ и $\triangle AGB$. Так как $AG : GA_1 = BG : GB_1 = 2$, то точка G делит в одинаковом отношении $2:1$ основания подобных треугольников AA_1K и BB_1L. Следовательно, $GK : GL = GA : GB$ и $\angle KGA = \angle LGB$. Отрезок EP — медиана, проведённая к гипотенузе, в прямоугольном треугольнике KEG, а значит, $EP = GK/2$ и $\angle PGE = \angle PEG$. Так как PM — средняя линия в треугольнике GKL, то $PM = GL/2$ и $\angle KPM = \angle KGL$. Поэтому,



$$\angle EPM = 2\angle PEG - \angle KGL = \angle KGA + \angle LGB - \angle KGL = \angle AGB.$$

Таким образом, $EP : PM = (GK/2) : (GL/2) = AG : GB$ и $\angle EPM = \angle AGB$, значит, треугольники EPM и AGB подобны и $ME = \dfrac{GK \cdot AB}{2AG}$. Аналогично доказывается, что $MF = \dfrac{GL \cdot AB}{2BG}$. Поскольку $GK : GL = GA : GB$, то $ME = MF$.

Второе решение. Отметим середины M, E, F, A_2 и B_2 отрезков KL, AA_1, BB_1, BA_1 и AB_1 соответственно. Поскольку отрезки B_2E, B_2F, A_2F и A_2E являются средними линиями треугольников AB_1A_1, AB_1B, BA_1B_1 и AA_1B соответственно, то точки B_2, E, F и A_2 лежат на одно прямой (средней линии трапеции AB_1A_1B) и $B_2E = \frac{1}{2}B_1A_1 = FA_2$. Следовательно, середины отрезков B_2A_2 и EF совпадают и требуемое равенство $ME = MF$ равносильно равенству $MB_2 = MA_2$.

Докажем более сильное утверждение: точка M — вершина прямого угла равнобедренного прямоугольного треугольника MB_2A_2. Так как M и A_2 — середины противоположных сторон KL и A_1B четырёхугольника KLA_1B, то

$$\overrightarrow{MA_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BA_2}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{LA_1} + \overrightarrow{KB}).$$

Аналогично, $\overrightarrow{MB_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{LB_1})$. Заметим, что векторы $\overrightarrow{KA}$ и $\overrightarrow{LB_1}$ получаются из векторов $\overrightarrow{KA_1}$ и $\overrightarrow{LB}$ в результате поворота на $90°$ в одинаковом направлении. Поэтому их сумма $\overrightarrow{MB_2}$ получается из $\overrightarrow{MA_2}$ в результате поворота на $90°$, откуда следует наше утверждение.

10.3. Ответ: $(x, y, p) = (8, 2, 2)$, $(9, 3, 3)$, $(4, 4, 2)$ или $(4, 8, 2)$.

Покажем сначала, что x и y не делятся ни на какие простые числа, кроме p. Предположим обратное: x и y имеют простой делитель $q \neq p$ (очевидно, что любой простой делитель одного из x и y является их общим делителем). Пусть $x = q^\alpha x_1$ и $y = q^\beta y_1$, где x_1 и y_1 не делятся на q. Степени вхождения q в обе части равенства из условия равны, следовательно, $\alpha p = \beta x = \beta q^\alpha x_1$. Так как q и p различны, то $\alpha \vdots q^\alpha$, что невозможно, поскольку $\alpha < 2^\alpha \leqslant q^\alpha$.

Таким образом, x и y являются степенями простого числа p и можно записать $x = p^a$ и $y = p^b$. Исходное уравнение принимает вид $p^{ap} \cdot p^{p^b} = p^{bx}$, что равносильно $ap + p^b = bx$, т. е.

$$a + p^{b-1} = bp^{a-1}. \qquad (1)$$

Предположим, что $b = 1$, тогда $a+1 = p^{a-1}$. Случай $a = 1$ невозможен, при $a = 2$ и $a = 3$ получаем соответственно $p = 3$ и $p = 2$, что даёт нам решения $(x, y, p) = (9, 3, 3)$ и $(8, 2, 2)$. При всех $a \geqslant 4$ верно неравенство $a + 1 < 2^{a-1} \leqslant p^{a-1}$, значит, других решений при $b = 1$ нет.

Пусть теперь $b \geqslant 2$. Тогда $a + p^{b-1} = bp^{a-1} \geqslant 2p^{a-1} \geqslant a + p^{a-1}$, следовательно, $b \geqslant a$. Значит, $p^{b-1} \vdots p^{a-1}$, а тогда в равенстве (1) и $a \vdots p^{a-1}$. Если $a \vdots p^{a-1}$, то $a \geqslant p^{a-1}$, что возможно только если $a = 1$ или $a = p = 2$. При $a = 1$ равенство (1) примет вид $b = p^{b-1} + 1$, что невозможно ($b = 2$ не подходит, а при $b > 2$ правая часть больше левой). Остаётся единственный вариант: $a = p = 2$, при котором (1) записывается как $2 + 2^{b-1} = 2b$ или, после сокращения, $1 + 2^{b-2} = b$. Очевидно, что $b = 2$ и $b = 3$ являются решениями этого уравнения и дают решения $(x, y, p) = (4, 4, 2)$ и $(4, 8, 2)$. Наконец, при $b \geqslant 4$ решений нет, поскольку тогда $2^{b-2} + 1 > b$.

Замечание: Все использованные в решении неравенства приведены без доказательства, поскольку они стандартны и их доказательство при помощи метода математической индукции легко проводится устно.

10.4. Ответ: 196 участников.

Понятно, что в каждой паре игроков мы можем сами назначать выигравшего, так как на ответ влияет количество участников, а не их результаты. Не ограничивая общности будем считать, все игроки, которые вернулись в чемпионат, тут же проиграли и больше не возвращались.

В каждом матче выбывает один участник, при этом, только победитель ни разу не выбыл из турнира, а четверо игроков, возвращённых в нечётных турах, дважды выбыли из турнира. Следовательно, общее количество игроков равно $199-4+1 = 196$.

Убедимся, что в чемпионате со 196 участниками количества игр и нечётных туров действительно равны 199 и 4 соответственно. Для этого найдём количества игр, сыгранных в последовательных турах, причём для ясности будем выписывать пары, состоящие из количества сыгранных игр и участников, прошедших далее: $(98, 98)$, $(49, 49)$, $(25, 25)$, $(13, 13)$, $(7, 7)$, $(4, 4)$, $(2, 2)$ и $(1, 1)$. Таким образом, общее количество игр равно $98 + 49 + 25 + 13 + 7 + 4 + 2 + 1 = 199$, а количество нечётных туров равно четырём, как и требовалось.

11 класс

11.1. Ответ: $\frac{2}{3}(2^{2020}-2^{-2020})$.

Докажем вначале следующее вспомогательное

Утверждение: *Для любых положительных вещественных чисел* $a<b<c<d$ *верно двойное неравенство* $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{d}+\frac{d}{c}<\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{d}+\frac{d}{b}<\frac{a}{d}+\frac{d}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$.

Доказательство: Неравенство $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{d}+\frac{d}{c}<\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{d}+\frac{d}{b}$ равносильно неравенству $\frac{d-a}{c}+\frac{c-b}{d}<\frac{d-a}{b}+\frac{c-b}{a}$, которое, верно, так как числители $d-a$ и $c-b$ дробей положительны, а соответствующие им знаменатели в левой части неравенства больше, чем в правой.

Аналогично, неравенство $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{d}+\frac{d}{b}<\frac{a}{d}+\frac{d}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$ равносильно неравенству $\frac{d-c}{b}+\frac{b-a}{d}<\frac{d-c}{a}+\frac{b-a}{c}$, в котором числители $d-c$ и $b-a$ дробей положительны, а соответствующие им знаменатели слева больше, чем справа. Утверждение доказано.

Выберем разбиение на пары, которое соответствует наибольшей возможной сумме (если таких разбиений несколько, выберем любое из них), и исследуем, как оно устроено. Числа 1 и 2^{2019} образуют пару, так как в противном случае из доказанного утверждения для $a=1$, $d=2^{2019}$ и чисел b и c, образующих с ними пары, будет следовать, что данное разбиение не даёт максимальной суммы. Уберём пару $(1,2^{2019})$ из рассмотрения, теперь наименьшим и наибольшим станут числа 2^1 и 2^{2018}. Аналогичные рассуждения показывают, что эти числа образуют пару. Продолжая так дальше, получим, что наше разбиение однозначно определено и состоит из пар $(2^i,2^{2019-i})$ при всех i от 0 до 1009. Соответственно, наибольшая возможная сумма равна

$$S=\frac{2^0}{2^{2019}}+\frac{2^{2019}}{2^0}+\frac{2^1}{2^{2018}}+\frac{2^{2018}}{2^1}+\ldots+\frac{2^{1009}}{2^{1010}}+\frac{2^{1010}}{2^{1009}}.$$

Умножим обе части этого равенства на 2^{2019}, чтобы избавиться от знаменателей:

$$2^{2019}S=2^0\cdot 2^0+2^{2019}\cdot 2^{2019}+2^1\cdot 2^1+2^{2018}\cdot 2^{2018}+\ldots+2^{1009}\cdot 2^{1009}+2^{1010}\cdot 2^{1010}.$$

Заметим, что в правой части записана в другом порядке сумма $4^0+4^1+4^2+\ldots+4^{2019}$, которую легко вычислить по формуле суммы геометрической прогрессии.

Таким образом, наибольшая сумма $S=\frac{1}{2^{2019}}\cdot\frac{4^{2020}-1}{4-1}=\frac{2}{3}(2^{2020}-2^{-2020})$.

11.2. Ответ: нет.

Сумма всех чисел, записанных в вершинах $4n$-угольника равна

$$S=3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(3n+1)}{2}=n(3n+2).$$

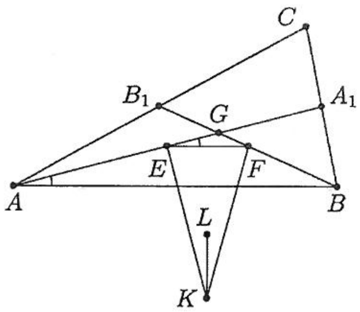
Значит, сумма всех вычисленных Петей чисел равна $2S = 2n(3n+2)$. Если бы все эти числа были различны, то выполнялось бы неравенство

$$2S \geqslant 2+3+\ldots+(4n+1) = \frac{4n(4n+3)}{2} = 2n(4n+3).$$

Поскольку $2n(3n+2) < 2n(4n+3)$, то среди чисел, вычисленных Петей есть равные.

11.3. Напомним и докажем следующий критерий перпендикулярности прямых на плоскости: прямые AB и CD перпендикулярны тогда и только тогда, когда верно равенство $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$. Пусть P и Q — проекции точек C и D на прямую AB, тогда $AB \perp CD$ если и только если точки P и Q совпадают. Так как $AC^2 = CP^2 + AP^2$, $BD^2 = DQ^2 + BQ^2$, $AD^2 = DQ^2 + AQ^2$ и $BC^2 = CP^2 + BP^2$, то $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$ равносильно $AP^2 - BP^2 = AQ^2 - BQ^2$, которое для точек P и Q на прямой AB равносильно $P \equiv Q$.

Отметим тоски E и F — середины отрезков AA_1 и BB_1 соответственно. Так как $GA = 2 : GA_1$, то $GE : GA = 1 : 4$ и, аналогично, $GF : GB = 1 : 4$. Следовательно, $EF \parallel AB$, $EF = AB/4$ и $\angle GEF = \angle GAB$. Поэтому условие $LK \perp AB$ (т.е. $LK \perp EF$) равносильно равенству $FK^2 + EL^2 = FL^2 + EK^2$. Из условия следует, что $EK = AA_1/2$ и $FL = BB_1/2$. По теореме косинусов для треугольника EFK находим



$$FK^2 = EF^2 + EK^2 - 2EF\cdot EK\cos\angle KEF =$$
$$= EF^2 + EK^2 - \frac{AA_1\cdot AB}{4}\sin\angle GAB.$$

Произведение $AA_1 \sin\angle GAB$ равно расстоянию от точки A_1 до прямой AB и, так как A_1 — середина BC, то $AA_1\sin\angle GAB = CH/2$. Следовательно, $FK^2 - EK^2 = (AB^2 - 2CH\cdot AB)/16$. Аналогично, $EL^2 - FL^2 = (AB^2 - 2CH\cdot AB)/16$. Таким образом, $LK \perp EF$, если и только если $(AB^2 - 2CH\cdot AB)/16 = -(AB^2 - 2CH\cdot AB)/16$, т.е. $AB = 2CH$.

Второе решение. Введём на плоскости комплексные координаты так, что точка C — начало координат, точка H имеет вещественную координату $h > 0$, точки A и B — координаты $a = h + xi$ и $b = h + yi$, где $x, y \in \mathbb{R}$, и треугольник ABC положительно ориентирован. Выпишем координаты середин отрезков: $A_1(\frac{b}{2})$, $B_1(\frac{a}{2})$, $E(\frac{a}{2}+\frac{b}{4})$ и $F(\frac{b}{2}+\frac{a}{4})$. Так как точка K получается в результате поворота на 90° в положительном направлении точки A вокруг E, то K имеет координату $\frac{a}{2}+\frac{b}{4}+i\cdot(a-(\frac{a}{2}+\frac{b}{4})) = \frac{a}{2}+\frac{b}{4}+i(\frac{a}{2}-\frac{b}{4})$. Аналогично, точка L имеет координату $\frac{b}{2}+\frac{a}{4}-i\cdot(b-(\frac{b}{2}+\frac{a}{4})) = \frac{b}{2}+\frac{a}{4}-i(\frac{b}{2}-\frac{a}{4})$. Тогда вектор $\overrightarrow{KL}$ имеет координату $\frac{a-b}{4}+i\frac{a+b}{4}$. Перпендикулярность прямых KL и AB равносильна перпендикулярности векторов $4\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{BA}$, которым соответствуют числа $(a-b)+i(a+b)$ и $(a-b)$. Это утверждение равносильно тому, что их отношение $\dfrac{(a-b)+i(a+b)}{(a-b)} = 1+i\dfrac{a+b}{a-b}$ — чисто мнимое число. В наших обозначениях $1+i\dfrac{a+b}{a-b} = 1+i\dfrac{2h+ix+y}{i(x-y)} = 1+\dfrac{2h}{(x-y)}+i\dfrac{x+y}{x-y}$. Это число является чисто мнимым тогда и только тогда, когда его вещественная часть равна нулю, т. е. $1+\dfrac{2h}{x-y}=0$, что равносильно $2h = y-x$. Осталось заметить, что $h = CH$, а $y - x = AB$ (с учётом ориентации и неравенства $h > 0$), и требуемое утверждение доказано.

11.4. Ответ: да, существует.

Укажем способ построения требуемой последовательности. Выберем $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ и предположим, что уже определены члены $a_1, \ldots, a_{n-1}$, где $n \geqslant 3$. Через a обозначим произведение $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}$, а через b обозначим наименьшее натуральное число, не встречающееся среди уже выбранных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Положим $a_{n+1} = b$ и $a_n = a^{n^2+n-1}b^n$, очевидно, что a_n больше всех $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ и a_{n+1}, т. е. числа не повторяются и первое условие выполнено. При этом, $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = (a^{n+1}b)^n$ и $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n+1} = (a^n b)^{n+1}$ — и второе условие выполнено.

LXX Белорусская математическая олимпиада школьников
III этап
13 – 17 января, 2020 год

8 класс

5. Агрохозяйство имеет два засеянных пшеницей поля одинаковой площади. В агрохозяйстве есть комбайны двух классов: A и B. У всех комбайнов одного класса производительность одинаковая. Одновременно 5 комбайнов класса A приступили к уборке урожая с первого поля, а 5 комбайнов класса B — со второго поля. Когда была убрана четверть первого поля, с него 2 комбайна класса A были переброшены на уборку второго поля. А когда было убрано три четверти второго поля, с него 3 комбайна класса B были переброшен на уборку первого поля. В результате, уборка урожая с этих полей закончилась одновременно.

Как относятся производительности комбайнов класса A и класса B?

Ответ: $7:4$.

6. Найдите все целые числа m и n, удовлетворяющие системе уравнений $m^2-5n+mn=101$ и $n^2+m+mn=79$.

Ответ: $(m;n)=(9;5)$.

7. На сторонах AB и CD квадрата $ABCD$ во внутреннюю сторону построены равносторонние треугольники ABF и DEC. Отрезки AF и DE пересекаются в точке X, а BF и CE пересекаются в точке Y.

а) Докажите, что описанная окружность треугольника XFY касается сторон треугольника DEC в точках X и Y.

б) Докажите, что окружность окружность с центром F и радиусом FX касается описанной окружности треугольника DEC.

8. Каждая клетка таблицы 8×9 покрашена в один из двух цветов — красный или зелёный. При этом во всех восьми строках таблицы количества красных клеток различны, а во всех девяти столбцах количества зелёных клеток одинаковы.

Возможна ли такая раскраска? Если да, то найдите все возможные значения количества зелёных клеток в таблице.

Ответ: Да, возможна и в ней обязательно 36 зелёных клеток.

LXX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

13 – 17 января, 2020 год

9 класс

5. Существует ли функция $f(x)$, определённая на множестве всех вещественных чисел и принимающая вещественные значения такая, что для всех $x, y \in \mathbb{R}$ верно неравенство

$$f(x+y) \geqslant \frac{1}{2}f(x) + |y|?$$

Ответ: такой функции не существует.

6. Даны 10 составных натуральных чисел, любые два из которых взаимно просты.

Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из них.

Ответ: $29^2 = 841$.

7. На окружности в указанном порядке отмечены точки A, B, C, D, E и F, при этом точки B и E — середины дуг AC и DF соответственно. Отрезки AE и FB пересекаются в точке K, а CE и DB — в точке L.

Докажите, что $S_{AKB} \cdot S_{DLE} = S_{FKE} \cdot S_{CLB}$, где через S_{XYZ} обозначена площадь треугольника XYZ.

8. В стране 2020 городов, соединённых сетью дорог. Для каждого города рассмотрели все отличные от него города, в которые можно попасть из данного, перемещаясь по дорогам страны, и выписали на доску их количество.

Докажите, что одно из чисел на доске повторяется не менее 45 раз.

LXX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

13 – 17 января, 2020 год

10 класс

5. Даны 20 различных натуральных чисел. Известно, что наибольший общий делитель любых двух из них не превосходит 4.

Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из данных чисел.

Ответ: 47.

6. Биссектрисы AA_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке I. Описанные окружности треугольников AIC_1 и CIA_1 пересекаются в точке J отличной от I. Отрезки AI и C_1J пересекаются в точке X, а отрезки CI и A_1J — в точке Y. Наконец, прямая XY пересекает стороны BA и BC в точках D и E соответственно.

Докажите, что треугольник BDE равнобедренный.

7. Существует ли функция $f(x)$, определённая на множестве всех вещественных чисел и принимающая в качестве своих значений все вещественные числа такая, что для всех $x \in \mathbb{R}$ верно равенство

$$f(f(x)) = |x|f(x) + 2?$$

Ответ: такой функции не существует.

8. В стране 2020 городов, соединённых сетью дорог. Для каждого города рассмотрели все отличные от него города, в которые можно попасть из данного перемещаясь по дорогам страны, и выписали на доску их количество.

Найдите наибольшее число n такое, что на доске обязательно найдётся число, записанное не менее n раз.

Ответ: $n = 50$.

LXX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

13 – 17 января, 2020 год

11 класс

5. Даны 25 различных натуральных чисел, не превосходящих 50. Для каждый пары данных чисел выписали в тетрадку их наибольший общий делитель.

Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из выписанных чисел.

Ответ: 7.

6. Вписанная окружность тупоугольного треугольника ABC (с тупым углом при вершине A) касается его сторон AB, BC и AC в точках K, L и M соответственно. Прямая KL пересекает продолжение стороны AC за точку A в точке P. Прямая BM пересекает вписанную окружность второй раз в точке T. Отрезки AB и PT пересекаются в точке R.

Найдите периметр треугольника APR, если $PM = 1$.

Ответ: 2.

7. В стране 2020 городов, соединённых сетью дорог. Для каждого города рассмотрели все возможные круговые маршруты, которые начинаются и заканчиваются в нём, и выписали на доску наибольший общий делитель длин таких маршрутов (длина маршрута равна количеству дорог, из которых он состоит; маршрут может проходит через один и тот же город несколько раз).

Докажите, что одно из чисел на доске повторяется не менее 45 раз.

8. Четыре (не обязательно различных) вещественных числа a, b, c, d удовлетворяют следующим трём условиям: $a+b+c+d = 4$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} = 1$ и $abcd + 16 = ab + ac + ad + bc + bd + cd \geqslant 0$.

Докажите, что среди этих чисел есть равное 2.

8 класс

8.5. Ответ: $7:4$.

Пусть площадь каждого поля равна S, производительность комбайна класса A равна a, а производительность комбайна класса B — b. Тогда последнюю четверть второго поля уберут за время $t = \dfrac{S}{4(2a+2b)}$. Обозначим через X площадь той части первого поля, которую требуется убрать после передачи трёх комбайнов класса B со второго поля. Тогда $t = \dfrac{X}{3a+3b}$, следовательно, $X = \dfrac{3}{8}S$. Значит, после передачи двух комбайнов класса A с первого поля на второе и до передачи трёх комбайнов со второго поля на первое, на первом поле была убрана площадь, равная $\dfrac{5}{8}S - \dfrac{1}{4}S = \dfrac{3}{8}S$. На уборку этой площади на первом поле было затрачено время $t_1 = \dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{S}{3a}$. Пока пять комбайнов класса A убирали $\dfrac{1}{4}S$ первого поля, пять комбайнов класса B на втором поле убрали $\dfrac{S}{4}\cdot\dfrac{5b}{5a} = \dfrac{S}{4}\cdot\dfrac{b}{a}$ площади второго поля. Поэтому после передачи двух комбайнов класса A с первого поля на второе и до передачи трёх комбайнов со второго поля на первое, на втором поле было убрано $\dfrac{3}{4}S - \dfrac{S}{4}\cdot\dfrac{b}{a} = \dfrac{S}{4}\cdot\dfrac{3a-b}{a}$ площади второго поля, и на это на втором поле понадобилось время, равное $\dfrac{\frac{1}{4}S\cdot(3a-b)}{a(5b+2a)}$.

Таким образом,

$$\frac{\frac{1}{4}S\cdot(3a-b)}{a(5b+2a)} = t_1 = \frac{3}{8}\cdot\frac{S}{3a} \implies 6a-2b = 5b+2a \implies 4a = 7b,$$

откуда $\dfrac{a}{b} = \dfrac{7}{4}$.

8.6. Ответ: $(m;n) = (9;5)$.

Выразим переменную n из равенства $m^2 - 5n + mn = 101$:

$$n = \frac{101-m^2}{m-5} = \frac{76+(25-m^2)}{m-5} = \frac{76}{m-5} - m - 5. \qquad (1)$$

Аналогично, из равенства $n^2 + m + mn = 79$ получаем, что

$$m = \frac{79-n^2}{n+1} = \frac{78+(1-n^2)}{n+1} = \frac{78}{n+1} + (1-n). \qquad (2)$$

Из равенства (2) следует, что $n+1$ делит число 78. Значит, с учётом (1), 78 делится на $n+1 = \dfrac{76}{m-5} - m - 4 = \dfrac{76}{m-5} - (m-5) - 9$. Таким образом, пара $\left(\dfrac{76}{m-5}, m-5\right)$

является парой (d_1, d_2) делителей числа 76 таких, что $d_1 d_2 = 76$ и $d_1 - d_2 - 9$ является делителем 78.

Все целые делители числа 76 — это $\pm1, \pm2, \pm4, \pm19, \pm38, \pm76$. Значит, разность $d_1 - d_2$ может принимать значения $\pm75, \pm36, \pm15$. Из этих шести вариантов только в одном случае число $d_1 - d_2 - 9$ делит 78 — при $d_1 - d_2 = 15$. Тогда $n + 1 = 15 - 9 = 6$, следовательно, $n = 5$ и из равенства (2) находим $m = \dfrac{79 - 25}{6} = 9$. Таким образом, пара $(m; n) = (9; 5)$ является единственным решением данной системы.

8.7. а) Из симметрии конструкции понятно, что четырёхугольник $EYFX$ — ромб. Так как углы при вершинах E и F равны 60°, то треугольники EXY и FXY равносторонние. Следовательно, $\angle FXY = 60° = \angle XFY = \angle FYC$, что по свойству угла между касательной и хордой значит, что CE касается описанной окружности треугольника FXY в точке Y.

б) Обозначим длину стороны квадрата $ABCD$ через a. Пусть точка H диаметрально противоположна точке E в описанной окружности треугольника CDE. Из симметрии конструкции понятно, что точка F лежит на диаметре EH, следовательно, достаточно доказать равенство $EH = EF + FX$. Так как EH — диаметр окружности, описанной около равностороннего треугольника со стороной a, то $EH = \dfrac{2}{\sqrt{3}}a$. Отрезок EF равен удвоенной высоте равностороннего треугольника со стороной FX, следовательно, $EF = \sqrt{3}FX$.

Таким образом, для решения задачи необходимо доказать, что $\dfrac{2}{\sqrt{3}}a = (\sqrt{3}+1)FX$, т. е. $FX = \dfrac{2}{3+\sqrt{3}}a = \dfrac{3-\sqrt{3}}{3}a$. Проведём высоту XQ в треугольнике AXD, тогда, с одной стороны $AQ = 0{,}5a$, а с другой, $AQ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AX = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(a - FX)$. Следовательно, $a = \sqrt{3}(a - FX)$, откуда получаем требуемое равенство $FX = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}a = \dfrac{3-\sqrt{3}}{3}a$.

8.8. Ответ: Да, возможна и в ней обязательно 36 зелёных клеток.

Пусть при описанной раскраске в каждом столбце находится x зелёных клеток.

К	К	К	К					
К	К	К						
К	К							
К								
				К	К	К	К	К
			К	К	К	К	К	К
		К	К	К	К	К	К	К
	К	К	К	К	К	К	К	К

Тогда общее количество красных клеток в таблице равно $72 - 9x$. Так как во всех восьми строках находится различное количество красных клеток, то $72 - 9x$ заключено между $0 + 1 + \ldots + 7 = 28$ и $9 + 8 + \ldots + 2 = 44$. Заметим, что $72 - 9x$ делится на 9, а между 28 и 44 только число 36 кратно 9. Следовательно, если описанная раскраска возможна, то в ней обязательно 36 зелёных клеток.

На рисунке сверху приведён пример раскраски, удовлетворяющей условию. Буквой „К" отмечены красные клетки, а зелёные клетки остались пустыми. Нетрудно видеть, что в каждом столбце стоит по 4 пустые (зелёные) клетки и всех строках буквой „К" отмечено разное количество клеток.

9 класс

9.5. Ответ: такой функции не существует.

Выберем произвольные вещественные числа a и b и запишем неравенство из условия для пар чисел $x = a - b$, $y = b$ и $x = a$, $y = -b$:

$$\begin{cases} f(a) \geqslant \dfrac{1}{2}f(a-b) + |b|; \\ f(a-b) \geqslant \dfrac{1}{2}f(a) + |-b|. \end{cases}$$

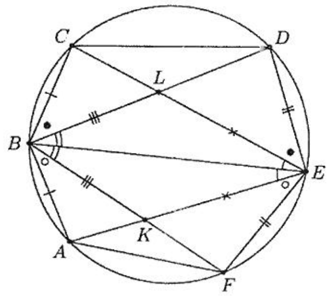
Умножим первое неравенство на 4, второе — на 2 и сложим их, в результате получим неравенство $4f(a)+2f(a-b) \geqslant 2f(a-b)+f(a)+6|b|$, что равносильно $f(a) \geqslant 2|b|$. Так как числа a и b мы выбирали произвольными, то это неравенство означает, что значение $f(a)$ функци f в любой точке a больше, чем любое неотрицательное вещественное число b, что, конечно, невозможно. Следовательно, такой функции не существует.

9.6. Ответ: $29^2 = 841$.

Обозначим данные числа через $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ и выделим в каждом из них наименьший простой делитель p_i. Поскольку все данные числа составные, то при всех i от 1 до 10 можно записать $a_i = p_i \cdot b_i$, где $b_i \geqslant p_i$. Так данные числа попарно взаимно просты, то все p_i попарно различны. Выпишем первые 10 чисел по возрастанию: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$. Следовательно, найдётся $p_i \geqslant 29$, а соответствующее ему $a_i = p_i \cdot b_i \geqslant p_i^2 \geqslant 29^2 = 841$. Значит, наибольшее из данных чисел не меньше 841.

С другой стороны, числа $2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2$ удовлетворяют условию и наибольшее из них равно 841, следовательно, наименьшее возможное значение наибольшего из данных чисел, действительно, равно 841.

9.7. Так как точки B и E — середины дуг AC и DF соответственно, то $BC = BA$, $\angle BEC = \angle BEA$, $ED = EF$ и $\angle EBD = \angle EBF$. Треугольники BLE и BKE равны по двум углам и общей стороне BE, а значит, $BL = BK$ и $EL = EK$. Так как вписанные углы $\angle ABF$ и $\angle FEA$ опираются на одну и ту же дугу AF, то $\angle ABF = \angle FEA$. Аналогично, $\angle CBD = \angle DEC$. Согласно формуле площади треугольника справедливы равенства



$$S_{AKB} = \frac{1}{2}AB \cdot BK \sin\angle ABF, \quad S_{DLE} = \frac{1}{2}DE \cdot EL \sin\angle DEL,$$
$$S_{FKE} = \frac{1}{2}FE \cdot EK \sin\angle FEA, \quad S_{CLB} = \frac{1}{2}CB \cdot BL \sin\angle CBD.$$

Следовательно, $S_{AKB} \cdot S_{DLE} = S_{FKE} \cdot S_{CLB}$.

9.8. Разобьём множество всех городов на группы, так что для любых двух городов из одной группы существует связывающий эти города путь, проходящий по дорогам страны, а для любой пары городов из разных групп такого пути нет. Обозначим группы через G_1, G_2, $\ldots$, G_m, а через n_1, n_2, $\ldots$, n_m — количество городов в них соответственно. Несложно видеть, что $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = 2020$ и для произвольного города, принадлежащего некоторой группе G_i, на доску выписано число $n_i - 1$. Докажем несколько более общее утверждение, а именно, что если для каждого произвольного города выписано на доску неотрицательное число, при этом для любых двух городов из одной группы выписанные числа равны и не превосходят размер группы, то одно из чисел на доске повторяется не менее 45 раз. Предположим противное. Тогда, очевидно, $n_i \leqslant 44$ для всех i от 1 до m, а значит, на доску выписаны числа от 0 до 44. Так как всего на доску выписано 2020 чисел и $2020/45 > 44$, то согласно принципу Дирихле некоторое из них встретится не менее 45 раз.

10 класс

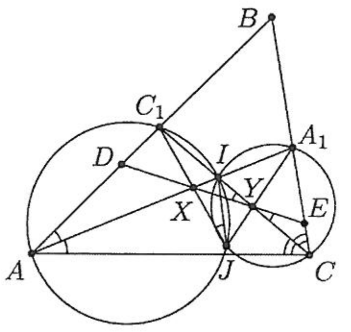
10.5. Ответ: 47.

В каждом из чисел, которые имеют простые делители, бóльшие трёх, выделим по одному такому простому делителю. Поскольку наибольший общий делитель любых двух данных чисел не превосходит 4, то все выделенные простые делители различны. Заменим соответствующим выделенным простым делителем все числа, в которых они нашлись. При этом условие не нарушится и все числа не увеличатся, в том числе, наибольшее из них, поэтому полученные после замены числа тоже будем называть данными.

Оставшиеся числа имеют вид $2^a \cdot 3^b$, где a и b — неотрицательные целые числа. Очевидно, что можно считать, что среди данных чисел присутствуют 1, 2, 3 и 4, поскольку любым из них можно заменить произвольное большее число. Кроме них может быть не более одного числа, в котором выполняется по крайней мере одно из условий: $a \geqslant 3$, $b \geqslant 2$ и $a, b \geqslant 1$. С другой стороны, по одному такому числу можно добавить к набору, например, 8, 9 и 6.

Следовательно, среди данных чисел не более семи имеют вид $2^a \cdot 3^b$, а остальные числа — простые. Поэтому наибольшее из них не может быть меньше пятнадцатого по возрастанию простого числа 47. С другой стороны, взяв числа $1, 4, 6, 8, 9$ и пятнадцать первых по возрастанию простых чисел, мы получим набор, удовлетворяющий условию, в котором наибольшее число равно 47.

10.6. Докажем равенство $\angle BDE = \angle DEB$, из которого, в частности, следует утверждение задачи. Обозначим углы: $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$.



Так как углы, опирающиеся на равные дуги, равны, то $\angle C_1JI = \angle C_1AI = \dfrac{\alpha}{2}$ и $\angle A_1JI = \angle A_1CI = \dfrac{\gamma}{2}$. Следовательно, $\angle XJY = \dfrac{\alpha+\gamma}{2} = 90° - \dfrac{\beta}{2}$. Как хорошо известно, $\angle AIC = 90° + \dfrac{\beta}{2}$ (т. к. $\angle AIC = 180° - \angle IAC - \angle ICA$). Поэтому, $\angle XIY + \angle XJY = 180°$, а значит, точки X, I, Y и J лежат на одной окружности. Следовательно, $\angle DXA = \angle IXY = \angle IJY = \dfrac{\gamma}{2}$. Таким образом, верно равенство $\angle BDE = \angle DAX + \angle DXA = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$. Аналогично, $\angle DEB = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$.

10.7. Ответ: такой функции не существует.

Предположим, что такая функция $f(x)$ существует. Поскольку она принимает в качестве своих значений все вещественные числа, то найдётся число $a \in \mathbb{R}$ такое, что $f(a) = 0$. Подставив $x = a$ в равенство из условия, получим, что $f(0) = 2$. Для $x = 0$ равенство из условия даёт $f(2) = 2$. Наконец, подставив $x = 2$, получим неверное равенство $2 = 6$. Следовательно, искомой функции не существует.

10.8. Ответ: $k = 50$.

Покажем, что по крайней мере одно число записано на доске не менее 50 раз. Разобьём множество всех городов на группы, так что для любых двух городов из одной группы существует связывающий эти города путь, проходящий по дорогам страны, а для любой пары городов из разных групп такого пути нет. Обозначим группы через $G_1, G_2, \ldots, G_m$, а через $n_1, n_2, \ldots, n_m$ — количество городов в них соответственно. Нетрудно видеть, что $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = 2020$ и для произвольного города, принадлежащего некоторой группе G_i, на доску выписано число $n_i - 1$. Предположим, что, все числа, записанные на доске, встречаются не более 49 раз и придём к противоречию. Тогда $n_i \leqslant 49$ для всех i от 1 до m, и, значит, все числа, записанные на доске, не превосходят 48.

Рассмотрим произвольное число ℓ от 0 до 48. Оно записано на доске $(\ell+1)s$ раз, где s — количество групп из $\ell+1$ городов. Число $(\ell+1)s$ кратно $(\ell+1)$ и не превосходит 49, следовательно, его наибольшее возможное значение равно $49 - r_{\ell+1}(49)$, где через $r_a(b)$ обозначен остаток числа b при делении на a. Таким образом, наибольшее возможное количество записанных чисел равно

$$49 - r_1(49) + 49 - r_2(49) + \ldots + 49 - r_{49}(49) = 49 \cdot 49 - (r_1(49) + r_2(49) + \ldots + r_{49}(49)).$$

Найдём сумму остатков $S_{49} = r_1(49) + r_2(49) + \ldots + r_{49}(49)$. Для всех чисел ℓ от 25 до 49 неполное частное от деления 49 на ℓ равно 1, следовательно, $r_\ell(49) = 49 - \ell$. Значит,

$$r_{25}(49) + r_{26}(49) + \ldots + r_{49}(49) = 24 + 23 + \ldots + 1 + 0 = \frac{24 \cdot 25}{2} = 300.$$

Для всех чисел ℓ от 17 до 24 неполное частное от деления 49 на ℓ равно 2, следовательно, $r_\ell(49) = 49 - 2\ell$. Значит,

$$r_{17}(49) + r_{18}(49) + \ldots + r_{24}(49) = 15 + 13 + \ldots + 1 = \frac{8 \cdot 16}{2} = 64.$$

Аналогично находятся

$$r_{13}(49) + r_{14}(49) + r_{15}(49) + r_{16}(49) = 10 + 7 + 4 + 1 = 22 \text{ и}$$
$$r_{10}(49) + r_{11}(49) + r_{12}(49) = 9 + 5 + 1 = 15.$$

Очевидно, что $r_1(49) = r_7(49) = 0$, $r_5(49) = r_9(49) = 4$, а для делителей 48, т.е. $\ell = 2, 3, 4, 6, 8$, верно $r_\ell(49) = 1$. Таким образом, $S_{49} = 300 + 64 + 22 + 15 + 5 + 8 = 414$ и наибольшее возможное количество выписанных чисел равно $49 \cdot 49 - 414 = 1987 < 2020$ — противоречие.

Покажем, что возможна ситуация, в которой все числа встречаются на доске не более 50 раз. Для каждого ℓ от 1 до 49 составим $\dfrac{50 - r_\ell(50)}{\ell}$ групп по ℓ городов. Между любыми двумя городами из одной группы построим дорогу, а дорог между городами из разных групп проводить не будем. При этом, каждое значение $\ell - 1$

от 0 до 48 будет записано на доску для всех городов групп с ℓ городами, т. е. всего $\ell \cdot \dfrac{50 - r_\ell(50)}{\ell} = 50 - r_\ell(50) \leqslant 50$ раз.

Найдём количество городов в описанной конструкции. Воспользуемся уже проведёнными вычислениями в доказательстве неравенства $k > 49$: в той конструкции было 1987 городов. В нашем случае для всех делителей 50, меньших 50, добавилась одна группа, т. е. стало $1987 + 1 + 2 + 5 + 10 + 25 = 2030$ городов. Чтобы получить требуемый пример удалим одну группу, состоящую из 10 городов.

11 класс

11.5. Ответ: 7.

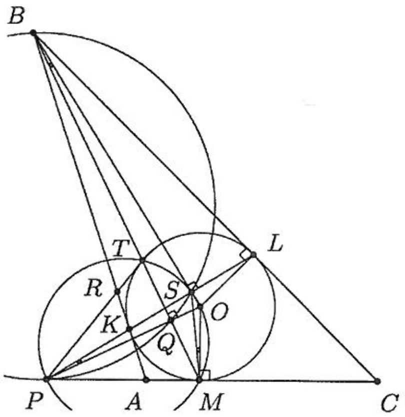
Предположим, что все выписанные числа меньше 7. Рассмотрим девять групп:
1) $(7, 14, 21, 28, 35, 42, 49)$ — 7 чисел; 2) $(8, 16, 24, 32, 40, 48)$ — 6 чисел;
3) $(9, 18, 27, 36, 45)$ — 5 чисел; 4) $(10, 20, 30, 50)$ — 4 числа; 5) $(11, 22, 33, 44)$ — 4 числа;
6) $(13, 26, 39)$ — 3 числа; 7) $(17, 34)$ — 2 числа; 8) $(19, 38)$ — 2 числа; 9) $(23, 46)$ — 2 числа.

Наибольший общий делитель любых двух чисел из одной группы не меньше 7, следовательно из каждой группы могло быть дано не больше одного числа. В указанные группы входит $7+6+5+4+4+3+2+2+2 = 35$ различных чисел, значит, количество данных чисел не превосходит $9 + (50 - 35) = 24$, что противоречит условию.

Таким образом, наибольшее из выписанных чисел не меньше 7. С другой стороны, оно может быть равно 7. Например, можно выбрать любые 25 из следующих 28 чисел: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47, 49$.

11.6. Ответ: 2.

Пусть O — центр вписанной окружности, S — точка пересечения KL и BO, Q — точка пересечения PO и BM. Так как SL — высота прямоугольного треугольника OBL, то $OS \cdot BO = OL^2$. Поскольку $OM = OL$, то $SO : OM = OM : BO$ и, так как угол BOM равен углу MOS, то треугольники SOM и MOB подобны. Поэтому $\angle OMS = \angle OBM$. Так как $OM \perp PM$ и $OS \perp PS$, то точки P, S, O и M лежат на одной окружности. Значит, $\angle OPS = \angle OMS = \angle OBM$. Следовательно, точки B, P, S и Q также лежат на одной окружности и $\angle PQB = \angle PSB = 90°$. Значит, хорда TM перпендикулярна прямой PO и, так как PM — касательная к вписанной окружности треугольника ABC, то PT — тоже касательная к этой окружности.



Таким образом, вписанная окружность треугольника ABC является вневписанной для треугольника APR и его периметр $P(APR)$ равен удвоенной длине отрезка, соединяющего противолежащую вершину P в точкой касания M, т. е. $P(APR) = 2PM = 2$.

Хотя последнее равенство хорошо известно, для полноты изложения приведём его доказательство. Из равенств $KR = RT$, $AK = AM$, $PT = PM$ касательных следует, что для периметра $P(APR)$ треугольника APR выполнено равенство

$$P(APR) = PA + AR + RP = PA + AK + KR + RP = PA + AM + RT + RP =$$

$$= PM + PT = 2PM = 2.$$

11.7. Разобьём множество всех городов на группы, так что для любых двух городов из одной группы существует связывающий эти города путь, проходящий по дорогам страны, а для любой пары городов из разных групп такого пути нет. Обозначим группы через $G_1, G_2, \ldots, G_m$, а через $n_1, n_2, \ldots, n_m$ — количество городов в них соответственно.

Докажем, что для любых двух городов из одной группы выписанные числа равны и не превосходят размер группы. Выберем произвольные два города A и B, принадлежащие одной группе G_i. Через $U_A = \{a_1 < a_2 < a_3 < \ldots\}$ обозначим множество длин круговых маршрутов, которые начинаются и заканчиваются в городе A. Аналогично определим множество $U_B = \{b_1 < b_2 < b_3 < \ldots\}$. Пусть d_A и d_B — НОД элементов множеств U_A и U_B соответственно. Наконец, через c обозначим длину какого-либо пути, соединяющего города A и B. Тогда очевидно, что $2c \in U_B$ и $2c + a_j \in U_B$ для любого $a_j \in A$, а значит, $d_A \vdots d_B$. Аналогично, $d_B \vdots d_A$, т.е. $d_A = d_B$. Так как $a_1 \leqslant n_i$, то $d_A \leqslant n_i$.

Следуя решению задачи **9.8**, получаем, что по крайней мере одно из чисел, выписанных на доске, повторяется не менее 45 раз.

11.8. Докажем, что эти числа образуют в некотором порядке набор $(2, 2, 2, -2)$.

Введём стандартные обозначения для основных симметрических многочленов: $a + b + c + d = \sigma_1$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = \sigma_2$, $abc + abd + acd + bcd = \sigma_3$ и $abcd = \sigma_4$. В этих обозначениях условие задачи записывается как $\sigma_1 = 4$, $\sigma_3 = \sigma_4$, $\sigma_4 + 16 = \sigma_2 \geqslant 0$. Числа a, b, c, d — четвёрка корней (с учётом кратности) многочлена

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = x^4 - 4x^3 + (\sigma_4 + 16)x^2 - \sigma_4 x + \sigma_4 = \\ &= x^4 - 4x^3 + 16x^2 + \sigma_4(x^2 - x + 1) = (x-2)^3(x+2) + (\sigma_4 + 16)(x^2 - x + 1). \end{aligned} \tag{1}$$

Сделаем замену $x = y + 2$, тогда числа $a' = a - 2$, $b' = b - 2$, $c' = c - 2$ и $d' = d - 2$ будут образовывать четвёрку корней многочлена

$$g(y) = y^4 + 4y^3 + (\sigma_4 + 16)(y^2 + 3y + 3).$$

(Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ связаны равенством $g(x) = f(x + 2)$.)

Число $\sigma_4 + 16$ по условию неотрицательно, обозначим его через t. Очевидно, что многочлен $g(y) = y^4 + 4y^3 + ty^2 + 3ty + 3t$ не имеет положительных корней. Если $t > 0$, то все его корни отрицательны и для них верны равенства $a' + b' + c' + d' = -4$ и $\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'} + \frac{1}{d'} = \frac{-3t}{3t} = -1$. Так как $x + \frac{1}{x} \leqslant -2$ для любого отрицательного числа x, то

$$-5 = a' + b' + c' + d' + \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'} + \frac{1}{d'} \leqslant -8,$$

что неверно, следовательно, $t = 0$.

Значит, равенство (1) имеет вид $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = (x-2)^3(x+2)$ и числа a, b, c, d образуют в некотором порядке набор $(2, 2, 2, -2)$.