LXXI Белорусская математическая олимпиада школьников

8 класс

1. Действительные числа x, y и z удовлетворяют двойному равенству $(x-3)(y+3)=(y-3)(z+3)=-12$.

Найдите все возможные значения выражения $(x-1)(z+1)$.

Ответ: -4.

2. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ отметили точки K и L соответственно так, что $KL \parallel BC$. При этом оказалось, что $DK \parallel LB$. Известны длины оснований трапеции: $AD=49$ и $BC=9$.

Найдите длину отрезка KL.

Ответ: $KL=21$.

3. В каждой чёрной клетке шахматной доски сидит жук. Через каждую секунду каждый жук переползает в соседнюю по вершине (но не по стороне) клетку. В одной клетке могут находиться несколько жуков.

Какое наибольшее число жуков может через некоторое время оказаться в одной клетке?

Ответ: 16.

4. На столе лежат 2020 фишек. За один ход разрешается выбрать две или три группы с одинаковым количеством фишек в них и объединить выбранные группы в одну (вначале есть 2020 групп по одной фишке).

Какое наименьшее количество групп можно получить, сделав несколько ходов?

Ответ: 3.

LXXI Белорусская математическая олимпиада школьников

9 класс

1. В первой четверти координатной плоскости нарисован график функции $y = \dfrac{2}{x}$. На нём отмечены точки B_1, B_2 и B_3, сумма абсцисс которых равна 20, а сумма ординат равна 21. Точка A имеет координаты $(2;2)$.

Найдите сумму $AB_1 + AB_2 + AB_3$.

Ответ: 35.

2. Решите уравнение в действительных числах:

$$[x]\{x\} + 2x = \{x\} + 9.$$

(Здесь через $[x]$ обозначена целая часть числа x, а через $\{x\}$ — его дробная часть; $\{x\} = x - [x]$.)

Ответ: 3,75; 4,2.

3. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ отметили точки K и L соответственно так, что $KL \parallel AD$. Известно, что $AD = 9$, $BC = 4$ и $KL = 6$. Отрезки BL и CK пересекаются в точке P, а отрезки AL и DK — в точке T.

Определите все возможные значения отношения, в котором отрезок KL может делить отрезок PT.

Ответ: $1:1$.

4. В футбольном турнире каждая команда сыграла с каждой ровно по одному разу. По окончании турнира выяснилось, что все команды набрали разные количества очков, а команда, занявшая последнее место, проиграла меньше матчей, чем команда-победитель турнира.

Какое наименьшее количество команд могло участвовать в турнире? (В футболе команда, выигравшая матч, получает три очка, проигравшая — нуль, а в случае ничьи обе команды получают по одному очку.)

Ответ: 6.

LXXI Белорусская математическая олимпиада школьников

11 класс

1. Окружность пересекает параболу $y = x^2$ в трёх точках: A, B и C, причём в точке C касательные к этим параболе и окружности совпали. Проекция отрезка AB на ось абсцисс равна 2.

Найдите величину угла ACB.

Ответ: 90°.

2. Найдите все натуральные числа a, b и c, для которых выполнено равенство

$$2^a + 2b^2 = 3^c + 67.$$

Ответ: $a = 2$, $b = 6$, $c = 2$.

3. На высоте AH остроугольного треугольника ABC выбрана точка X. Прямые BX и CX пересекают стороны AC и AB в точках B_1 и C_1, соответственно. Точка P — основание высоты, опущенной из вершины B на прямую HC_1, а точка Q — основание высоты, опущенной из вершины C на прямую HB_1.

Докажите, что описанная окружность треугольника PQH проходит через середину стороны BC.

4. В группе из 2020 человек каждый послал по одной открытке каждому своему знакомому из этой группы. Оказалось, что каждый человек получил не более трёх открыток и для каждого человека все его знакомые получили различные количества открыток.

Найдите максимально возможное количество посланных открыток.

Ответ: 4038.

LXXI Белорусская математическая олимпиада школьников

10 класс

1. На координатной плоскости нарисован график функции $y = \dfrac{2}{x}$. В первой четверти координатной плоскости на нём отмечены точки A_1, A_2, ..., A_{20}, а в третьей — C_1, C_2, ..., C_{21}. Известно, что сумма абсцисс точек $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$ равна модулю суммы ординат точек $C_1, C_2, \ldots, C_{21}$, а сумма ординат точек $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$ равна модулю суммы абсцисс точек $C_1, C_2, \ldots, C_{21}$. Точка B имеет координаты $(-2; -2)$.

Найдите разность

$$(BA_1 + BA_2 + \ldots + BA_{20}) - (BC_1 + BC_2 + \ldots + BC_{21}).$$

Ответ: 82.

2. Решите уравнение $8x^2 - 67 = 3^y - 2^z$ в натуральных числах x, y, z.

Ответ: $x = 3$, $y = z = 2$.

3. Саша и Влад играют в игру на координатной плоскости. Вначале Саша отмечает любые три целочисленные точки (т. е. точки, у которых обе координаты — целые числа). После этого ходит Влад. За ход Влад выбирает две из трёх имеющихся точек и поворачивает одну из них вокруг другой на 90° в произвольном направлении. Влад выиграет, если ему удастся за несколько ходов добиться того, что какие-то две из трёх точек совпадут. Если же Влад не сможет этого сделать, то побеждает Саша.

Кто из мальчиков имеет выигрышную стратегию, позволяющую ему выиграть независимо от действий другого?

Ответ: Влад.

4. Внутри равностороннего треугольника ABC отметили точку D так, что площадь треугольника ABC равна

$$\frac{\sqrt{3}}{8}(AD^2 + BD^2 + CD^2) + \frac{3}{4}AD \cdot BD.$$

Найдите угол ADB.

Ответ: 150°.

LXXI Белорусская математическая олимпиада школьников

8 класс

1. Решите уравнение $4k! + 1 = (2n! + 1)^2$ в натуральных числах k и n.

Ответ: $k = 2$, $n = 1$ или $k = 3$, $n = 2$.

2. На клетчатую доску размера 8×8 выкладывают без наложений уголки вида , образованные тремя клетками (уголок можно поворачивать на угол, кратный 90°, границы уголков идут по линиям сетки).

Какое наименьшее количество уголков необходимо разместить на доске, чтобы больше ни одного уголка выложить было невозможно?

Ответ: 11.

3. В параллелограмме $ABCD$ угол ADC тупой. Из точки A опустили перпендикуляр AH на прямую CD, а из точки C опустили перпендикуляр CE на прямую AD. Прямые AH и CE пересекаются в точке K.

Докажите, что прямые HE и BK перпендикулярны.

4. Назовём разбиение множества чисел $1, 2, \ldots, 3n$ на тройки (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), $\ldots$, (a_n, b_n, c_n) *хорошим*, если справедливы равенства

$$a_1 = b_1 + 2c_1 - 1, \quad a_2 = b_2 + 2c_2 - 1, \quad \ldots, \quad a_n = b_n + 2c_n - 1.$$

Найдите все хорошие разбиения, считая разбиения, которые отличаются лишь порядком следования троек, одинаковыми.

Ответ: Существует единственное хорошее разбиение, состоящее из троек $(2n + k, 2n - k + 1, k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

LXXI Белорусская математическая олимпиада школьников

9 класс

1. Центром тяжести многоугольника, нарисованного на координатной плоскости, называется точка, координаты которой равны среднему арифметическому соответствующих координат вершин многоугольника.

Можно ли на координатной плоскости нарисовать два одинаковых многоугольника, у которых нет общих точек, но совпадают центры тяжести?

Ответ: Да, можно.

2. Внутри прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C построили две окружности равного радиуса так, что они: касаются друг друга в точке Q, касаются гипотенузы AB, а также, одна из них касается катета AC, а другая — катета BC. На катете BC отметили точку P, для которой $\angle PAB = 45^\circ$.

Найдите угол между прямой PQ и гипотенузой AB.

Ответ: 90°.

3. Назовём разбиение множества чисел 2^0, 2^1, $\ldots$, 2^{3n-1} на тройки (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), $\ldots$, (a_n, b_n, c_n) *хорошим*, если каждый из квадратных трёхчленов

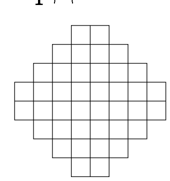
$$a_1^2x^2 + b_1x + c_1^4, \quad a_2^2x^2 + b_2x + c_2^4, \quad \ldots, \quad a_n^2x^2 + b_nx + c_n^4$$

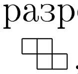
имеет хотя бы один действительный корень.

Найдите все хороших разбиения, считая разбиения, которые отличаются лишь порядком следования троек, одинаковыми.

Ответ: Существует единственное хорошее разбиение, состоящее из троек $(2^{2n-k}, 2^{2n+k-1}, 2^{k-1})$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

4. Ацтекским диамантом порядка n называется фигура на координатной плоскости, состоящая из единичных квадратов, центры которых удовлетворяют неравенству $|x| + |y| \leqslant n$. На рисунке справа изображён ацтекский диамант порядка 4.



Можно ли разрезать ацтекский диамант порядка 2020 на фигурки вида , состоящие из четырёх клеток. (Фигурки можно вращать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.)

Ответ: нет.

LXXI Белорусская математическая олимпиада школьников

11 класс

1. На доске записаны 20 различных натуральных чисел. Оказалось, что произведение любых трёх из них является полным кубом, а произведение любых семи является седьмой степенью некоторого натурального числа.

Найдите наименьшее возможное произведение всех 20 чисел.

Ответ: $(20!)^{21}$.

2. Витя выбрал $n \geqslant 3$ действительных чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n. Докажите, что Маша может у некоторых из выбранных чисел поменять знак на противоположный, получив новый набор b_1, b_2, $\ldots$, b_n, так что одновременно будут выполнены неравенства

$$b_1(b_n + b_2) \leqslant 0, \quad b_2(b_1 + b_3) \leqslant 0, \quad \ldots, \quad b_n(b_{n-1} + b_1) \leqslant 0.$$

3. Можно ли на сторонах равностороннего треугольника отметить пять отличных от вершин треугольника точек так, чтобы они являлись вершинами выпуклого пятиугольника, у которого все диагонали равны?

Ответ: нет.

4. На клетчатую доску размера 9×9 выкладывают без наложений уголки вида , образованные тремя клетками (уголок можно поворачивать на угол, кратный 90°, границы уголков идут по линиям сетки).

Какое наименьшее количество уголков необходимо разместить на доске, чтобы больше ни одного уголка выложить было невозможно?

Ответ: 14.

LXXI Белорусская математическая олимпиада школьников

10 класс

1. Решите уравнение $4 \cdot (a!)^2 = b! + 4 \cdot a!$ в натуральных числах a и b.

Ответ: $a = 3$, $b = 5$.

2. Дан острый угол и точка K внутри него. Найдите геометрическое место лежащих внутри этого угла точек L таких, что через точки K и L можно провести параллельные прямые, отсекающие от угла треугольники, площадь одного из которых в 2 раза больше площади другого.

Ответ: заштрихованное на рис. 1 множество, которому не принадлежат точки его границы, за исключением точек K_1 и K_2; точки K_1 и K_2 лежат на луче OK (O – вершина данного угла) и удовлетворяют соотношениям $OK_1 = \sqrt{2}OK$ и $OK = \sqrt{2}OK_2$, а участки границы заштрихованного множества лежат на прямых, параллельных соответствующим сторонам данного угла.

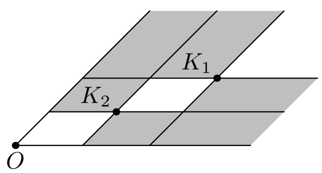


Рис. 1

3. Дан квадратный трёхчлен $p(x)$ со старшим коэффициентом, равным единице. Известно, что при некотором действительном a в ряду чисел

$$p\big(p(a)+a\big),\ \ p\big(p(a+1)+a+1\big),\ \ p\big(p(a+2)+a+2\big),\ \ \ldots,\ \ p\big(p(a+9)+a+9\big)$$

среди любых трёх подряд идущих есть нуль.

Найдите все возможные значения разности корней многочлена $p(x)$.

Ответ: 4.

4. На клетчатую доску размера 7×7 выкладывают без наложений уголки вида , образованные тремя клетками (уголок можно поворачивать на угол, кратный 90°, границы уголков идут по линиям сетки).

Какое наименьшее количество уголков необходимо разместить на доске, чтобы больше ни одного уголка выложить было невозможно?

Ответ: 8.