

8.1. Докажите, что для любого целого положительного n уравнения вида

$$x^2 - \text{НОД}(n, 7272) \cdot \text{НОК}(n, 7272) \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{7272} \right) x + 7272n = 0$$

имеют хотя бы один общий корень.

Решение. Применяя известную формулу $\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = ab$, преобразуем исходное уравнение:

$$x^2 - (7272 + n)x + 7272n = 0,$$

которое по обратной теореме Виета имеет корень 7272 для произвольного натурального n .

8.2. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что

$$\begin{aligned} n &= a_1 + a_2 + \dots + a_{2022}, \\ n &= b_1 + b_2 + \dots + b_{2022}, \end{aligned}$$

для некоторых натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2022}$ и $b_1, b_2, \dots, b_{2022}$, причем

$$\begin{aligned} a_1 &\geq a_2 \geq \dots \geq a_{2022}, \\ b_1 &\geq b_2 \geq \dots \geq b_{2022}, \\ a_1 &> b_1 \end{aligned}$$

и

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{2022} = b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_{2022}.$$

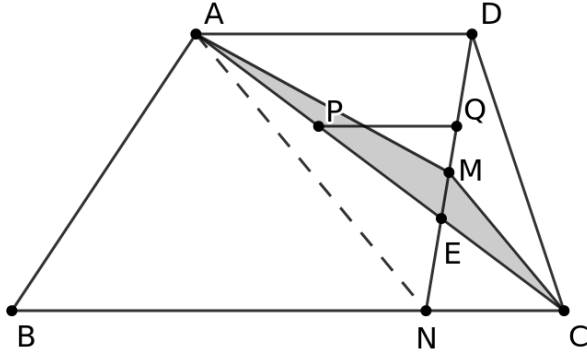
Решение. Для произвольного натурального m рассмотрим наборы $35m, 21m, 16m, m, \dots, m$ и $30m, 28m, 14m, m, \dots, m$, причем $35m > 30m$. Отметим, что произведения чисел в наборах равны, а также равны суммы чисел в каждом наборе:

$$\begin{aligned} 35m + 21m + 16m + m + \dots + m &= 30m + 28m + 14m + m + \dots + m, \\ a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{2022} &= 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^4 \cdot m^{2022} = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot m^{2022}, \\ b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_{2022} &= 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 7 \cdot m^{2022} = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot m^{2022}. \end{aligned}$$

8.3. В трапеции $ABCD$ длина основания BC в два раза больше длины основания AD . Точка N делит отрезок BC в отношении $3 : 1$, считая от точки B , а точка M – середина отрезка DN .

Найдите все возможные значения отношения $\frac{S_{ABND}}{S_{AMC}}$.

Ответ: 10.



Решение. Пусть DN пересекает AC в точке E , а P и Q – середины отрезков AE и DE соответственно. Тогда PQ – средняя линия треугольника AED , поэтому $AD = 2PQ$ и $AD \parallel PQ$. Из условия задачи следует, что $AD = 2NC$ и $AD \parallel NC$, следовательно, $PQ = NC$ и $PQ \parallel NC$, поэтому $NCQP$ – параллелограмм и $NE = EQ = QD$.

Так как M – середина DN , то $ME = MN - NE = \frac{1}{2}BC - \frac{1}{3}BC = \frac{1}{6}BC$, поэтому $S_{CME} = \frac{1}{6}S_{CDN}$ и $S_{AME} = \frac{1}{6}S_{ADN}$.

Пусть h – длина высоты трапеции $ABCD$, тогда

$$\frac{S_{CDN}}{S_{ABCD}} = \frac{NC \cdot h}{2} : \frac{(AD + BC)h}{2} = \frac{0,5AD}{3AD} = \frac{1}{6},$$

$$\frac{S_{ADN}}{S_{ABCD}} = \frac{AD \cdot h}{2} : \frac{(AD + BC)h}{2} = \frac{AD}{3AD} = \frac{1}{3},$$

откуда следует, что $S_{CME} = \frac{1}{36}S_{ABCD}$ и $S_{AME} = \frac{1}{18}S_{ABCD}$, поэтому

$$\frac{S_{AMC}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{CME}}{S_{ABCD}} + \frac{S_{AME}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{36} + \frac{1}{18} = \frac{1}{12}.$$

Так как $S_{ABND} = S_{ABCD} - S_{CDN} = \frac{5}{6}S_{ABCD}$, то искомое отношение площадей

$$\frac{S_{ABND}}{S_{AMC}} = \frac{5}{6} : \frac{1}{12} = 10.$$

8.4. Дана квадратная таблица, в каждой клетке которой записано целое число. Влад и Никита играют в игру, делая ходы поочередно. Первым ходит Никита. За один ход он выбирает столбец таблицы и поэлементно прибавляет к нему или вычитает из него любой другой столбец таблицы. Влад за один ход проделывает аналогичную операцию, только со строками. Влад выиграет, если после очередного хода кого-либо из игроков в таблице окажется строка или столбец, состоящий из нулей.

Может ли Влад добиться победы независимо от игры Никиты? Если да, то как он должен играть, если исходная таблица имеет вид

а)

1	3
2	4

 ?

б)

7	3
2	6

 ?

Ответ: а) нет; б) нет.

Решение. Заметим, что при вычитании или прибавлении одного столбца таблицы

a	b
c	d

к другому величина $A = ad - bc$ остается постоянной. Действительно, если, например, прибавить второй столбец к первому, получим таблицу

$a + b$	b
$c + d$	d

, для которой

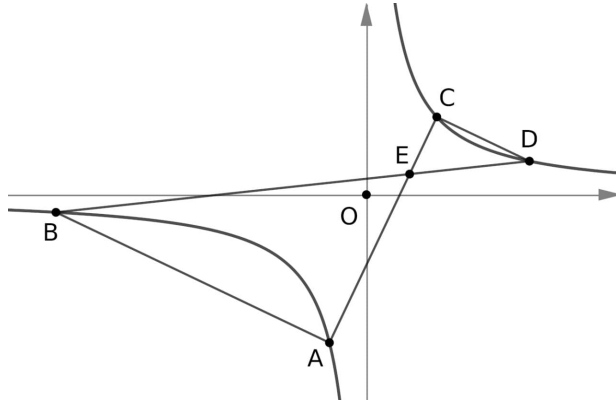
$$A = (a + b)d - b(c + d) = ad - bc,$$

то есть значение введенной выше величины не изменилось после преобразования. Аналогично можно показать, что сложение/вычитание строк не изменяет указанную величину.

Влад победит, если в результате преобразований получится таблица, у которой строка или столбец состоят из нулей. Заметим, что для такой таблицы $A = 0$, а в исходной таблице а) $A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$; б) $A = 7 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = -36$. Поэтому не получится получить таблицу с нулевой строкой или столбцом. Следовательно, Влад не сможет выиграть в обоих пунктах задачи.

9.1. На левой ветви гиперболы $y = \frac{1}{x}$ отмечены точка A , а на правой – точка C . Перпендикуляры, восстановленные к отрезку AC в точках A и C второй раз пересекают гиперболу в точках B и D соответственно. Пусть E – точка пересечения прямых AC и BD ; точка O – начало координат.

Докажите, что $k_{OE} + k_{AB} = 0$, где k_{OE} и k_{AB} – коэффициенты наклона прямых OE и AB соответственно.



Решение. Заметим, что если точки $A\left(a; \frac{1}{a}\right)$ и $B\left(b; \frac{1}{b}\right)$ принадлежат гиперболе $y = \frac{1}{x}$, то уравнение прямой AB имеет вид $y = -\frac{x}{ab} + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$. Аналогично для прямой, проходящей через точки $C\left(c; \frac{1}{c}\right)$ и $D\left(d; \frac{1}{d}\right)$:

$$y = -\frac{x}{cd} + \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right).$$

Найдем координаты точки $E(x_E; y_E)$:

$$-\frac{x_E}{ac} + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) = -\frac{x_E}{bd} + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d}\right),$$

$$x_E \cdot \frac{ac - bd}{abcd} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d} - \frac{1}{a} - \frac{1}{c}.$$

Прямые AB и CD параллельны, поэтому $ab = cd$, откуда $d = \frac{ab}{c}$. С учетом сказанного преобразуем последнее соотношение:

$$x_E \cdot \left(ac - \frac{b^2a}{c}\right) \cdot \frac{1}{a^2b^2} = \frac{ac + c^2 - bc - ab}{abc},$$

$$x_E \cdot \frac{a(c^2 - b^2)}{cab} = \frac{a(c - b) + c(c - b)}{c},$$

$$x_E \cdot \frac{(c - b)(c + b)}{b} = \frac{(a + c)(c - b)}{c},$$

$$x_E = \frac{b(a + c)}{b + c}.$$

Уравнение прямой, проходящей через точки M и N , будем обозначать $y = k_{MN}x + l_{MN}$. Найдем коэффициент наклона k_{OE} :

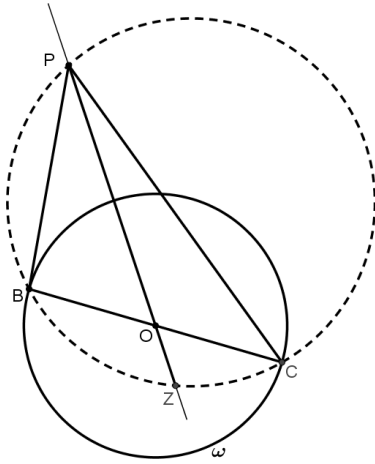
$$k_{OE} = \frac{y_E}{x_E} = \frac{k_{AC} \cdot x_E + l_{AC}}{x_E} = k_{AC} + \frac{l_{AC}}{x_E} = -\frac{1}{ac} + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) : \frac{b(a + c)}{b + c} =$$

$$= -\frac{1}{ac} + \frac{a + c}{ac} \cdot \frac{b + c}{b(a + c)} = -\frac{1}{ac} + \frac{b + c}{abc} = \frac{1}{ab} = -k_{AB},$$

что и требовалось доказать.

9.2. Дана окружность и точка P вне ее. Для каждого диаметра BC данной окружности (точки B , C и P не лежат на одной прямой) построена описанная окружность треугольника PBC .

Докажите, что независимо от выбора диаметра BC все эти описанные окружности проходят через две фиксированные точки плоскости.



Решение. Пусть O — центр окружности ω , R — длина ее радиуса и Z — точка пересечения прямой PO с окружностью, описанной вокруг треугольника PBC . Докажем, что Z — искомая вторая точка. ZP и BC — хорды окружности, описанной около $\triangle PBC$. По свойству хорд $OZ \cdot PO = OC \cdot OB$, то есть, $OZ = R^2 / PO$. Поскольку отрезок PO фиксирован, то есть, его положение не зависит от выбора диаметра BC , и точка Z расположена на его продолжении за точку O на фиксированном расстоянии от O (R также не зависит от выбора BC), то точка Z не зависит от выбора BC и при этом лежит на любой окружности, описанной вокруг $\triangle PBC$, что и требовалось.

9.3. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что

$$\begin{aligned}n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \\n &= b_1 + b_2 + b_3 + b_4,\end{aligned}$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 – некоторые натуральные *попарно взаимно простые* числа и b_1, b_2, b_3, b_4 – некоторые натуральные *попарно взаимно простые* числа, причем

$$\begin{aligned}a_1 &\geq a_2 \geq a_3 \geq a_4, \\b_1 &\geq b_2 \geq b_3 \geq b_4, \\a_1 &> b_1\end{aligned}$$

и

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_4.$$

Решение. Пусть $d_1, d_2, \dots, d_8$ – попарно взаимно простые последовательные члены арифметической прогрессии, то есть $d_j = s + jt$. Обозначим

$$\begin{aligned}a_1 &= d_1 d_7, & b_1 &= d_1 d_5, \\a_2 &= d_2 d_6, & b_2 &= d_2 d_8, \\a_3 &= d_3 d_5, & b_3 &= d_3 d_7, \\a_4 &= d_4 d_8, & b_4 &= d_4 d_6.\end{aligned}$$

Заметим, что суммы чисел в обоих наборах равны

$$\begin{aligned}a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= d_1 d_7 + d_2 d_6 + d_3 d_5 + d_4 d_8 = \\&= (s+t)(s+7t) + (s+2t)(s+6t) + (s+3t)(s+5t) + (s+4t)(s+8t) = \\&= 4s^2 + 36st + 66t^2 = \\&= (s+t)(s+5t) + (s+2t)(s+8t) + (s+3t)(s+7t) + (s+4t)(s+6t) = \\&= d_1 d_5 + d_2 d_8 + d_3 d_7 + d_4 d_6 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4,\end{aligned}$$

а также равны их произведения

$$a_1 a_2 a_3 a_4 = d_1 d_2 d_3 \dots d_8 = b_1 b_2 b_3 b_4.$$

Чтобы гарантировать взаимную простоту чисел $d_1, d_2, \dots, d_8$, положим $s = 8! \cdot k + 1$ и $t = 8!$. Рассмотрим d_i и d_j ($i < j$):

$$\begin{aligned}\text{НОД}(d_i; d_j) &= \text{НОД}(s + it; s + jt) = \text{НОД}(s + it; (j - i)t) = \\&= \text{НОД}(8! \cdot k + 1 + i \cdot 8!; (j - i)8!) = \text{НОД}(8! \cdot (k - i) + 1; (j - i)8!)\end{aligned}$$

Заметим, что число $(j - i) \cdot 8!$ имеет только простые делители не превосходящие 8, однако число $8! \cdot (k - i) + 1$ не делится ни на одно из этих чисел. Следовательно, $\text{НОД}(d_i; d_j) = 1$.

9.4. Дана квадратная таблица, в каждой клетке которой записано целое число. Влад и Никита играют в игру, делая ходы поочередно. Первым ходит Никита. За один ход он выбирает столбец таблицы и поэлементно прибавляет к нему или вычитает из него любой другой столбец таблицы. Влад за один ход проделывает аналогичную операцию, только со строками. Влад выиграет, если после очередного хода кого-либо из игроков в таблице окажется строка или столбец, состоящий из нулей.

Может ли Влад добиться победы независимо от игры Никиты? Если да, то как он должен играть, если исходная таблица имеет вид

$$\text{а) } \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} ? \qquad \text{б) } \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 9 & 4 \\ \hline 7 & 5 & 3 \\ \hline 6 & 1 & 8 \\ \hline \end{array} ?$$

Ответ: а) нет; б) нет.

Решение. Заметим, что описанные в условии задачи преобразования таблицы

a	b
c	d

не изменяют величину $A = ad - bc$. Действительно, если, например, прибавить

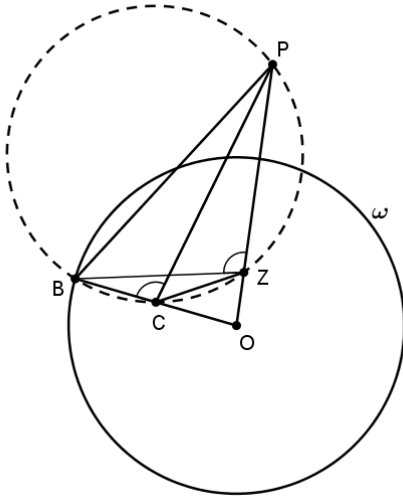
второй столбец к первому, получим $\begin{array}{|c|c|} \hline a+b & b \\ \hline c+d & d \\ \hline \end{array}$, для которой $A = (a+b)d - b(c+d) = ad - bc$, то есть значение A не изменилось после преобразования. Аналогично можно показать, что сложение/вычитание строк не изменяет указанную величину.

Влад победит, если в результате преобразований получится таблица, у которой строка или столбец состоят из нулей. Для такой таблицы $A = 0$, а в исходной таблице пункта а) $A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$.

В пункте б) выберем левый верхний квадратик размера 2×2 и вычислим для него введенную величину: $A = 2 \cdot 5 - 7 \cdot 9 = -53$. Таким образом, Влад не сможет получить одни нули в первой или второй строках исходной таблицы. Далее, выберем правый нижний квадратик 2×2 , для которого $A = 5 \cdot 8 - 1 \cdot 3 = 37$. Поэтому и в третьей строке Влад не сможет получить одни нули. Аналогично со столбцами. Следовательно, он не сможет выиграть в обоих пунктах задачи.

10.1. Дана окружность ω с центром O и точка P вне ее. На окружности отмечена точка B , причем O , B и P не лежат на одной прямой. Пусть C – середина OB . Около треугольника PBC построена описанная окружность.

Докажите, что независимо от выбора точки B все эти окружности проходят через одну точку, отличную от P .



Решение. Пусть длина радиуса окружности ω равна R . На отрезке OP отметим точку Z так, чтобы выполнялось соотношение

$$OZ \cdot OP = \frac{R^2}{2}.$$

Точка P находится вне окружности ω , поэтому $R/OP < 1$, а значит

$$\frac{OZ}{OP} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{R}{OP} \right)^2 < 1,$$

то есть, точка Z действительно принадлежит отрезку OP и не совпадает с P . Кроме того, положение точки Z не зависит от выбора точки B на окружности, так как отрезок

OP фиксирован, а длина радиуса окружности постоянна. Тогда в силу того, что $OC = R/2$, получаем отношение

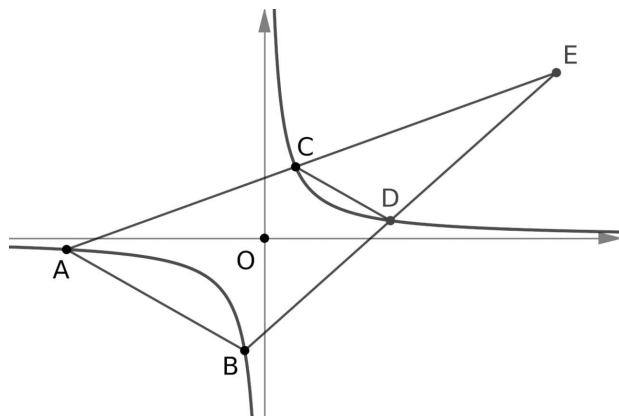
$$\frac{OZ}{OB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{OP} = \frac{OC}{OP},$$

то есть, $\triangle OZB \sim \triangle OCP$ по углу и прилежащим пропорциональным сторонам. Отсюда $\angle OZB = \angle OCP$, а значит $\angle BZP = \angle PCB$. Так как точки Z и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой PB , то четырехугольник $BPZC$ — вписанный, то есть точка Z принадлежит окружности, описанной около треугольника PBC , а значит и есть искомая.

Замечание. Если начать доказательство с того, что определить искомую точку Z как вторую точку пересечения отрезка OP с окружностью, описанной около треугольника PBC , то придется доказать, что такая точка вообще существует, а это несколько дольше, чем сразу определить точку Z нужным отношением и уже затем доказать, что она принадлежит окружности.

10.2. На левой ветви гиперболы $y = \frac{1}{x}$ отмечены точки A и B , а на правой ветви – точки C и D . Оказалось, что прямые AB и CD параллельны. Пусть E – точка пересечения прямых AC и BD ; точка O – начало координат.

Докажите, что у прямых OE и AB коэффициенты наклона равны по модулю, но противоположны по знаку.



Решение. Заметим, что если точки $A\left(a; \frac{1}{a}\right)$ и $B\left(b; \frac{1}{b}\right)$ принадлежат гиперболе $y = \frac{1}{x}$, то уравнение прямой AB имеет вид $y = -\frac{x}{ab} + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$. Аналогично для прямой, проходящей через точки $C\left(c; \frac{1}{c}\right)$ и $D\left(d; \frac{1}{d}\right)$:

$$y = -\frac{x}{cd} + \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right).$$

Найдем координаты точки $E(x_E; y_E)$:

$$-\frac{x_E}{ac} + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) = -\frac{x_E}{bd} + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d}\right),$$

$$x_E \cdot \frac{ac - bd}{abcd} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d} - \frac{1}{a} - \frac{1}{c}.$$

Прямые AB и CD параллельны, поэтому $ab = cd$, откуда $d = \frac{ab}{c}$. С учетом сказанного преобразуем последнее соотношение:

$$x_E \cdot \left(ac - \frac{b^2a}{c}\right) \cdot \frac{1}{a^2b^2} = \frac{ac + c^2 - bc - ab}{abc},$$

$$x_E \cdot \frac{a(c^2 - b^2)}{cab} = \frac{a(c - b) + c(c - b)}{c},$$

$$x_E \cdot \frac{(c - b)(c + b)}{b} = \frac{(a + c)(c - b)}{c},$$

$$x_E = \frac{b(a + c)}{b + c}.$$

Уравнение прямой, проходящей через точки M и N , будем обозначать $y = k_{MN}x + l_{MN}$. Найдем коэффициент наклона k_{OE} :

$$k_{OE} = \frac{y_E}{x_E} = \frac{k_{AC} \cdot x_E + l_{AC}}{x_E} = k_{AC} + \frac{l_{AC}}{x_E} = -\frac{1}{ac} + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) : \frac{b(a + c)}{b + c} =$$

$$= -\frac{1}{ac} + \frac{a + c}{ac} \cdot \frac{b + c}{b(a + c)} = -\frac{1}{ac} + \frac{b + c}{abc} = \frac{1}{ab} = -k_{AB},$$

что и требовалось доказать.

10.3. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что

$$\begin{aligned} n &= a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{2022}, \\ n &= b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_{2022}, \end{aligned}$$

где $a_1, a_2, \dots, a_{2022}$ – некоторые натуральные *попарно взаимно простые* числа и $b_1, b_2, \dots, b_{2022}$ – некоторые натуральные *попарно взаимно простые* числа, причем

$$\begin{aligned} a_1 &\geq a_2 \geq \dots \geq a_{2022}, \\ b_1 &\geq b_2 \geq \dots \geq b_{2022}, \\ a_1 &> b_1 \end{aligned}$$

и

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2022} = b_1 + b_2 + \dots + b_{2022}.$$

Решение. Пусть $a_5 = a_6 = \dots = a_{2022} = 1$ и $b_5 = b_6 = \dots = b_{2022} = 1$. Таким образом, задача сводится к построению двух наборов из четырех чисел, которые удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= b_1 + b_2 + b_3 + b_4, \\ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 &= b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_4. \end{aligned}$$

Пусть $d_1, d_2, \dots, d_8$ – попарно взаимно простые последовательные члены арифметической прогрессии, то есть $d_j = s + jt$. Обозначим

$$\begin{aligned} a_1 &= d_1 d_7, & b_1 &= d_1 d_5, \\ a_2 &= d_2 d_6, & b_2 &= d_2 d_8, \\ a_3 &= d_3 d_5, & b_3 &= d_3 d_7, \\ a_4 &= d_4 d_8, & b_4 &= d_4 d_6. \end{aligned}$$

Заметим, что суммы чисел в обоих наборах равны

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= d_1 d_7 + d_2 d_6 + d_3 d_5 + d_4 d_8 = \\ &= (s+t)(s+7t) + (s+2t)(s+6t) + (s+3t)(s+5t) + (s+4t)(s+8t) = \\ &= 4s^2 + 36st + 66t^2 = \\ &= (s+t)(s+5t) + (s+2t)(s+8t) + (s+3t)(s+7t) + (s+4t)(s+6t) = \\ &= d_1 d_5 + d_2 d_8 + d_3 d_7 + d_4 d_6 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4, \end{aligned}$$

а также равны их произведения

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = d_1 d_2 d_3 \cdot \dots \cdot d_8 = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_4.$$

Чтобы гарантировать взаимную простоту чисел $d_1, d_2, \dots, d_8$, положим $s = 8! \cdot k + 1$ и $t = 8!$. Рассмотрим d_i и d_j ($i < j$):

$$\begin{aligned} \text{НОД}(d_i; d_j) &= \text{НОД}(s + it; s + jt) = \text{НОД}(s + it; (j - i)t) = \\ &= \text{НОД}(8! \cdot k + 1 + it; (j - i)8!) \end{aligned}$$

10.4. Найдите все функции g , определенные на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения, для которых равенство

$$g(x + xy) + g(y) = g(x + y) + 2yg(x) + g(xy)$$

выполняется для всех действительных значений x и y .

Ответ: $f(x) = ax^2 - ax$, где a – произвольное действительное число.

Решение. Подставляя $x = 0$ и $x = 1$ в исходное уравнение, получим $g(0) = 0$ и $g(1) = 0$.

Пусть $C = g(-1)$. Подставим $y = -1 - x$:

$$g(-x^2) + g(-1 - x) = C - 2(1 + x)g(x) + g(-x - x^2). \quad (1)$$

В исходном уравнении заменим x на $-x$ и подставим $y = x$:

$$g(-x - x^2) + g(x) = 2xg(-x) + g(-x^2). \quad (2)$$

Сложим равенства (10) и (11):

$$g(-1 - x) = C - (2x + 3)g(x) + 2xg(-x). \quad (3)$$

В последнее равенство вместо x подставим $-x$:

$$g(-1 + x) = C + (2x - 3)g(-x) - 2xg(x). \quad (4)$$

В исходном равенстве положим $x = -1$:

$$g(-1 - y) + g(y) = g(y - 1) + 2Cy + g(-y). \quad (5)$$

Подставим в (14) равенства (12) и (13):

$$\begin{aligned} C - (2y + 3)g(y) + 2yg(-y) + g(y) &= C + (2y - 3)g(-y) - 2yg(y) + 2Cy + g(-y), \\ -2g(y) + 2g(-y) &= 2Cy \end{aligned}$$

или

$$g(-y) = g(y) + Cy. \quad (6)$$

Из равенств (15) и (13) следует

$$\begin{aligned} g(x - 1) &= C + (2x - 3)(g(x) + Cx) - 2xg(x), \\ g(x - 1) &= C - 3Cx - 3g(x) + 2Cx^2, \\ g(x - 1) + 3g(x) &= C(2x - 1)(x - 1). \end{aligned} \quad (7)$$

Подставим $y = -1$ в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} C &= g(x - 1) - 2g(x) + g(-x), \\ C &= g(x - 1) - g(x) + Cx. \end{aligned} \quad (8)$$

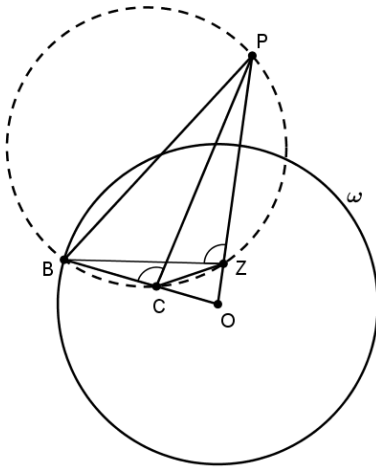
Объединим (16) и (17) в систему

$$\begin{cases} g(x - 1) + 3g(x) = C(2x - 1)(x - 1), \\ g(x - 1) - g(x) = C(1 - x), \end{cases}$$

решая которую относительно $g(x)$, получим $g(x) = Cx(x - 1)/2$, откуда $g(x) = ax(x - 1)$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что найденная функция удовлетворяет условию задачи.

11.1. Дана окружность ω с центром O и точка P вне ее. На окружности отмечена точка B , причем O , B и P не лежат на одной прямой. На радиусе OB отмечена точка C так, что $OC : CB = 2 : 3$. Около треугольника PBC построена описанная окружность.

Докажите, что независимо от выбора точки B все эти окружности проходят через одну точку, отличную от P .



Решение. Пусть длина радиуса окружности ω равна R . На отрезке OP отметим точку Z так, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{OZ}{OP} = \frac{2}{5} \left(\frac{R}{OP} \right)^2.$$

Точка P находится вне окружности ω , поэтому $R/OP < 1$, а значит $OZ/OP < 1$, то есть, точка Z действительно принадлежит отрезку OP и не совпадает с P . Кроме того, положение точки Z не зависит от выбора точки B на окружности, так как отрезок OP фиксирован, а длина радиуса окружности постоянна. Тогда в силу того, что $OC = 2R/5$, получаем отношение

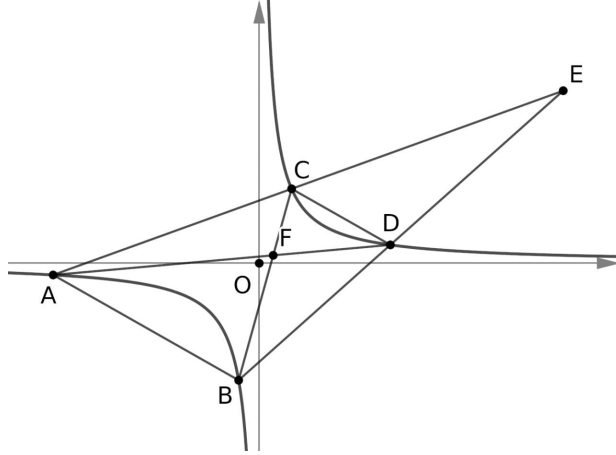
$$\frac{OZ}{OB} = \frac{2}{5} \cdot \frac{R}{OP} = \frac{OC}{OP},$$

то есть, $\triangle OZB \sim \triangle OCP$ по углу и прилежащим пропорциональным сторонам. Отсюда $\angle OZB = \angle OCP$, а значит $\angle BZP = \angle PCB$. Так как точки Z и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой PB , то четырехугольник $BPZC$ — вписанный, то есть точка Z принадлежит окружности, описанной около треугольника PBC , а значит и есть искомая.

Замечание. Если начать доказательство с того, что определить искомую точку Z как вторую точку пересечения отрезка OP с окружностью, описанной около треугольника PBC , то придется доказать, что такая точка вообще существует, а это несколько дольше, чем сразу определить точку Z нужным отношением и уже затем доказать, что она принадлежит окружности.

11.2. На левой ветви гиперболы $y = \frac{1}{x}$ отмечены точки A и B , а на правой ветви – точки C и D . Оказалось, что прямые AB и CD параллельны. Пусть E – точка пересечения прямых AC и BD , а F – точка пересечения прямых AD и BC .

Докажите, что прямая EF проходит через начало координат.



Решение. Заметим, что если точки $A\left(a; \frac{1}{a}\right)$ и $B\left(b; \frac{1}{b}\right)$ принадлежат гиперболе $y = \frac{1}{x}$, то уравнение прямой AB имеет вид $y = -\frac{x}{ab} + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$. Аналогично для прямой, проходящей через точки $C\left(c; \frac{1}{c}\right)$ и $D\left(d; \frac{1}{d}\right)$:

$$y = -\frac{x}{cd} + \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right).$$

Найдем координаты точки $E(x_E; y_E)$:

$$-\frac{x_E}{ac} + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) = -\frac{x_E}{bd} + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d}\right),$$

$$x_E \cdot \frac{ac - bd}{abcd} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d} - \frac{1}{a} - \frac{1}{c}.$$

Прямые AB и CD параллельны, поэтому $ab = cd$, откуда $d = \frac{ab}{c}$. С учетом сказанного преобразуем последнее соотношение:

$$x_E \cdot \left(ac - \frac{b^2a}{c}\right) \cdot \frac{1}{a^2b^2} = \frac{ac + c^2 - bc - ab}{abc},$$

$$x_E \cdot \frac{a(c^2 - b^2)}{cab} = \frac{a(c - b) + c(c - b)}{c},$$

$$x_E \cdot \frac{(c - b)(c + b)}{b} = \frac{(a + c)(c - b)}{c},$$

$$x_E = \frac{b(a + c)}{b + c}.$$

Уравнение прямой, проходящей через точки M и N , будем обозначать $y = k_{MN}x + l_{MN}$. Найдем коэффициент наклона k_{OE} :

$$k_{OE} = \frac{y_E}{x_E} = \frac{k_{AC} \cdot x_E + l_{AC}}{x_E} = k_{AC} + \frac{l_{AC}}{x_E} = -\frac{1}{ac} + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) : \frac{b(a + c)}{b + c} =$$

$$= -\frac{1}{ac} + \frac{a + c}{ac} \cdot \frac{b + c}{b(a + c)} = -\frac{1}{ac} + \frac{b + c}{abc} = \frac{1}{ab} = -k_{AB}.$$

Аналогично можно показать, что $k_{OF} = -k_{AB}$. То есть $k_{OF} = k_{OE}$, поэтому прямые OE и OF параллельны, а также имеют общую точку, следовательно, они совпадают и точка O лежит на прямой EF .

11.3. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что

$$\begin{aligned}n &= a_1 \cdot a_2 \cdot a_3, \\n &= b_1 \cdot b_2 \cdot b_3,\end{aligned}$$

для некоторых натуральных *попарно взаимно простых* чисел a_1, a_2, a_3 и натуральных *попарно взаимно простых* чисел b_1, b_2, b_3 , причем

$$\begin{aligned}a_1 &\geq a_2 \geq a_3, \\b_1 &\geq b_2 \geq b_3, \\a_1 &> b_1\end{aligned}$$

и

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3.$$

Решение. Рассмотрим наборы $a-2, a+2, 2(a^2-2a-2)$ и $(a-2)(a+2), 2, a^2-2a-2$. Отметим, что произведения (и суммы) чисел в наборах совпадают:

$$\begin{aligned}(a-2) + (a+2) + 2(a^2-2a-2) &= (a^2-4) + 2 + (a^2-2a-2), \\(a-2) \cdot (a+2) \cdot 2(a^2-2a-2) &= (a-2)(a+2) \cdot 2 \cdot (a^2-2a-2).\end{aligned}$$

Для произвольных ненулевых целых чисел a и b обозначим через (a, b) наибольшее натуральное число, которое делит и a , и b . Тогда понятно, что $(a, b) = (a-b, b)$ и $(a, aq+r) = (a, r)$. Отметим, что $(a, b) = \text{НОД}(a, b)$ в случае натуральных a и b .

Далее покажем, что при $a = 6k + 3$ числа первого набора

$$\begin{aligned}a-2 &= 6k+1, \\a+2 &= 6k+5, \\2(a^2-2a-2) &= 2a(a-2)-4 = 2(6k+3)(6k+1)-4\end{aligned}$$

являются попарно взаимно простыми:

$$(6k+1, 6k+5) = (6k+1, 4) = 1,$$

$$(6k+1, 2(6k+3)(6k+1)-4) = (6k+1, -4) = 1$$

$$\begin{aligned}(6k+5, 2(6k+3)(6k+1)-4) &= (6k+5, (6k+5)(6k+1)-2(6k+1)-4) = \\&= (6k+5, -12k-6) = (6k+5, 4) = 1.\end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что при $a = 6k + 3$ числа второго набора $(6k+1)(6k+5), 2$ и $(6k+3)(6k+1)-2$ также являются попарно взаимно простыми:

$$((6k+1)(6k+5), 2) = 1,$$

$$((6k+3)(6k+1)-2, 2) = ((6k+3)(6k+1), 2) = 1,$$

$$\begin{aligned}((6k+1)(6k+5), (6k+3)(6k+1)-2) &= (2(6k+1)+2, (6k+3)(6k+1)-2) = \\&= (6k+2, (6k+2)^2-3) = (6k+2, -3) = 1.\end{aligned}$$

11.4. Найдите все функции f , определенные на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения, для которых равенство

$$f(x + xy) + 2xy + f(y) = f(x + y) + 2yf(x) + f(xy)$$

выполняется для всех действительных значений x и y .

Ответ: $f(x) = (a + 1)x^2 - ax$, где a – произвольное действительное число.

Решение. Представим искомую функцию в виде $f(x) = g(x) + x^2$. Таким образом, задача сводится к решению следующего функционального уравнения

$$g(x + xy) + g(y) = g(x + y) + 2yg(x) + g(xy). \quad (9)$$

Подставляя $x = 0$ и $x = 1$ в последнее равенство, получим $g(0) = 0$ и $g(1) = 0$.

Пусть $C = g(-1)$. Подставим $y = -1 - x$:

$$g(-x^2) + g(-1 - x) = C - 2(1 + x)g(x) + g(-x - x^2). \quad (10)$$

В уравнении (9) заменим x на $-x$ и подставим $y = x$:

$$g(-x - x^2) + g(x) = 2xg(-x) + g(-x^2). \quad (11)$$

Сложим равенства (10) и (11):

$$g(-1 - x) = C - (2x + 3)g(x) + 2xg(-x). \quad (12)$$

В последнее равенство вместо x подставим $-x$:

$$g(-1 + x) = C + (2x - 3)g(-x) - 2xg(x). \quad (13)$$

В уравнении (9) положим $x = -1$:

$$g(-1 - y) + g(y) = g(y - 1) + 2Cy + g(-y). \quad (14)$$

Подставим в (14) равенства (12) и (13):

$$\begin{aligned} C - (2y + 3)g(y) + 2yg(-y) + g(y) &= C + (2y - 3)g(-y) - 2yg(y) + 2Cy + g(-y), \\ -2g(y) + 2g(-y) &= 2Cy \end{aligned}$$

или

$$g(-y) = g(y) + Cy. \quad (15)$$

Из равенств (15) и (13) следует

$$\begin{aligned} g(x - 1) &= C + (2x - 3)(g(x) + Cx) - 2xg(x), \\ g(x - 1) &= C - 3Cx - 3g(x) + 2Cx^2, \\ g(x - 1) + 3g(x) &= C(2x - 1)(x - 1). \end{aligned} \quad (16)$$

Подставим $y = -1$ в уравнение (9):

$$\begin{aligned} C &= g(x - 1) - 2g(x) + g(-x), \\ C &= g(x - 1) - g(x) + Cx. \end{aligned} \quad (17)$$

Объединим (16) и (17) в систему

$$\begin{cases} g(x - 1) + 3g(x) = C(2x - 1)(x - 1), \\ g(x - 1) - g(x) = C(1 - x), \end{cases}$$

решая которую относительно $g(x)$, получим $g(x) = Cx(x - 1)/2$, откуда $f(x) = (a + 1)x^2 - ax$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что найденная функция удовлетворяет условию задачи.

8.5. На доске написано число 98765432. Двое по очереди вычеркивают цифры. Проигрывает тот, после чьего хода либо не осталось цифр, либо число, образованное ими, делится на 3.

Кто выиграет (начинающий или второй игрок) независимо от игры соперника?

Ответ: начинающий.

Решение. Заменяем все цифры исходного числа на остатки от деления на 3. В результате получим число, содержащее две «1», три «2» и три «0». Опишем выигрышную стратегию начинающего: первым ходом он вычеркивает «0», а далее дополняет второго до 3 (если второй вычеркивает «1» или «0», то первый выбирает «2» или «0» соответственно; если второй вычеркнет «2», то сразу проиграет, так как первоначальное число дает остаток 2 при делении на 3). В итоге за каждые два хода второго и первого вычеркиваются цифры, сумма которых кратна 3 и после каждого хода первого написанное на доске число не делится на 3. Значит, на каком-то ходу второй игрок вычеркнет 2 либо последнюю цифру, то есть проиграет.

8.6. Пусть

$$A + 3x + 3y + xy = 3 + x^2 + 2x^2y + y^2 + 2xy^2 + x^2y^2,$$

где x , y и A – действительные числа.

Найдите наименьшее значение, которое может принимать число A .

Ответ: $3/4$.

Решение. Преобразуем исходное выражение:

$$\begin{aligned} A &= 3 - 3x + x^2 - 3y - xy + 2x^2y + y^2 + 2xy^2 + x^2y^2 = \\ &= 3 - 3(x + y) - 3xy + (x^2 + 2x^2y + y^2) + 2xy(x + y) + x^2y^2 = \\ &= 3 - 3(x + y + xy) + (x + y)^2 + 2xy(x + y) + x^2y^2 = \\ &= 3 - 3(x + y + xy) + (x + y + xy)^2 = [t = x + y + xy] = \\ &= 3 - 3t + t^2 = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Минимальное значение $3/4$ достижимо, если $t = 3/2$ или $xy + x + y = 3/2$. Последнее равенство выполняется, например, при $x = 0$, $y = 3/2$.

8.7. Произведение трех натуральных чисел является кубом некоторого натурального числа, а попарные разности этих трех чисел равны 3, 4 и 7.

Найдите все возможные значения, которые может принимать наименьшее из этих чисел.

Ответ: 9.

Решение. Обозначим меньшее из этих трех чисел n . Тогда возможны только два варианта: $n, n + 3$ и $n + 7$ или $n, n + 4$ и $n + 7$.

Рассмотрим первый вариант, тогда $n(n+3)(n+7) = n^3 + 10n^2 + 21n$ является кубом некоторого натурального числа. Заметим, что для любого натурального n выполняется неравенство

$$n^3 < n^3 + 10n^2 + 21n < n^3 + 12n^2 + 48n + 64 = (n + 4)^3.$$

Поэтому число $n^3 + 10n^2 + 21n$ равно или $(n + 1)^3$, или $(n + 2)^3$, или $(n + 3)^3$. Разберем эти три случая:

а) если $(n + 1)^3 = n^3 + 10n^2 + 21n$, то $n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = n^3 + 10n^2 + 21n$, откуда получаем уравнение $7n^2 + 18n - 1 = 0$, которое не имеет натуральных корней;

б) если $(n + 2)^3 = n^3 + 10n^2 + 21n$, то $n^3 + 6n^2 + 12n + 8 = n^3 + 10n^2 + 21n$, откуда получаем уравнение $4n^2 + 9n - 8 = 0$, не имеющее натуральных корней;

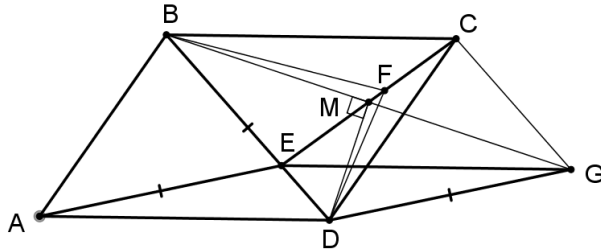
в) если $(n + 3)^3 = n^3 + 10n^2 + 21n$, то $n^3 + 9n^2 + 27n + 27 = n^3 + 10n^2 + 21n$, откуда получаем уравнение $n^2 - 6n - 27 = 0$ с корнями 9 и -3 . Первое значение $n = 9$ удовлетворяет условию. В этом случае искомая тройка чисел: 9, 12 и 16, а их произведение $9 \cdot 12 \cdot 16 = 3^3 \cdot 4^3 = 12^3$.

Рассмотрим второй вариант, тогда $n(n + 4)(n + 7) = n^3 + 11n^2 + 21n$ является кубом некоторого натурального числа. Заметим, что $(n + 4)^3 = n^3 + 12n^2 + 48n + 64 > n^3 + 11n^2 + 21n > n^3$ для любого натурального n . Поэтому выражение $n^3 + 11n^2 + 21n$ равно или $(n + 1)^3$, или $(n + 2)^3$, или $(n + 3)^3$. Но уравнения $(n + 1)^3 = n^3 + 11n^2 + 21n$, $(n + 2)^3 = n^3 + 11n^2 + 21n$ и $(n + 3)^3 = n^3 + 11n^2 + 21n$ не имеют натуральных корней.

8.8. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E так, что $AE = BD$, а на отрезке CE выбрана точка F так, что $\angle BFD = 90^\circ$.

Найдите все возможные значения отношения $CE : CF$.

Ответ: 1:1.



Решение. Построим треугольник AED до параллелограмма $AEGD$ ($EG \parallel AD$, $DG \parallel AE$). Тогда $BCGE$ — также параллелограмм и пусть M — точка пересечения его диагоналей EC и BG . Так как $BD = AE = DG$, то $\triangle BGD$ — равнобедренный, а значит DM — его медиана и высота, следовательно, $\angle BMD = 90^\circ$.

Докажем, что точки M и F совпадают. Предположим, это не так и F принадлежит отрезку MC (случай, когда F принадлежит отрезку EM , рассматривается аналогично). Тогда из треугольников BDM и BDF получим

$$\begin{aligned} 90^\circ = \angle BDM + \angle DBM &< \angle BDM + \angle MDF + \angle DBM + \angle MBF = \\ &= \angle BDF + \angle DBF = 90^\circ \end{aligned}$$

— противоречие к предположению о том, что точки M и F различны, следовательно, F — середина EC , что и требовалось доказать.

9.5. На доске написано число 98765432198765432. Двое по очереди вычеркивают цифры. Проигрывает тот, после чьего хода либо не осталось цифр, либо число, образованное ими, делится на 3.

Кто выиграет (начинающий или второй игрок) независимо от игры соперника?

Ответ: начинающий.

Решение. Заменяем все цифры исходного числа на остатки от деления на 3. В результате получим число, содержащее пять «1», шесть «2» и шесть «0». Опишем выигрышную стратегию начинающего: первым ходом он вычеркивает «1», а далее дополняет второго до 3 (если второй вычеркивает «2» или «0», то первый выбирает «1» или «0» соответственно; если второй вычеркнет «1», то сразу проиграет, так как после самого первого хода число дает остаток 1 при делении на 3). В итоге за каждые два хода второго и первого вычеркиваются цифры, сумма которых кратна 3 и после каждого хода первого написанное на доске число не делится на 3. Значит, на каком-то ходу второй игрок вычеркнет 1 либо последнюю цифру, то есть проиграет.

9.6. Пусть

$$A + 6x + 3y = 3 + 4x^2 + xy + 4x^2y + y^2 + 2xy^2 + x^2y^2,$$

где x , y и A – действительные числа.

Найдите наименьшее значение, которое может принимать число A .

Ответ: $3/4$.

Решение. Преобразуем исходное выражение:

$$\begin{aligned} A &= 3 - 6x + 4x^2 - 3y + xy + 4x^2y + y^2 + 2xy^2 + x^2y^2 = \\ &= (x^2y^2 + 2xy^2 + y^2) + 4x(xy + y) + 4x^2 - 3(xy + 2x + y) + 3 = \\ &= (xy + y)^2 - 4x(xy + y) + 4x^2 - 3(xy + 2x + y) + 3 = \\ &= (xy + 2x + y)^2 + 4x^2 - 3(xy + 2x + y) + 3 = \\ &= [t = xy + 2x + y] = t^2 - 3t + 3 = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Значение $3/4$ достижимо, если $t = 3/2$ или $xy + 2x + y = 3/2$. Последнее равенство выполняется, например, при $x = 0$, $y = 3/2$.

9.7. Произведение трех натуральных чисел является кубом некоторого натурального числа, а попарные разности этих трех чисел равны 4, 5 и 9.

Найдите все возможные значения, которые может принимать наименьшее из этих чисел.

Ответ: 16.

Решение. Обозначим меньшее из этих трех чисел n . Тогда возможны только два варианта: $n, n + 4$ и $n + 9$ или $n, n + 5$ и $n + 9$.

Рассмотрим первый случай, тогда $n(n + 4)(n + 9) = n^3 + 13n^2 + 36n$ является кубом некоторого натурального числа. Заметим, что для любого натурального n выполняется неравенство

$$n^3 < n^3 + 13n^2 + 36n < n^3 + 15n^2 + 75n + 125 = (n + 5)^3,$$

поэтому $n^3 + 13n^2 + 36n$ равно или $(n + 1)^3$, или $(n + 2)^3$, или $(n + 3)^3$, или $(n + 4)^3$. Последовательно разбирая эти четыре случая, получим, что только уравнение $(n + 4)^3 = n^3 + 13n^2 + 36n$ имеет натуральные корни:

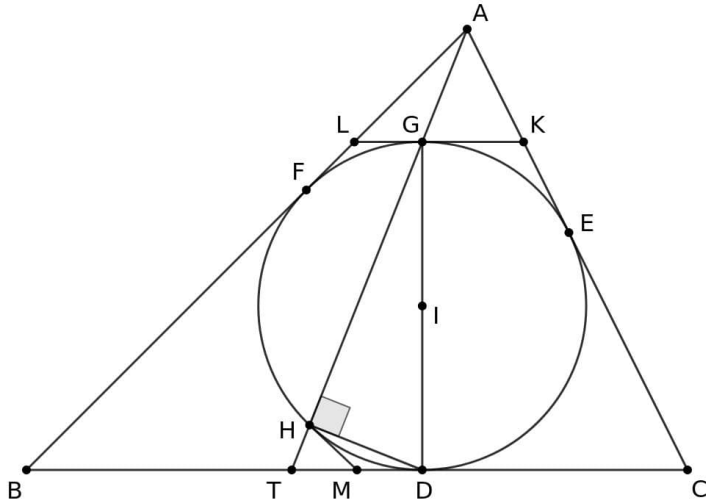
$$\begin{aligned} n^3 + 12n^2 + 48n + 64 &= n^3 + 13n^2 + 36n, \\ n^2 - 12n - 64 &= 0, \end{aligned}$$

откуда $n = 16$. Тройка натуральных чисел в этом случае 16, 20 и 25, а их произведение $16 \cdot 20 \cdot 25 = 4^3 \cdot 5^3 = 20^3$.

Рассмотрим второй случай, тогда $n(n + 5)(n + 9) = n^3 + 14n^2 + 36n$ является кубом некоторого натурального числа. Заметим, что $(n + 5)^3 = n^3 + 15n^2 + 75n + 125 > n^3 + 14n^2 + 36n > n^3$ для любого натурального n . Поэтому $n^3 + 14n^2 + 36n$ должно равняться или $(n + 1)^3$, или $(n + 2)^3$, или $(n + 3)^3$, или $(n + 4)^3$. Но уравнения $(n + 1)^3 = n^3 + 14n^2 + 36n$, $(n + 2)^3 = n^3 + 14n^2 + 36n$, $(n + 3)^3 = n^3 + 14n^2 + 36n$ или $(n + 4)^3 = n^3 + 14n^2 + 36n$ не имеют натуральных корней.

9.8. Окружность ω с центром I вписана в треугольник ABC и касается его сторон BC , AC и AB в точках D , E и F соответственно. Прямая DI повторно пересекает ω в точке G , а прямая AG повторно пересекает ω в точке H . Пусть M – точка пересечения стороны BC и касательной к окружности ω , проведенной в точке H .

Найдите все возможные значения отношения $BC : BM$.



Ответ: 2 : 1.

Решение. Через точку G проведем прямую, параллельную BC , которая пересекает стороны AB и AC в точках L и K соответственно. Пусть T – точка пересечения прямой AG со стороной BC , M_1 – ее середина.

Лемма. Точки D и T симметричны относительно середины M_1 стороны BC .

Доказательство леммы. Пусть $AB = c$, p – полупериметр треугольника ABC , $GL = x$. Пока-

жем, что $CD = BT$, откуда и будет следовать утверждение леммы. Сразу отметим, что $AF = p - a$ и $CD = p - c$ как отрезки, на которые точки касания вписанной окружности делят стороны треугольника.

Из подобия $\triangle ALK \sim \triangle ABC$ следует, что $\frac{AL}{AB} = \frac{P_{ALK}}{P_{ABC}}$, или $\frac{p - a - x}{c} = \frac{p - a}{p}$. Из последнего уравнения следует $p(p - a) - px = c(p - a)$, откуда $x = \frac{p}{(p - a)(p - c)}$.

Тогда из подобия $\triangle ALG \sim \triangle ABT$ следует, что $\frac{x}{TB} = \frac{AL}{AB} = \frac{p - a}{p}$, откуда $TB = x \cdot \frac{p}{p - a} = p - c = CD$. Лемма доказана.

Так как DI – диаметр ω , то $\angle THD = 90^\circ$, поэтому треугольник TDH – прямоугольный. По лемме M_1 – середина DT , поэтому $TM_1 = HM_1 = DM_1$ и

$$\angle M_1HD = \angle HM_1D = 90^\circ - \angle HDG = \angle HGD,$$

следовательно, прямая HM_1 касается ω в точке H и проходит через середину стороны BC . Откуда следует, что точки M и M_1 совпадают и искомое отношение равно $BC : BM = 2 : 1$.

10.5. На доске написано число

1234567891234567891234567.

Двое по очереди вычеркивают цифры. Проигрывает тот, после чьего хода либо не осталось цифр, либо число, образованное ими, делится на 3.

Кто выиграет (начинающий или второй игрок) независимо от игры соперника?

Ответ: второй игрок.

Решение. Заменяем все цифры исходного числа на остатки от деления на 3. В результате получим число, содержащее девять «1», восемь «2» и восемь «0». Опишем выигрышную стратегию второго игрока: ему необходимо дополнять начинающего до 3 (если первый вычеркивает «2» или «0», то второй выбирает «1» или «0» соответственно; если первый вычеркнет «1», то сразу проиграет, так как первоначальное число дает остаток 1 при делении на 3). В итоге за каждые два хода первого и второго вычеркиваются цифры, сумма которых кратна 3 и после каждого хода второго написанное на доске число не делится на 3. Значит, на каком-то ходу второй игрок вычеркнет 1 либо последнюю цифру, то есть проиграет.

10.6. Известно, что положительные действительные числа x , y и z удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$

Докажите неравенство

$$xyz + x^2 + y^2 + z^2 \geq 6(x + y + z).$$

Решение. Воспользуемся неравенством между арифметическим и гармоническим средними:

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = 3.$$

Из условия задачи следует, что $xyz = xy + yz + zx$. Обозначим $u = x + y + z$, $v = xy + yz + zx$. Сразу отметим, что в ранее доказали, что $u \geq 9$, а из известного неравенства $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ получим, что $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$ или $u^2 \geq 3v$.

С учетом вышесказанного, необходимо доказать неравенство

$$u^2 - v \geq 6u$$

или

$$\frac{u^2}{3} - v + \frac{2u^2}{3} - 6u = \frac{u^2 - 3v}{3} + \frac{2u(u - 9)}{3} \geq 0,$$

которое верно, так как каждое слагаемое неотрицательно.

10.7. Найдите все пары целых чисел (x, y) , удовлетворяющих равенству

$$x(x^3 - y) = y^2(y + 1)^2.$$

Ответ: $(0, 0)$, $(0, -1)$.

Решение. Заметим, что если $x = 0$, то $y = -1$. Пусть теперь $x \neq 0$. Тогда $y \neq -1$, а также $x^2 + y(y + 1) > 0$, и поэтому перепишем исходное уравнение в виде

$$x^2 - y(y + 1) = \frac{xy}{x^2 + y(y + 1)}.$$

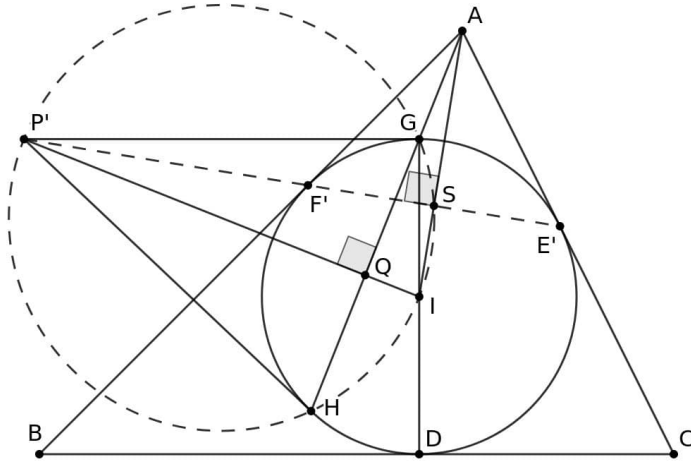
Так как $|xy| \leq (x^2 + y^2)/2$, то

$$|x^2 - y(y + 1)| = \frac{|xy|}{x^2 + y(y + 1)} \leq \frac{x^2 + y^2}{2(x^2 + y(y + 1))} < 1.$$

Последнее неравенство верно, так как оно равносильно условию $x^2 + (y + 1)^2 > 1$, которое выполняется при вышеуказанных ограничениях на x, y . Таким образом, $x^2 - y(y + 1) = 0$. Это равносильно уравнению $(2y + 2x + 1)(2y - 2x + 1) = 1$, которое имеет целые решения $(0, 0)$ и $(0, -1)$, что противоречит условию $x \neq 0$. Таким образом, при $x \neq 0$ целых решений нет.

10.8. Окружность ω с центром I вписана в треугольник ABC и касается его сторон BC , AC и AB в точках D , E и F соответственно. Прямая DI повторно пересекает ω в точке G , а прямая AG повторно пересекает ω в точке H . Пусть P — точка пересечения прямой EF и описанной окружности треугольника GIH , лежащая вне ω .

Докажите, что PH касается ω .



Решение. Пусть касательные к ω в точках H и G пересекаются в точке P' . Докажем, что P' совпадает с P .

Лемма. Пусть YT — высота треугольника XYZ . Тогда равенство

$$XT \cdot XZ = XY^2$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\angle XYZ = 90^\circ$.

Доказательство леммы. Усло-

вие $XT \cdot XZ = XY^2$ равносильно $\frac{XT}{XY} = \frac{XY}{XZ}$ или $\triangle XTY \sim \triangle XYZ$, что равносильно $\angle XYZ = \angle XTY = 90^\circ$. Лемма доказана.

Пусть S — основание перпендикуляра, опущенного из P' на прямую AI ; F' и E' — точки пересечения $P'S$ и ω , а Q — основание перпендикуляра, опущенного из A на $P'I$. Тогда четырехугольник $P'QSA$ вписанный, откуда следует равенство

$$IS \cdot IA = IQ \cdot IP' = [\text{Лемма 1 для } \triangle P'GI \text{ и высоты } GQ] = IG^2 = IF'^2.$$

Из $IS \cdot IA = IF'^2$ по Лемме 1 получаем $\angle IF'A = 90^\circ$. Аналогично, $\angle IE'A = 90^\circ$, то есть AF' и AE' — касательные из A к ω . Из этого следует, что точки F' и E' совпадают с точками E и F , а тогда $P' \in EF$. Также P' принадлежит окружности, описанной около треугольника GIH , так как $\angle IGP' + \angle IHP' = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, а тогда P' — точка пересечения прямой EF с окружностью, описанной около треугольника GIH , лежащая вне ω , то есть в точности P , а тогда PH действительно касается ω .

11.5. На доске написано число

23456789123456789123456789123456789.

Двое по очереди вычеркивают цифры. Проигрывает тот, после чьего хода либо не осталось цифр, либо число, образованное ими, делится на 3.

Кто выиграет (начинающий или второй игрок) независимо от игры соперника?

Ответ: второй игрок.

Решение. Заменяем все цифры исходного числа на остатки от деления на 3. В результате получим число, содержащее одиннадцать «1», двенадцать «2» и двенадцать «0». Опишем выигрышную стратегию второго игрока: ему необходимо дополнять начинающего до 3 (если первый вычеркивает «1» или «0», то второй выбирает «2» или «0» соответственно; если первый вычеркнет «2», то сразу проигрывает, так как первоначальное число дает остаток 2 при делении на 3). В итоге за каждые два хода первого и второго вычеркиваются цифры, сумма которых кратна 3 и после каждого хода второго написанное на доске число не делится на 3. Значит, на каком-то ходу первый игрок вычеркнет 2 либо последнюю цифру, то есть проигрывает.

11.6. Найдите наибольшее действительное число K такое, что для любой тройки (x, y, z) положительных действительных чисел, удовлетворяющих

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1, \quad (1)$$

выполняется неравенство

$$xyz + x^2 + y^2 + z^2 \geq K(x + y + z). \quad (2)$$

Ответ: 6.

Решение. Тройку чисел $(3, 3, 3)$, которая удовлетворяет (1), подставим в неравенство (2) и получим, что $K \leq 6$. Покажем, что для $K = 6$ неравенство (2) выполняется при всех значениях переменных, удовлетворяющих (1).

Воспользуемся неравенством между арифметическим и гармоническим средними:

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = 3.$$

Равенство (1) равносильно $xyz = xy + yz + zx$. Обозначим $u = x + y + z$, $v = xy + yz + zx$. Сразу отметим, что в пункте а) доказано, что $u \geq 9$, а из известного неравенства $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ следует, что $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$ или $u^2 \geq 3v$.

С учетом вышесказанного, неравенство (2) примет вид

$$u^2 - v \geq 6u$$

или

$$\frac{u^2}{3} - v + \frac{2u^2}{3} - 6u = \frac{u^2 - 3v}{3} + \frac{2u(u - 9)}{3} \geq 0,$$

которое верно, так как каждое слагаемое неотрицательно, поэтому максимальное значение K равно 6.

11.7. Найдите все пары целых чисел (x, z) , удовлетворяющих равенству

$$x(x^3 - z + 1) = z^2(z - 1)^2.$$

Ответ: $(0, 1)$, $(0, 0)$.

Решение. Пусть $z = y + 1$, тогда исходное уравнение примет вид

$$x(x^3 + y) = y^2(y + 1)^2.$$

Заметим, что если $x = 0$, то $y = -1$. Пусть теперь $x \neq 0$. Тогда $y \neq -1$, а также $x^2 + y(y + 1) > 0$, и поэтому перепишем исходное уравнение в виде

$$x^2 - y(y + 1) = \frac{xy}{x^2 + y(y + 1)}.$$

Так как $|xy| \leq (x^2 + y^2)/2$, то

$$|x^2 - y(y + 1)| = \frac{|xy|}{x^2 + y(y + 1)} \leq \frac{x^2 + y^2}{2(x^2 + y(y + 1))} < 1.$$

Последнее неравенство верно, так как оно равносильно условию $x^2 + (y + 1)^2 > 1$, которое выполняется при вышеуказанных ограничениях на x, y . Таким образом, $x^2 - y(y + 1) = 0$. Это равносильно уравнению $(2y + 2x + 1)(2y - 2x + 1) = 1$, которое имеет целые решения $(x, y) = (0, 0)$ и $(x, y) = (0, -1)$, что противоречит условию $x \neq 0$. Таким образом, при $x \neq 0$ целых решений нет.

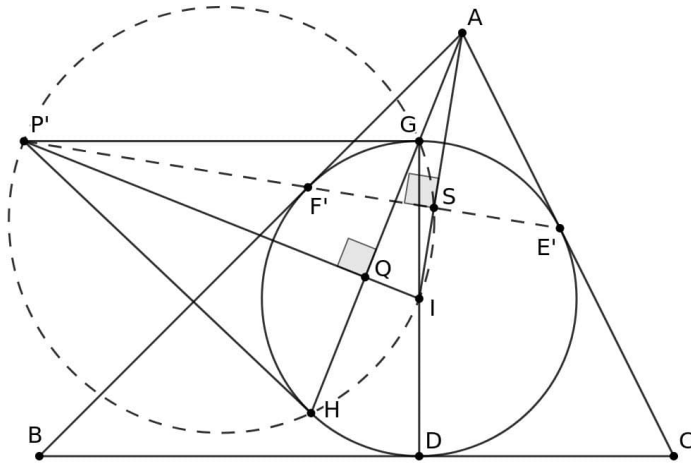
11.8. Окружность ω с центром I вписана в треугольник ABC и касается его сторон BC , AC и AB в точках D , E и F соответственно. Прямая DI повторно пересекает ω в точке G , а прямая AG повторно пересекает ω в точке H . Пусть P – точка пересечения прямой EF и описанной окружности треугольника GIH , лежащая вне ω .

Докажите, что прямая PH проходит через середину стороны BC .

Решение. Утверждение задачи следует из двух фактов:

I. PH касается ω ;

II. касательная к окружности в точке H проходит через середину BC .



I. Пусть касательные к ω в точках H и G пересекаются в точке P' . Докажем, что P' совпадает с P .

Лемма 1. Пусть YT высота треугольника XYZ . Тогда равенство

$$XT \cdot XZ = XY^2$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\angle XYZ = 90^\circ$.

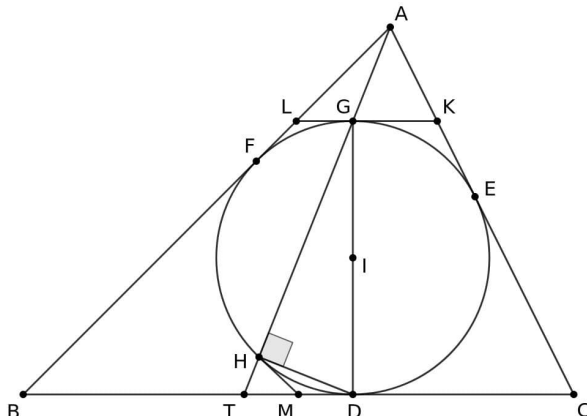
Доказательство леммы. Усло-

вие $XT \cdot XZ = XY^2$ равносильно $\frac{XT}{XY} = \frac{XY}{XZ}$ или $\triangle XTY \sim \triangle XYZ$, что равносильно $\angle XYZ = \angle XTY = 90^\circ$. Лемма доказана.

Пусть S – основание перпендикуляра, опущенного из P' на прямую AI ; F' и E' – точки пересечения $P'S$ и ω , а Q – основание перпендикуляра, опущенного из A на $P'I$. Тогда четырехугольник $P'QSA$ вписанный, откуда следует равенство

$$IS \cdot IA = IQ \cdot IP' = [\text{Лемма 1 для } \triangle P'GI \text{ и высоты } GQ] = IG^2 = IF'^2.$$

Из $IS \cdot IA = IF'^2$ по Лемме 1 получаем $\angle IF'A = 90^\circ$. Аналогично, $\angle IE'A = 90^\circ$, то есть AF' и AE' – касательные из A к ω . Из этого следует, что точки F' и E' совпадают с точками E и F , а тогда $P' \in EF$. Также P' принадлежит окружности, описанной около треугольника GIH , так как $\angle IGP' + \angle IHP' = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, а тогда P' – точка пересечения прямой EF с окружностью, описанной около треугольника GIH , лежащая вне ω , то есть в точности P , а тогда PH действительно касается ω .



II. Через точку G проведем прямую, параллельную BC , которая пересекает стороны AB и AC в точках L и K соответственно. Пусть T – точка пересечения прямой AG со стороной BC , M – ее середина.

Лемма 2. Точки D и T симметричны относительно середины M стороны BC .

Доказательство леммы. Пусть $AB = c$, p – полупериметр треугольника ABC ,

$GL = x$. Покажем, что $CD = BT$, откуда и будет следовать утверждение леммы. Сразу отметим, что $AF = p - a$ и $CD = p - c$ как отрезки, на которые точки касания вписанной окружности делят стороны треугольника.

Из подобия $\triangle ALK \sim \triangle ABC$ следует, что $\frac{AL}{AB} = \frac{P_{ALK}}{P_{ABC}}$, или $\frac{p - a - x}{c} = \frac{p - a}{p}$. Из последнего уравнения следует $p(p - a) - px = c(p - a)$, откуда $x = \frac{p}{(p - a)(p - c)}$.

Тогда из подобия $\triangle ALG \sim \triangle ABT$ следует, что $\frac{x}{TB} = \frac{AL}{AB} = \frac{p - a}{p}$, откуда $TB = x \cdot \frac{p}{p - a} = p - c = CD$. Лемма доказана.

Так как DI – диаметр ω , то $\angle THD = 90^\circ$, поэтому треугольник TDH – прямоугольный. По Лемме 2 M – середина DT , поэтому $TM = HM = DM$ и

$$\angle MHD = \angle HMD = 90^\circ - \angle HDG = \angle HGD,$$

следовательно, прямая HM касается ω в точке H и проходит через середину BC .

9.5. На доске написано число 98765432198765432. Двое по очереди вычеркивают цифры. Проигрывает тот, после чьего хода либо не осталось цифр, либо число, образованное ими, делится на 3.

Кто выиграет (начинающий или второй игрок) независимо от игры соперника?

Ответ: второй игрок.

Решение. Заменяем все цифры исходного числа на остатки от деления на 3. В результате получим число, содержащее пять «1», шесть «2» и шесть «0». Опишем выигрышную стратегию второго игрока: ему необходимо дополнять начинающего до 3 (если первый вычеркивает «1» или «0», то второй выбирает «2» или «0» соответственно; если второй вычеркнет «2», то сразу проиграет, так как после самого первого хода число дает остаток 1 при делении на 3). В итоге за каждые два хода первого и второго вычеркиваются цифры, сумма которых кратна 3 и после каждого хода первого написанное на доске число не делится на 3. Значит, на каком-то ходу первый игрок вычеркнет 2 либо последнюю цифру, то есть проиграет.