

8 класс

8.1. Положительные числа a, b и c таковы, что $ab + bc + ca = abc$. Найдите все возможные значения выражения

$$\frac{1}{a} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{b+c} \right) + \frac{1}{b} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{c+a} \right) + \frac{1}{c} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a+b} \right) - \frac{1}{a+b+c} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

8.2. Найдите все x , удовлетворяющие уравнению

$$[x^2] - [-x^2] - 8[x] + 2 = 0.$$

(Здесь через $[y]$ обозначена целая часть числа y , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее y .)

8.3. а) Докажите, что четырёхугольник является параллелограммом, если его диагонали и два отрезка, соединяющих середины противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

б) Можно ли утверждать, что выпуклый четырёхугольник является параллелограммом, если одна из его диагоналей и два отрезка, соединяющих середины противоположных сторон, пересекаются все в одной точке?

8.4. Дано множество, состоящее из девяти элементов. Нужно так покрасить его элементы в два цвета (каждый элемент — в один цвет), чтобы количество тех его четырёхэлементных подмножеств, которые содержат элементы обоих цветов, было наибольшим возможным. Найдите, чему равно это наибольшее значение.

9 класс

9.1. Для некоторого квадратного трехчлена $f(x)$ и трёх попарно различных действительных чисел a, b, c выполнены равенства $f(a) = bc$, $f(b) = ac$, $f(c) = ab$. Найдите значение $f(a+b+c)$.

9.2. Докажите, что в любом натуральном шестизначном числе, делящемся на 101, можно поменять местами две цифры так, что получившееся число также будет делиться на 101.

9.3. Точки A_1 и B_1 отмечены соответственно на сторонах AC и BC треугольника ABC так, что $A_1B_1 \parallel AB$. Точки A_2 и B_2 - основания перпендикуляров, опущенных соответственно из точек A_1 и B_1 на сторону AB . Докажите, что $AC = AB_2 + CB_1$ если и только если $BC = BA_2 + CA_1$.

9.4. Дано множество, состоящее из восьми элементов. Нужно так покрасить его элементы в два цвета (каждый элемент — в один цвет), чтобы количество тех его подмножеств, которые содержат элементы обоих цветов, было наибольшим возможным. Найдите, чему равно это наибольшее значение.

10 класс

10.1. Найдите все возможные целые ненулевые числа a, b, c , такие, что два различных корня уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ являются также и корнями уравнения $x^3 + bx^2 + ax + c = 0$.

10.2. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b выполнено неравенство

$$|a\sqrt{3} - b\sqrt{5}| > \frac{4}{4a + 5b}.$$

10.3. Точки M и N — середины сторон AC и BC треугольника ABC . Докажите, что окружность, проходящая через точки C, M и N , касается стороны AB тогда и только тогда, когда

$$4AB = \frac{AC^2 + BC^2}{\sqrt{2}}.$$

10.4. Какое наименьшее число N четырёхзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, нужно выбрать, чтобы, какие бы две различные из этих цифр ни взять, среди выбранных N чисел найдётся хотя бы одно число, содержащее обе эти цифры?

11 класс

11.1. Действительные ненулевые числа a, b, c ($b > 0$) таковы, что два различных корня уравнения $ax^2 + bx - c = 0$ являются также и корнями уравнения $x^3 + bx^2 + ax - c = 0$. Докажите, что имеет место неравенство

а) $abc > 16$;

б) $abc \geq \frac{3125}{108}$

11.2. Найдите $\left\{ \frac{2009!}{2011} \right\}$, где $\{x\}$ — дробная часть числа x .

11.3. Точка M — середина стороны AB остроугольного треугольника ABC , точки P и Q — основания высот AP и BQ этого треугольника. Известно, что окружность, проходящая через точки B, M и P , касается стороны AC . Докажите, что окружность, проходящая через точки A, M и Q , касается продолжения стороны BC .

11.4. Какое наименьшее число N четырёхзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, нужно выбрать, чтобы, какие бы две различные из этих цифр ни взять, обе эти цифры присутствуют

а) хотя бы в одном из выбранных N чисел ?

б*) хотя бы в одном, но не более чем в двух, из выбранных N чисел ?

8 класс

8.1. Ответ: 1.

Из условия следует, что $1/a + 1/b + 1/c = 1$. Обозначим $x = 1/a$, $y = 1/b$, $z = 1/c$. Тогда

$$x + y + z = 1. \quad (1)$$

Перепишем данное в условии выражение

$$A = x \left(y + z + \frac{yz}{y+z} \right) + y \left(z + x + \frac{zx}{z+x} \right) + z \left(x + y + \frac{xy}{x+y} \right) - \\ - \frac{xyz}{xy + yz + zx} \left(x + y + z + \frac{xy}{x+y} + \frac{yz}{y+z} + \frac{zx}{z+x} \right) + x^2 + y^2 + z^2.$$

Учитывая (1), получим

$$A = x \left(1 - x + \frac{yz}{y+z} \right) + y \left(1 - y + \frac{zx}{z+x} \right) + z \left(1 - z + \frac{xy}{x+y} \right) - \\ - \frac{xyz}{xy + yz + zx} \left(1 + \frac{xy}{x+y} + \frac{yz}{y+z} + \frac{zx}{z+x} \right) + x^2 + y^2 + z^2 = \\ = x - x^2 + \frac{xyz}{y+z} + y - y^2 + \frac{xyz}{x+z} + z - z^2 + \frac{xyz}{x+y} + x^2 + y^2 + z^2 - \frac{xyz}{xy + yz + zx} - \\ - \left(\frac{xyz}{xy + yz + zx} \cdot \frac{xy}{x+y} + \frac{xyz}{xy + yz + zx} \cdot \frac{yz}{y+z} + \frac{xyz}{xy + yz + zx} \cdot \frac{zx}{z+x} \right).$$

Приводя подобные и группируя, получим

$$A = 1 - \left(\frac{xyz}{y+z} - \frac{xyz}{xy + yz + zx} \cdot \frac{yz}{y+z} \right) + \left(\frac{xyz}{x+z} - \frac{xyz}{xy + yz + zx} \cdot \frac{xz}{x+z} \right) + \\ + \left(\frac{xyz}{x+y} - \frac{xyz}{xy + yz + zx} \cdot \frac{xy}{x+y} \right) - \frac{xyz}{xy + yz + zx} = \\ = 1 + \frac{xyz(xy + zx)}{(xy + yz + zx)(y + z)} + \frac{xyz(xz + yz)}{(xy + yz + zx)(x + y)} + \\ + \frac{xyz(zy + xy)}{(xy + yz + zx)(z + x)} - \frac{xyz}{xy + yz + zx} = \\ = 1 + \frac{x^2yz}{xy + yz + zx} + \frac{xyz^2}{xy + yz + zx} + \frac{xy^2z}{xy + yz + zx} - \frac{xyz}{xy + yz + zx} = \\ = 1 + \frac{xyz(x + y + z)}{xy + yz + zx} - \frac{xyz}{xy + yz + zx} = 1.$$

8.2. Ответ: $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$.

Так как число $8[x]$ целое, то исходное уравнение может быть переписано в виде $[x^2 - 4[x] + 1] - [-x^2 + 4[x] - 1] = 0$. Обозначим $y = x^2 - 4[x] + 1$, тогда $[y] = [-y]$. Легко видеть, то при $y > 0$ имеем $0 \leq [y] = [-y] \leq -1$, что невозможно. Аналогично при $y < 0$ имеем $-1 \geq [y] = [-y] \geq 0$. Поэтому $y = 0$, т.е. $x^2 - 4[x] + 1 = 0$. Заметим, что при $x < 1$ имеем $[x] \leq 0$, поэтому $x^2 - 4[x] + 1 \geq 1 > 0$, следовательно искомые $x \geq 1$. Пусть $x = n + a$, где $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a < 1$. Тогда

$$0 = x^2 - 4[x] + 1 = n^2 + 2na + a^2 - 4n + 1 = n(n - 4) + 2na + a^2 \geq n(n - 4),$$

откуда $n \leq 4$. Следовательно, $1 \leq n \leq 4$.

При $[x] = n = 1$ имеем $x^2 - 4[x] + 1 = x^2 - 4 + 1 = x^2 - 3 = 0$, откуда $x = \sqrt{3}$.

При $[x] = n = 2$ имеем $x^2 - 4[x] + 1 = x^2 - 8 + 1 = x^2 - 7 = 0$, откуда $x = \sqrt{7}$.

При $[x] = n = 3$ имеем $x^2 - 4[x] + 1 = x^2 - 12 + 1 = x^2 - 11 = 0$, откуда $x = \sqrt{11}$.

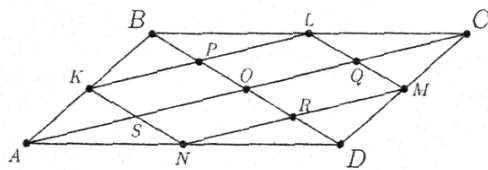
При $[x] = n = 4$ имеем $x^2 - 4[x] + 1 = x^2 - 16 + 1 = x^2 - 15 = 0$, откуда $x = \sqrt{15} < 4$,

что противоречит условию $[x] = 4$.

8.3. Ответ: б) нет, не верно.

а) Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, а K , L , M и N — середины его сторон AB , BC , CD и DA соответственно. Допустим, что диагонали AC , BD и отрезки KM , LN пересекаются все четыре в одной точке, которую обозначим через O .

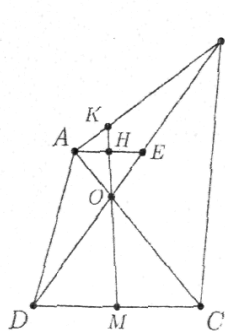
Первое решение. Так как KL и MN — средние линии в треугольниках ABC и CDA соответственно, то $KL \parallel AC$, $MN \parallel AC$ и $KL = MN = \frac{1}{2}AC$. Поэтому



$KLMN$ — параллелограмм. Далее, обозначим через P и R точки пересечения диагонали BD с отрезками KL и MN соответственно, а через Q и S — точки пересечения диагонали AC с отрезками LM и KN соответственно (см.

рис.). Так как $KL \parallel AC$ и по условию $BK = KA$, то по теореме Фалеса $BP = PO$, а так как $MN \parallel AC$ и по условию $CM = MD$, то по теореме Фалеса $DR = RO$. В частности, $BO = 2 \cdot PO$ и $DO = 2 \cdot RO$. Аналогично, $CQ = QO$ и $AS = SO$, а значит, $CO = 2 \cdot QO$ и $AO = 2 \cdot SO$. Поскольку $KLMN$ — параллелограмм, то $PO = RO$ (так как $\triangle KPO = \triangle MRO$ по сторонам $KP = PM$ и прилежащим к ним углам). Поэтому $BO = 2 \cdot PO = 2 \cdot RO = DO$. Аналогично получаем $CO = AO$. Следовательно, диагонали AC и BD в четырёхугольнике $ABCD$ точкой O их пересечения делятся пополам, т.е. $ABCD$ — параллелограмм.

Второе решение. Допустим, что прямые AB и CD не параллельны. Проведём

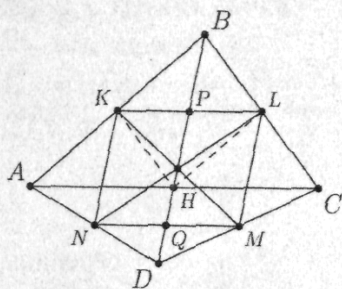


через точку A прямую, параллельную прямой CD . Пусть эта прямая пересекает диагональ BD (или её продолжение) в точке E . Через H обозначим середину отрезка AE (см. рис.). Тогда четырёхугольник $AECD$ — трапеция с основаниями AE и CD . Хорошо известно (и несложно доказывается), что в трапеции диагонали и отрезок, соединяющий середины её оснований, пересекаются все три в одной точке. Следовательно, так как O — точка пересечения диагоналей AC и DE трапеции $AECD$, а точка M — середина её основания CD , то прямая MO пересекает основание AE трапеции в его середине — точке H . Значит, HK — средняя линия $\triangle ABE$ и поэтому $HK \parallel BE$, что невозможно. Следовательно, $AB \parallel CD$. Точно так же доказывается, что $AD \parallel BC$, а значит, четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Отметим, что поскольку утверждение, обратное к установленному в п. а) задачи, очевидно верно, то, следовательно, параллелограмм можно равносильным образом определить как выпуклый четырёхугольник, диагонали которого и отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются все четыре в одной точке.

б) Приведём пример выпуклого четырёхугольника, одна из диагоналей которого и отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон, пересекаются все три в одной точке, но который не является параллелограммом.

Возьмём какой-либо $\triangle ABC$ и на продолжении его медианы BH за точку H отметим точку D , так, чтобы $DH \neq BH$. Получившийся выпуклый четырёхугольник



$ABCD$ — не параллелограмм, поскольку его диагонали точкой H их пересечения не делятся обе пополам. Докажем, что $ABCD$ — искомый четырёхугольник. Пусть K, L, M и N — середины его сторон AB, BC, CD и DA соответственно, а P и Q — точки пересечения диагонали BD и соответственно отрезков KL и MN (см. рис.). Так как четырёхугольник $BLHK$ — параллелограмм (KH и LH — средние линии $\triangle ABC$), а BH и

KL — его диагонали, то $KP = PL$, т. е. точка P — середина отрезка KL . Аналогично, точка Q — середина отрезка MN . Далее, поскольку четырёхугольник $KLMN$ — параллелограмм (доказательство см. в первом решении п. а)), то его диагонали KM и LN и отрезок PQ , соединяющий середины его противоположных сторон, пересекаются все в одной точке. Но, с другой стороны, KM и LN — это отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника $ABCD$, а отрезок PQ лежит на его диагонали BD . Следовательно, в четырёхугольнике $ABCD$ диагональ BD и отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются все три в одной точке.

Видим, что в построенном четырёхугольнике $ABCD$ точка пересечения H его диагоналей делит диагональ AC пополам. Для полноты изложения отметим, что верно и обратное утверждение: если в выпуклом четырёхугольнике одна из диагоналей и отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются все три в одной точке, то точка пересечения диагоналей четырёхугольника делит другую его диагональ пополам.

8.4. Ответ: 120.

Пусть, для определённости, используемые цвета — белый и чёрный. Подмножество, в состав которого входят и белые и чёрные элементы, будем называть разноцветным.

Первое решение. Пусть мы покрасили k элементов 9-элементного множества в белый цвет, а остальные $9 - k$ — в чёрный. Не нарушая общности рассуждений, считаем, что белых элементов не более половины, т. е. что $k \leq 4$. Допустим, что $k \leq 3$, тогда $9 - k \geq 6$. Возьмём какой-либо чёрный элемент A и перекрасим его в белый цвет. Как изменится при этом число разноцветных подмножеств? Перестанут быть разноцветными только те 4-элементные подмножества, в которые входили чёрный A и ещё 3 белых элемента. Если $k < 3$, то таких 4-элементных подмножеств нет. Если же $k = 3$, то такое подмножество только одно — оно состояло из чёрного A и всех трёх белых элементов. Итак, в совокупности всех тех 4-элементных подмножеств, которые были до перекраски разноцветными, перестает быть после перекраски разноцветным не более одного подмножества. Но после перекраски в совокупность разноцветных 4-элементных

подмножеств добавляется по меньшей мере одно новое подмножество — то, которое до перекраски состояло из 4 и каких-то 3-х других чёрных элементов (в действительности, как легко видеть, добавляется больше, чем одно, подмножество, но этот факт нам не нужен). Итак, если при некоторой раскраске 9-элементного множества в два цвета число разноцветных его 4-элементных подмножеств наибольшее среди всех раскрасок, то можем считать, что в этой раскраске 4 белых и 5 чёрных элементов.

Остаётся найти, сколько всего при такой раскраске (4 белых и 5 чёрных элементов) имеется различных разноцветных 4-элементных подмножеств. Подмножеств, состоящих из 1-ого белого и 3-х чёрных элементов, ровно $4 \cdot 10 = 40$. Подмножеств, состоящих из 2-х белых и 2-х чёрных элементов, ровно $\frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 6 \cdot 10 = 60$. Наконец, подмножеств, состоящих из 3-х белых и 1-ого чёрного элемента, ровно $4 \cdot 5 = 20$. Итак, различных разноцветных 4-элементных подмножеств ровно $40 + 60 + 20 = 120$.

Найти это число можно несколько проще: число всех 4-элементных подмножеств в множестве из 9-и элементов равно $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$. Но при такой раскраске (4 белых и 5 чёрных элементов) только 6 четырёхэлементных подмножеств не являются разноцветными: одно подмножество состоит из 4-х белых элементов, а пять других — из 4-х чёрных. Значит, число различных разноцветных 4-элементных подмножеств равно $126 - 6 = 120$.

Второе решение. Назовём подмножество одноцветным, если оно состоит только из элементов одного цвета. Если элементы некоторого множества покрашены, то любое непустое его подмножество либо разноцветное, либо одноцветное. Поэтому если при некоторой раскраске множества из 9-и элементов в два цвета число его разноцветных 4-элементных подмножеств наибольшее среди всех таких раскрасок, то при этой раскраске число его одноцветных 4-элементных подмножеств — наименьшее возможное.

Поэтому будем искать раскраску, при которой число одноцветных 4-элементных подмножеств наименьшее (эта раскраска, как сказано, даёт наибольшее возможное число разноцветных 4-элементных подмножеств). Если раскраска множества из 9-и элементов содержит не менее 6-и элементов одного цвета, то тогда число одноцветных 4-элементных подмножеств также не менее $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$. Если же раскраска содержит 4 элемента одного и 5 элементов другого цвета, то для неё число одноцветных 4-элементных подмножеств равно $1 + 5 = 6$. Следовательно, наибольшее число разноцветных 4-элементных подмножеств получается при той раскраске в два цвета, в которой 4 элемента белые и 5 элементов чёрные. Число таких подмножеств находится точно так же, как и в конце первого решения.

Заметим, что ещё одно решение этой задачи можно получить непосредственным перебором всех существенно различных (с точки зрения условия задачи) раскрасок множества из 9-и элементов в два цвета. Поскольку две раскраски множества в два цвета, у которых совпадают количества элементов одного (не обязательно одного и того же) цвета, дают одно и то же число разноцветных подмножеств, то достаточно рассмотреть пять раскрасок, имеющих соответственно ровно 0, 1, 2, 3, 4 белые клетки. Для каждой из этих пяти раскрасок найти число разноцветных 4-элементных подмножеств (аналогично тому, как это сделано в конце первого решения) и выбрать из найденных чисел наибольшее.

подмножеств добавляется по меньшей мере одно новое подмножество — то, которое до перекраски состояло из A и каких-то 3-х других чёрных элементов (в действительности, как легко видеть, добавляется больше, чем одно, подмножество, но этот факт нам не нужен). Итак, если при некоторой раскраске 9-элементного множества в два цвета число разноцветных его 4-элементных подмножеств наибольшее среди всех раскрасок, то можем считать, что в этой раскраске 4 белых и 5 чёрных элементов.

Остаётся найти, сколько всего при такой раскраске (4 белых и 5 чёрных элементов) имеется различных разноцветных 4-элементных подмножеств. Подмножеств, состоящих из 1-ого белого и 3-х чёрных элементов, ровно $4 \cdot 10 = 40$. Подмножеств, состоящих из 2-х белых и 2-х чёрных элементов, ровно $\frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 6 \cdot 10 = 60$. Наконец, Подмножеств, состоящих из 3-х белых и 1-ого чёрного элемента, ровно $4 \cdot 5 = 20$. Итак, различных разноцветных 4-элементных подмножеств ровно $40 + 60 + 20 = 120$.

Найти это число можно несколько проще: число всех 4-элементных подмножеств в множестве из 9-и элементов равно $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$. Но при такой раскраске (4 белых и 5 чёрных элементов) только 6 четырёхэлементных подмножества не являются разноцветными: одно подмножество состоит из 4-х белых элементов, а пять других — из 4-х чёрных. Значит, число различных разноцветных 4-элементных подмножеств равно $126 - 6 = 120$.

Второе решение. Назовём подмножество одноцветным, если оно состоит только из элементов одного цвета. Если элементы некоторого множества покрашены, то любое непустое его подмножество либо разноцветное, либо одноцветное. Поэтому если при некоторой раскраске множества из 9-и элементов в два цвета число его разноцветных 4-элементных подмножеств наибольшее среди всех таких раскрасок, то при этой раскраске число его одноцветных 4-элементных подмножеств — наименьшее возможное.

Поэтому будем искать раскраску, при которой число одноцветных 4-элементных подмножеств наименьшее (эта раскраска, как сказано, даёт наибольшее возможное число разноцветных 4-элементных подмножеств). Если раскраска множества из 9-и элементов содержит не менее 6-и элементов одного цвета, то тогда число одноцветных 4-элементных подмножеств также не менее $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$. Если же раскраска содержит 4 элемента одного и 5 элементов другого цвета, то для неё число одноцветных 4-элементных подмножеств равно $1 + 5 = 6$. Следовательно, наибольшее число разноцветных 4-элементных подмножеств получается при той раскраске в два цвета, в которой 4 элемента белые и 5 элементов чёрные. Число таких подмножеств находится точно так же, как и в конце первого решения.

Заметим, что ещё одно решение этой задачи можно получить непосредственным перебором всех существенно различных (с точки зрения условия задачи) раскрасок множества из 9-и элементов в два цвета. Поскольку две раскраски множества в два цвета, у которых совпадают количества элементов одного (не обязательно одного и того же) цвета, дают одно и то же число разноцветных подмножеств, то достаточно рассмотреть пять раскрасок, имеющих соответственно ровно 0, 1, 2, 3, 4 белые клетки. Для каждой из этих пяти раскрасок найти число разноцветных 4-элементных подмножеств (аналогично тому, как это сделано в конце первого решения) и выбрать из найденных чисел наибольшее.

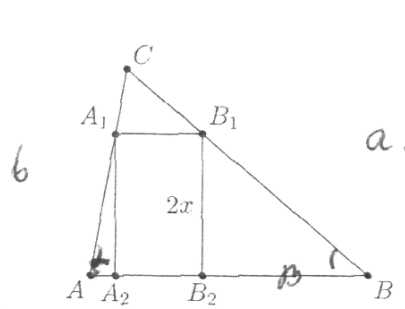


Рис. 1

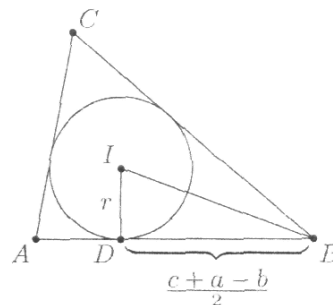


Рис. 2

Заметим, что (см. рис. 2) $\frac{a+c-b}{2} = r \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$, где r — радиус вписанной окружности треугольника ABC . Таким образом, условие $AC = AB_2 + CB_1$ равносильно тому, что $A_1A_2 = B_1B_2$ — удвоенный радиус вписанной окружности треугольника ABC .

Аналогично, этому же равносильно и условие $BC = BA_2 + CA_1$.

9.4. Ответ: 225.

Пусть, для определённости, используемые цвета — белый и чёрный. Подмножество, в состав которого входят и белые и чёрные элементы, будем называть разноцветным, а подмножество, состоящее из элементов одного цвета, — одноцветным. Далее мы будем пользоваться следующим хорошо известным фактом: число всех непустых подмножеств множества, состоящего из n элементов, равно $2^n - 1$.

Если элементы некоторого множества покрашены, то любое непустое его подмножество либо разноцветное, либо одноцветное. Поэтому если при некоторой раскраске множества из 8-и элементов в два цвета число его разноцветных подмножеств наибольшее среди всех таких раскрасок, то при этой раскраске число его одноцветных подмножеств — наименьшее возможное.

Поэтому будем искать раскраску, при которой число одноцветных подмножеств наименьшее (эта раскраска, как сказано, даёт наибольшее возможное число разноцветных подмножеств). Если раскраска множества из 8-и элементов содержит не менее 5-и элементов одного цвета, то число его одноцветных подмножеств не менее $2^5 - 1$. Если же раскраска содержит по 4 элемента каждого из двух цветов, то для неё число одноцветных подмножеств равно $(2^4 - 1) + (2^4 - 1) = 2^5 - 2 < 2^5 - 1$. Следовательно, наибольшее число разноцветных подмножеств получается при той раскраске в два цвета, в которой 4 элемента белые и 4 элемента чёрные. Так как при такой раскраске число одноцветных подмножеств, как подсчитано выше, равно $2^5 - 2$, а число всех непустых подмножеств множества из 8-и элементов равно $2^8 - 1$, то при этой раскраске число разноцветных подмножеств равно $2^8 - 1 - (2^5 - 2) = 2^5(2^3 - 1) + 1 = 32 \cdot 7 + 1 = 224 + 1 = 225$.

10 класс

10.1. Ответ: $a = 2$, $b = 4$, $c = -4$.

Обозначим x_1 , x_2 — различные корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, т.е. нули функций $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = x^3 + bx^2 + ax + c$. Заметим, что из условия следует $f(0) = g(0) = c \neq 0$. Пусть $F(x) = g(x) - f(x)$. Тогда 0, x_1 , x_2 — различные нули многочлена $F(x)$. Поэтому $F(x) = x(x - x_1)(x - x_2)$, откуда

$$x^3 + (b-a)x^2 + (a-b)x = x(x-x_1)(x-x_2) \implies (b-a)x + (a-b) = -(x_1+x_2)x + x_1x_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Поэтому $x_1 + x_2 = a - b$ и $x_1 x_2 = a - b$. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -b/a$, $x_1 x_2 = c/a$, откуда, в частности, следует, что $c = -b$. Кроме того $a - b = -b/a$ или $a^2 - ab = -b$, т.е. $a^2 = b(a - 1)$. Заметим, что тогда $a \neq 1$, и, значит,

$$b = \frac{a^2}{a - 1} = \frac{(a^2 - 1) + 1}{a - 1} = a + 1 + \frac{1}{a - 1}.$$

Поскольку a и b — целые числа, то и число $1/(a - 1)$ так же целое, что возможно лишь при $a = 0$ и $a = 2$. Но $a \neq 0$, Следовательно, $a = 2$ и тогда $b = 4$, $c = -4$.

Проверим, что найденная тройка чисел удовлетворяет условию задачи. Действительно, уравнение $2x^2 + 4x - 4 = 0$ имеет два различных корня $-1 \pm \sqrt{3}$, которые являются корнями уравнения $x^3 + 4x^2 - 2x - 4$ поскольку

$$\begin{aligned} & (-1 \pm \sqrt{3})^3 + 4 \cdot (-1 \pm \sqrt{3})^2 - 2 \cdot (-1 \pm \sqrt{3}) - 4 = \\ & = -1 \pm 3\sqrt{3} - 3 \cdot 3 \pm 3\sqrt{3} + 4 \mp 8\sqrt{3} + 12 - 2 \pm 2\sqrt{3} - 4 = 0. \end{aligned}$$

10.2. Домножив левую часть требуемого неравенства на $a\sqrt{3} + b\sqrt{5}$, получим $|a\sqrt{3} - b\sqrt{5}|(a\sqrt{3} + b\sqrt{5}) = |3a^2 - 5b^2|$. Если бы $|3a^2 - 5b^2| = 1$ при некоторых натуральных a и b , то или $3a^2 - 5b^2 = 1$, или $3a^2 - 5b^2 = -1$. Однако в первом случае $3a^2$ должно быть сравнимо с 1 по модулю 5, чего быть не может, так $3a^2 \equiv 0$ при $a \equiv 0$, $3a^2 \equiv 3$ при $a \equiv \pm 1$, $3a^2 \equiv 12 \equiv 2$ при $a \equiv \pm 2$ (все сравнения по модулю 5). Во втором случае $-5b^2$ должно быть сравнимо с (-1) по модулю 3, т.е. $5b^2$ должно быть сравнимо с 1 по модулю 3, чего также быть не может, поскольку $5b^2 \equiv 0$ при $b \equiv 0$, $5b^2 \equiv 5 \equiv 2$ при $b \equiv \pm 1$ (все сравнения по модулю 3).

Следовательно, $|3a^2 - 5b^2| \neq 1$ при всех натуральных a и b , откуда $|3a^2 - 5b^2| \geq 2$ при всех натуральных a и b . Поэтому

$$\begin{aligned} |a\sqrt{3} - b\sqrt{5}| &= \frac{|3a^2 - 5b^2|}{a\sqrt{3} + b\sqrt{5}} \geq \frac{2}{a\sqrt{3} + b\sqrt{5}} = \frac{4}{2a\sqrt{3} + 2b\sqrt{5}} \geq [2\sqrt{3} < 4, 2\sqrt{5} < 5] \geq \\ &\geq \frac{4}{4a + 5b}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

10.3. Пусть I — центр окружности Γ , проходящей через точки C , M , N ; r — радиус этой окружности. Пусть точки P и Q — точки пересечения отрезков AI и BI с окружностью Γ ; H — основания перпендикуляра, опущенного из точки I на сторону AB . Обозначим $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $x = AP$, $y = BQ$, $l = IH$.

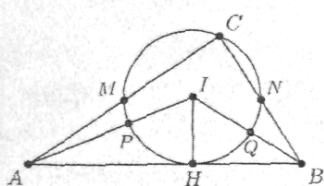


Рис. 1

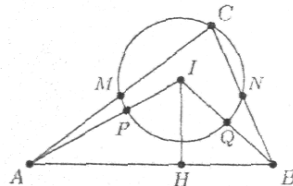


Рис. 2

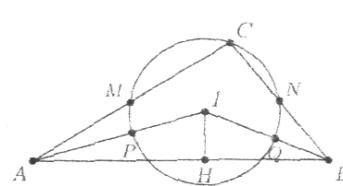


Рис. 3

$$a^2 = (b - \frac{c}{2})^2$$

$$a = b - \frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - b$$

$c = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$
 $a > b$
 work
 you

$\frac{b}{\sqrt{2}}$. Следовательно, $c = \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}}$ тогда и только тогда, когда $l = r$, т.е. окружность, проходящая через точки C, M, N , касается стороны AB .

Отметим, что при $c = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$ не возможно расположение, при котором H лежит

не на стороне AB , а на ее продолжении. Действительно, в этом случае (не нарушая общности, считаем, что H лежит левее точки A , см. рис. 4) имеем $c = BH - AH$, т.е.

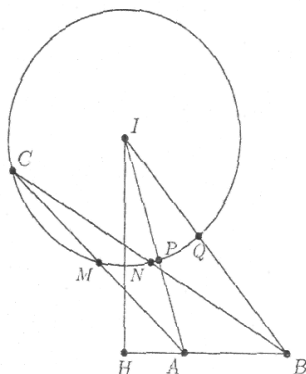


Рис. 4

$$\frac{a+b}{\sqrt{2}} = \sqrt{(y+r)^2 - l^2} - \sqrt{(x+r)^2 - l^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{b^2}{2} + r^2 - l^2} - \sqrt{\frac{a^2}{2} + r^2 - l^2} \iff$$

$$\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{a^2}{2} + r^2 - l^2} = \sqrt{\frac{b^2}{2} + r^2 - l^2} \iff$$

$$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + ab + \frac{a^2}{2} + r^2 - l^2 + 2\frac{a+b}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{a^2}{2} + r^2 - l^2} = \frac{b^2}{2} + r^2 - l^2,$$

что, очевидно, невозможно.

10.4. Ответ: $N = 6$.

Пусть некоторая цифра, скажем, 1, присутствует в точности в k из выбранных N четырёхзначных чисел. В каждом четырёхзначном числе, в котором эта цифра присутствует, она с другими 3-я цифрами этого числа образует не более 3-х различных пар (ровно 3, если в числе нет повторяющихся цифр, и менее 3-х, если это не так). Поскольку всего различных пар, которые можно составить с этой цифрой и остальными 7-ю цифрами, ровно 7 и все они должны присутствовать среди тех k чисел, которые содержат рассматриваемую цифру, то должно выполняться неравенство $3k \geq 7$, откуда натуральное $k \geq 3$. Итак, каждая из 8-и цифр должна входить не менее чем в 3 из выбранных чисел. Следовательно, общее число вхождений всех 8-и цифр в выбранные

числа должно быть не менее $8 \cdot 3 = 24$. Но N выбранных четырёхзначных чисел обеспечивают ровно $4N$ вхождений в них цифр. Значит, должно выполняться неравенство $4N \geq 24$, откуда $N \geq 6$.

Остаётся построить пример 6-и четырёхзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, такой, чтобы любые две различные из этих цифр присутствовали хотя бы в одном из чисел примера:

- 1) 1 2 3 4
- 2) 1 5 6 7
- 3) 1 2 6 8
- 4) 2 3 5 7
- 5) 3 4 6 8
- 6) 4 5 7 8

В том, что построенный пример удовлетворяет сформулированному выше условию, легко убедиться непосредственной проверкой.

II класс

11.1. Обозначим x_1, x_2 — различные корни уравнения $ax^2 + bx - c = 0$, т.е. нули функций $f(x) = ax^2 + bx - c$ и $g(x) = x^3 + bx^2 + ax - c$. Заметим, что из условия следует $f(0) = g(0) = c \neq 0$. Пусть $F(x) = g(x) - f(x)$. Тогда 0, x_1, x_2 различные нули многочлена $F(x)$. Поэтому $F(x) = x(x - x_1)(x - x_2)$, откуда

$$x^3 + (b-a)x^2 + (a-b)x = x(x-x_1)(x-x_2) \implies (b-a)x + (a-b) = -(x_1+x_2)x + x_1x_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Поэтому $x_1 + x_2 = a - b$ и $x_1x_2 = a - b$. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -b/a$, $x_1x_2 = -c/a$, откуда, в частности, следует, что $c = b$. Кроме того $a - b = -b/a$ или $a^2 - ab = -b$, т.е. $a^2 = b(a - 1)$. Заметим, что тогда $a \neq 1$, и, в силу условия $b > 0$ имеет место неравенство $a > 1$.

а) Так как уравнение $f(x) = 0$ имеет два различных действительных корня, то

$$b^2 - 4ac = [b = c] = b^2 - 4ab = b(b - 4a) > 0,$$

и так как $b > 0$, то $b > 4a$, что в силу $a > 1$ дает оценку $b > 4$. Следовательно, $abc = ab^2 > 1 \cdot 4^2 = 16$, что и требовалось доказать.

б) *Первый способ.* Из ранее приведенных соотношений имеем $ab = a^2 + b$. Поэтому

$$\begin{aligned} abc = [b = c] = ab^2 = (a^2 + b)b &= \left(\frac{a^2b}{2} + \frac{a^2b}{2} + \frac{b^2}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{b^2}{3} \right) \geq \\ &\geq 5 \sqrt[5]{\frac{a^2b}{2} \cdot \frac{a^2b}{2} \cdot \frac{b^2}{3} \cdot \frac{b^2}{3} \cdot \frac{b^2}{3}} = 5 \sqrt[5]{\frac{a^4b^8}{4 \cdot 27}}, \end{aligned}$$

откуда

$$(ab^2)^5 \geq \frac{5^5}{108} a^4 b^8 \implies abc = ab^2 \geq \frac{3125}{108},$$

что и требовалось. Заметим, что равенство достигается при $\frac{a^2}{2} = \frac{b}{3}$, что с учетом $b = \frac{a^2}{a-1}$ дает $a - 1 = 2/3$, т.е. $a = 5/3$.

Второй способ. Из ранее приведенных соотношений имеем $abc = ab^2 = \frac{a^5}{(a-1)^2}$.

Найдем минимум функции $h(a) = \frac{a^5}{(a-1)^2}$ на промежутке $(1; +\infty)$. Имеем

$$h'(a) = 0 \iff \frac{5a^4 - 2(a-1)a^5}{(a-1)^4} = \frac{a^4(a-1)(3a-5)}{(a-1)^4} = 0,$$

откуда $a = 5/3$. Так как $h'(a) < 0$ на промежутке $(1; 5/3)$ и $h'(a) > 0$ на промежутке $(5/3; +\infty)$, то в точке $a = 5/3$ функция $h(a)$ достигает своего минимума, равного $h(5/3) = \frac{5^5}{108}$. Следовательно, $abc \geq \frac{5^5}{108}$, что и требовалось доказать.

11.2. Ответ: $\frac{1}{2011}$.

Поскольку 2011 — простое число, то $2010! \equiv -1 \pmod{2011}$ (следует из теоремы Вильсона), или, что то же самое $2010! \equiv 2010 \pmod{2011}$. Это значит, что

$$2010! = 2011n + 2010 \quad (*)$$

для некоторого натурального n . Заметим при этом, что поскольку $2011n = 2010 \cdot (2009! - 1)$ делится на 2010, а 2010 и 2011 — взаимно простые числа, то n делится на 2010. Далее, согласно (*) имеем: $\frac{2010!}{2011} = n + \frac{2010}{2011}$, откуда, разделив обе части равенства на 2010, получим:

$$\frac{2009!}{2011} = \frac{n}{2010} + \frac{1}{2011}.$$

Таким образом, поскольку (как было показано) $\frac{n}{2010}$ — целое число, дробная часть числа $\frac{2009!}{2011}$ равна $\frac{1}{2011}$.

11.3. Пусть Γ — окружность, проходящая через точки M , P , B . Обозначим

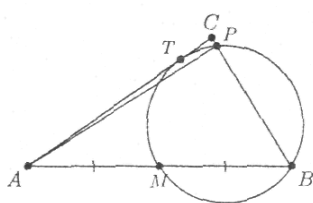


Рис. 1

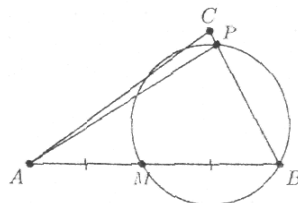


Рис. 2

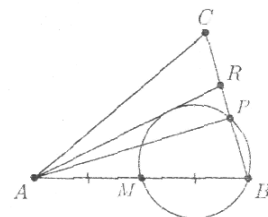


Рис. 3

$a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Докажем, что окружность Γ касается стороны AC тогда и только тогда, когда $c = (a+b)/\sqrt{2}$.

Необходимость. Если T — точка касания окружности Γ со стороной AC , то по теореме о секущих и касательных имеем

$$AT^2 = c \cdot c/2, \quad CT^2 = CP \cdot a = b \cos \angle C \cdot a.$$

Тогда

$$b = AT + TC = c/\sqrt{2} + \sqrt{ab \cos \angle C} = [\text{теорема косинусов для } \triangle ABC] =$$

$$= c/\sqrt{2} + \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)/2}.$$

Поэтому

$$(b - c/\sqrt{2})^2 = (a^2 + b^2 - c^2)/2 \implies (b - c\sqrt{2})^2 = a^2.$$

Если бы $a = b - c\sqrt{2}$, то $c\sqrt{2} = b - a < c$, противоречие. Следовательно, $a = c\sqrt{2} - b$, т.е. $c = (a + b)/\sqrt{2}$.

Достаточность. Пусть $c = (a + b)/\sqrt{2}$. Предположим, от противного, что окружность Γ не касается стороны AC . Возможны два случая: окружность Γ пересекает прямую AC (рис.2), окружность Γ не имеет с прямой AC общих точек (рис. 3). Рассмотрим второй из этих случаев. Проведем касательную AR окружности Γ . Тогда по ранее доказанному

$$c = (AR + RB)/\sqrt{2} < [AC + CR > AR] < (AC + CR + RB)/\sqrt{2} = (AC + CB)/\sqrt{2} = (a + b)/\sqrt{2},$$

что противоречит условию. Аналогично устанавливается невозможность и первого случая.

Пусть Γ_1 — окружность, проходящая через точки M , Q , A . Докажем, что окружность Γ_1 касается продолжения стороны BC тогда и только тогда, когда $c = (a + b)/\sqrt{2}$.

Необходимость. Если U — точка касания окружности Γ_1 с продолжением стороны BC , то по теореме о секущих и касательных имеем

$$BU^2 = c \cdot c/2, \quad CU^2 = CQ \cdot b = a \cos \angle C \cdot b.$$

Тогда

$$a = BU - CU = c/\sqrt{2} - \sqrt{ab \cos \angle C} =$$

$$= [\text{теорема косинусов для } \triangle ABC] = c/\sqrt{2} - \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)/2}.$$

Поэтому

$$(c/\sqrt{2} - a)^2 = (a^2 + b^2 - c^2)/2 \implies (c\sqrt{2} - a)^2 = b^2.$$

Если бы $b = a - c\sqrt{2}$, то $c\sqrt{2} = a - b < c$, противоречие. Следовательно, $b = c\sqrt{2} - a$, т.е. $c = (a + b)/\sqrt{2}$.

Достаточность доказывается по той же схеме, что и ранее для касания окружности Γ стороны AC .

Таким образом, касание окружности Γ стороны AC равносильно касанию окружности Γ_1 продолжения стороны BC .

11.4. Ответ: а) $N = 6$, б) $N = 7$.

а) Пусть некоторая цифра, скажем, 1, присутствует в точности в k из выбранных N четырёхзначных чисел. В каждом четырёхзначном числе, в котором эта цифра присутствует, она с другими 3-я цифрами этого числа образует не более 3-х различных пар (ровно 3, если в числе нет повторяющихся цифр, и менее 3-х, если это не так). Поскольку всего различных пар, которые можно составить с этой цифрой и остальными 7-ю цифрами, ровно 7 и все они должны присутствовать среди тех k чисел, которые содержат рассматриваемую цифру, то должно выполняться неравенство $3k \geq 7$, откуда

натуральное $k \geq 3$. Итак, каждая из 8-и цифр должна входить не менее чем в 3 из выбранных чисел. Следовательно, общее число вхождений всех 8-и цифр в выбранные числа должно быть не менее $8 \cdot 3 = 24$. Но N выбранных четырёхзначных чисел обеспечивают ровно $4N$ вхождений в них цифр. Значит, должно выполняться неравенство $4N \geq 24$, откуда $N \geq 6$.

Остаётся построить пример 6-и четырёхзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, такой, чтобы любые две различные из этих цифр присутствовали хотя бы в одном из чисел примера:

- 1) 1 2 3 4
- 2) 1 5 6 7
- 3) 1 2 6 8
- 4) 2 3 5 7
- 5) 3 4 6 8
- 6) 4 5 7 8

В том, что построенный пример удовлетворяет сформулированному выше условию, легко убедиться непосредственной проверкой.

Для дальнейшего заметим, что в приведённом примере есть пара цифр, которая входит в три из его чисел (пара (5, 7) входит в числа 2), 4) и 6)). Цель следующего п. б) — доказать, что так будет всегда, если выбранных четырёхзначных чисел 6 и любые две различные цифры входят хотя бы в одно из выбранных чисел.

б) Допустим, что можно выбрать 6 четырёхзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, так, чтобы любые две различные из этих цифр входили хотя бы в одно, но не более чем в два, из выбранных 6-и чисел. Тогда, как доказано в п. а), каждая цифра должна входить не менее чем в 3-и из выбранных чисел, а значит, ровно в 3, поскольку всего вхождений 8-и цифр в 6 четырёхзначных чисел ровно 24. В частности, отсюда следует, что в каждом из выбранных чисел нет повторяющихся цифр. Далее под парой цифр понимается их неупорядоченная пара.

Докажем вначале, что никакие два из выбранных 6-и чисел не могут иметь 3 одинаковые цифры. В самом деле, пусть такие два числа есть, и пусть, без нарушения общности, — это числа 1234 и 1235. Так как цифра 1 уже входит в два числа, то она может входить ещё только в одно число, и это число, чтобы обеспечить вхождение в выбранные числа пар (1, 6), (1, 7), (1, 8), должно быть 1678. Аналогично, ещё двумя числами должны быть числа 2678 и 3678. Итак, пять из шести чисел определены, и только в одном из них есть цифра 4. Значит, цифра 4 входит в выбранные числа не более 2-х раз, чего, как доказано выше, быть не может. Итак, любые два из выбранных 6-и четырёхзначных чисел могут иметь общими не более 2-х цифр.

Обозначим выбранные числа $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$. Через P_i обозначим множество, состоящее из тех 6-и пар, которые образованы цифрами числа a_i , $i = 1, \dots, 6$. По условию каждая пара, которую можно образовать из различных цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, входит хотя бы в одно из чисел a_i , $i = 1, \dots, 6$; поэтому всего различных элементов в множестве $\bigcup_{i=1}^6 P_i$ ровно $C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$. Далее, любые два различных множества P_i и P_k либо не пересекаются, т. е. $P_i \cap P_k = \emptyset$, либо их пересечение содержит ровно один элемент (если бы у P_i и P_k было два общих элемента, то у отвечающих им чисел a_i и a_k было бы три общие цифры, чего, как доказано выше, быть не может). Кроме того, пересечение любых трёх различных из множеств P_i , $i = 1, \dots, 6$, пусто (если

бы это было не так и $P_i \cap P_j \cap P_k \neq \emptyset$, то у отвечающих им чисел a_i , a_j и a_k была бы общая всем этим трём числам пара цифр, что по условию п. 6) не так).

Значит, по формуле включений и исключений имеем (ниже $N(X)$ — число элементов конечного множества X):

$$N\left(\bigcup_{i=1}^6 P_i\right) = \sum_{i=1}^6 N(P_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^6 N(P_i \cap P_j). \quad (*)$$

Так как $N\left(\bigcup_{i=1}^6 P_i\right) = 28$ и $N(P_i) = 6$ для любого $i = 1, \dots, 6$, то равенство (*) принимает вид

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^6 N(P_i \cap P_j) = 8. \quad (**)$$

Поскольку, как доказано, $N(P_i \cap P_j)$, $i \neq j$, равно либо 0, либо 1, то пусть x — число тех из 15-и пар (P_i, P_j) , $i < j$, для которых $N(P_i \cap P_j) = 0$, тогда для остальных 15-х пар имеем: $N(P_i \cap P_j) = 1$, — а значит, равенство (**) переписывается в виде $15 - x = 8$, или $x = 7$.

Остаётся показать, что x не может равняться 7. Допустим, что из множеств P_i , $i = 1, \dots, 6$, можно выбрать 7 пар непересекающихся множеств. Так как в каждую из этих 7-и пар входит 2 множества, то всего имеем $7 \cdot 2 = 14$ вхождений множеств, но поскольку множеств 6, то какое-то из них входит не менее 3-х раз — пусть это множество P_1 , и пусть, без нарушения общности, оно не пересекается с множествами P_2 , P_3 и P_4 . Рассмотрим, как устроены отвечающие этим множествам числа a_1 , a_2 , a_3 , a_4 . Пусть, без нарушения общности, число $a_1 = 1234$. Тогда ни одно из чисел a_2 , a_3 , a_4 не может совпадать с числом 5678. В самом деле, если бы, например, $a_2 = 5678$, то, поскольку числа a_3 и a_1 имеют не более одной общей цифры (множества P_3 и P_1 не пересекаются), у чисел a_2 и a_3 совпадали бы три цифры, чего, как доказано, быть не может. Стало быть, у чисел a_2 , a_3 , a_4 три цифры — это какие-то три из цифр 5, 6, 7, 8 (свои для каждого числа) и одна цифра — это какая-то из цифр 1, 2, 3, 4 (своя для каждого числа). Так как у каждого из 3-х чисел a_2 , a_3 , a_4 отсутствует ровно одна из четырёх цифр 5, 6, 7, 8, то какая-то из этих цифр у них общая (пусть это цифра 5), и, аналогично, какая-то из цифр 1, 2, 3, 4 не входит ни в одно из чисел a_2 , a_3 , a_4 (пусть это цифра 4). Тогда пара (4, 5) не входит ни в одно из выбранных 6-и чисел, поскольку цифра 5 входит 3 раза в числа a_2 , a_3 , a_4 и больше входить, как доказано, не может, и для любого из 3-х её вхождений с нею ни разу не входит цифра 4. Следовательно, $x \leq 6$. Полученное противоречие доказывает, что для вопроса 6) число $N \geq 7$.

Остаётся только построить пример 7-и четырёхзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, такой, чтобы любые две различные из этих цифр присутствовали хотя бы в одном, но не более чем в двух, из чисел примера. Для этого достаточно взять первые пять чисел такими же, как и в примере п. а), а шестое и седьмое числа следующими: б) 1458 и 7) 2478. В том, что построенный пример удовлетворяет сформулированному выше условию, легко убедиться непосредственной проверкой.

8 класс

8.5. Пусть a, b — целые числа. Докажите, что если число $3a^2 + 2ab - 2b^2$ делится на 7, то число $10a^2 + 23ab + 12b^2$ делится на 49.

8.6. У Васи есть n гирек общим весом 300 граммов. Каждая гирька весит целое положительное число граммов. При каком наименьшем n можно гарантировать, что каков бы ни был набор гирек у Васи, их можно разбить на три группы так, что в каждой группе общий вес гирек будет равен 100 граммов?

8.7. На стороне AB треугольника ABC отмечены точки K и L так, что $\angle ACK = \angle KCL = \angle LCB$. Точка M на стороне BC такова, что $\angle MKC = \angle BKM$. Найдите величину угла MLC , если известно, что точка L лежит на биссектрисе угла KMB .

8.8. В клетках таблицы 20×20 стоят знаки "+" или "-" (ровно один знак в каждой клетке). За один ход разрешается поменять на противоположные все знаки, стоящие в клетках некоторого столбца или некоторой строки. В начале в таблице стоят семь знаков "-", а в остальных клетках таблицы знаки "+". За несколько ходов получена таблица, в которой стоит 47 знаков "-", а в остальных клетках таблицы — знаки "+". Докажите, что в тех клетках, где в начальной таблице стояли знаки "-", по-прежнему стоят знаки "-".

9 класс

9.5. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите, что $a + b + c \geq ab + bc + ca$.

9.6. У Васи есть n гирек общим весом 300 граммов. Каждая гирька весит целое положительное число граммов. Петя указывает три натуральных числа k, l и m , сумма которых равна 300. При каком наименьшем n можно гарантировать, что, каков бы ни был набор гирек у Васи, и какие бы числа ни указал Петя, все гирьки можно разбить на три группы так, что в первой группе общий вес гирек будет равен k граммов, во второй — l граммов, а в третьей — m граммов?

9.7. Пусть P — точка пересечения диагоналей вписанного четырехугольника $ABCD$. На биссектрисах углов APD и BPC отмечены точки K и L соответственно, такие, что $AP = PK$ и $BP = PL$. Обозначим через M точку пересечения прямых AK и BL , а через N — прямых KD и LC . Докажите, что прямые KL и MN перпендикулярны.

9.8. В клетках таблицы 20×20 стоят знаки "+" или "-" (ровно один знак в каждой клетке). За один ход разрешается поменять на противоположные все знаки, стоящие в клетках некоторого столбца или некоторой строки. В начале в таблице стоят восемь знаков "-", а в остальных клетках таблицы — знаки "+". За несколько ходов получена таблица, в которой стоит 50 знаков "-", а в остальных клетках таблицы — знаки "+".

Докажите, что ровно в одной из клеток, где в начальной таблице стояли знаки "-", по-прежнему стоит знак "-".

10 класс

10.5. Найдите все тройки натуральных чисел (x, y, z) , удовлетворяющих равенству $3^x + 7^y = 4^z$.

10.6. В клетках таблицы $3n \times 3n$ стоят знаки "+" или "-" (ровно один знак в каждой клетке). За один ход разрешается поменять на противоположные все знаки, стоящие в клетках некоторого столбца или некоторой строки. В начале в таблице стоит один знак "-", а в остальных клетках таблицы — знаки "+". За несколько ходов получена таблица, в которой стоит 36 знаков "-", а в остальных клетках таблицы — знаки "+". Найдите все возможные значения, которые может принимать число n .

10.7. Точка M — середина стороны AB остроугольного неравностороннего треугольника ABC , H — ортоцентр этого треугольника, а I — центр вписанной в треугольник окружности. Докажите, что если точки M , I и H лежат на одной прямой, то длина отрезка CH равна радиусу вписанной окружности треугольника ABC .

10.8. На параболе $y = x^2$ отмечены четыре точки A, B, C, D , так, что четырёхугольник $ABCD$ — трапеция ($AD \parallel BC, AD > BC$). Пусть m и n — расстояния от точки пересечения диагоналей этой трапеции до середин её оснований AD и BC соответственно. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

11 класс

11.5. На ветви гиперболы $y = 1/x$, лежащей в первой координатной четверти, отмечены точки B и C (абсцисса точки C больше абсциссы точки B). Пусть A — точка пересечения прямой, проходящей через начало координат и точку B , со второй ветвью гиперболы. Докажите, что угол BAC равен одному из углов, образованных прямой BC с касательной к гиперболе в точке B .

11.6. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n , таких что как само число n , так и сумма его цифр $S(n)$ являются квадратами некоторых натуральных чисел и в десятичной записи которых
а) не более одной цифры 0; б) отсутствует цифра 0.

11.7. В клетках таблицы $n \times n$ стоят знаки "+" или "-" (ровно один знак в каждой клетке). За один ход разрешается поменять на противоположные все знаки, стоящие в клетках некоторого столбца или некоторой строки. В начале в таблице стоят два знака "-", а в остальных клетках таблицы — знаки "+". За несколько ходов получена таблица, в которой стоит девять знаков "-", а в остальных клетках таблицы — знаки "+". Найдите наименьшее и наибольшее значения, которые может принимать число n .

11.8. Пусть I — центр окружности, вписанной в остроугольный неравносторонний треугольник ABC , а Q — точка касания вписанной окружности со стороной AB . На стороне AB отмечена точка T , так, что $IT \parallel CQ$. Через точку T проведена прямая, касающаяся вписанной окружности в точке K (отличной от точки Q) и пересекающая прямые CA и CB в точках L и N соответственно. Докажите, что T — середина отрезка LN .

8 класс

8.5. Так как $3a^2 + 2ab - 2b^2$ делится 7, то

$$10a^2 + 23ab + 12b^2 = (3a^2 + 2ab - 2b^2) + 7(a^2 + 3ab + 2b^2)$$

также делится на 7. Разложим выражение $10a^2 + 23ab + 12b^2$ на множители:

$$10a^2 + 23ab + 12b^2 = 10a^2 + 15ab + 8ab + 12b^2 = 5a(2a + 3b) + 4b(2a + 3b) = (2a + 3b)(5a + 4b).$$

Поскольку 7 — простое число, то произведение двух чисел $(2a + 3b)$ и $(5a + 4b)$ делится на 7 только, если какое-то из этих чисел делится на 7. Но, заметим, что сумма этих чисел $(2a + 3b) + (5a + 4b) = 7(a + b)$ делится на 7. Потому, если одно из них делится на 7, то тогда и второе также делится на 7, и в результате их произведение делится на $7 \cdot 7 = 49$.

8.6. Ответ: 201.

Заметим, что, если в наборе гирек у Васи есть гирька весом 101 г или больше, то разбить такой набор на три равные по весу части очевидно нельзя. Если $n \leq 200$, то в наборе может быть гирька такого веса (например, $n - 1$ гирек по 1 г и одна гирька весом $300 - n + 1 \geq 301 - 200 = 101$ г). Следовательно, $n \geq 201$. Покажем, что $n = 201$, т. е. каков бы ни был набор из 201 гирек общим весом 300 г, гирьки можно разбить на три равные по весу части.

Прежде всего заметим, что если число гирек равно 201, то не менее 102 гирек весят по 1 г. Действительно, если число гирек весом по 1 г равно x , то $201 - x$ гирек весят не менее, чем по 2 г. В результате, общий вес всех гирек составляет не менее $x \cdot 1 + (201 - x) \cdot 2 = 402 - x$. Поэтому согласно условию $402 - x \leq 300$, откуда $x \geq 102$. Покажем теперь, как разбить гирьки нужным образом. В первую группу мы отложим 100 гирек по 1 г. Общий вес оставшихся 101 гирьки будет равен $300 - 100 = 200$. Остается составить еще одну (вторую) группу весом в 100 г. Все гирьки, не попавшие в первые две группы, образуют третью группу; весить они будут $300 - 100 - 100 = 100$ г. Пронумеруем рассматриваемые гирьки, и пусть i -тая гирька весит a_i г, $1 \leq i \leq 101$. Рассмотрим следующие 100 сумм:

$$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100}.$$

Либо, какая-то из этих сумм равна 100 (и тогда соответствующие гирьки составят искомую вторую группу), либо среди этих 100 сумм найдутся две с одинаковым остатком при делении на 100. Пусть это суммы $S_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$ и $S_j = a_1 + a_2 + \dots + a_j$ (для определенности $i < j$). Тогда, с одной стороны, $S_j - S_i$ делится на 100 и, значит, $S_j - S_i = 100$, поскольку $S_j - S_i < S_{100} + a_{101} = 200$. С другой стороны, $S_j - S_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_j$. Поэтому вторую искомую группу можно составить из гирек с номерами от $i + 1$ до j .

8.7. Ответ: 30° .

Так как L лежит на биссектрисе угла KCB , то L равноудалена от его сторон —

$$\geq (ab + bc + ca) \cdot 3 \cdot (ab + bc + ca),$$

что и требовалось.

Второй способ. Заметим, что требуемое неравенство равносильно тому, что $(a + b + c)^2 \geq (ab + bc + ca)^2$. Обозначим $x = ab + bc + ca$. Тогда требуемое неравенство равносильно неравенству

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \geq x^2 \iff 3 + 2x - x^2 \geq 0 \iff (x - 3)(x + 1) \leq 0.$$

Последнее неравенство, очевидно, выполнено, поскольку $x \geq 0$ и $x = ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

9.6. Ответ: 201.

Первое решение. Заметим, что, если в наборе гирек у Васи есть гирька весом 101 г или больше, и Петя указал $k = l = m = 100$, то разбить такой набор на три части так, как требуется в условии задачи, невозможно: гирьку весом более 100 г нельзя распределить ни в какую группу. Если $n \leq 200$, то в наборе может быть гирька такого веса (например, $n - 1$ гирек по 1 г и одна гирька весом $300 - n + 1 \geq 301 - 200 = 101$ г). Следовательно, $n \geq 201$. Покажем, что $n = 201$, т. е. каков бы ни был набор из 201 гирек общим весом 300 г и какие бы числа ни указал Петя, гирьки можно разбить нужным образом на три группы.

Итак, пусть у Васи 201 гирька, общим весом 300 г. Разобьем сначала гирьки на три группы по 100 г каждая (см. решение задачи №6 для 8 класса). Если $k = l = m = 100$, то это — нужное разбиение. В противном случае покажем, как его преобразовать, чтобы в первой группе вес гирек стал равен k грамм, во второй — l грамм, а в третьей — m грамм. Пусть для определенности $k \leq l \leq m$. При этом, в исходном разбиении первая группа состоит из 100 гирек по 1 г. Во второй и третьей группе вместе 101 гирька. Можно считать, что во второй гирек больше, чем в третьей, т. е. во второй группе не менее 51 гирьки. Рассмотрим два случая.

1). $l \geq 100$. Тогда $l = 100 + x$, а $m = 100 + y$ для некоторых целых x, y , $0 \leq x \leq y$. При этом, поскольку $l + m < 300$, то $x + y < 100$. Переложив из первой группы x гирек (по 1 г) во вторую группу и y гирек — в третью, получим нужное разбиение.

2). $l < 100$. Тогда $l = 100 - x$, а $k = 100 - y$ для некоторых целых x, y , $100 \geq x \geq y \geq 1$. Разобьем сначала вторую группу (в ней не менее 51 гирьки общим весом 100 г) на две равные по весу части, т. е. по 50 г. (Это можно сделать так же, как разбить на исходные вторую и третью 100-граммовые группы.) Затем одну из этих частей (т. е. некоторые гирьки общим весом 50 г) переложим из второй группы в первую, а из первой группы во вторую переложим 50 гирек весом по 1 г. Теперь и в первой и во второй группах общим весом по 100 г имеется не менее чем по 50 однограммовых гирек. В первой группе можно выделить часть гирек весом y грамм: если $y \leq 50$, то можно взять y однограммовых гирек, а если $y > 50$, можно взять все гирьки, кроме y однограммовых. Точно так же и во второй группе можно выделить часть гирек общим весом x грамм. Переложив выделенные части в y и x грамм соответственно из первой и второй групп в третью группу, получим нужное разбиение.

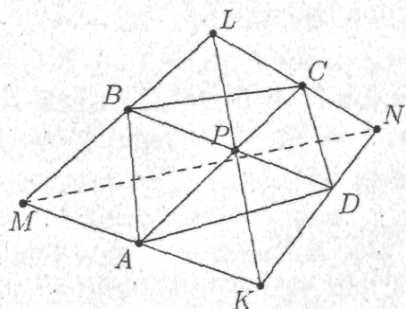
Второе решение. Как и в первом решении получаем оценку: $n \geq 201$ и то, что если $n = 201$, то среди гирек имеется не менее 102 однограммовых. Поэтому при условии, что $k \leq l \leq m$ и, значит, $k \leq 100$, первую группу гирек можно составить из k однограммовых гирек. Останется $201 - k$ гирек, общим весом $300 - k$ грамм. Оценим сколько среди них однограммовых в зависимости от максимального веса гирек в наборе. Пронумеруем

веса гирек в порядке (не строгого) убывания: $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq x_{201-k}$. Пусть среди рассматриваемых имеется t однограммовых гирек. Тогда общий вес рассматриваемых гирек

$$300 - k \leq x_1 + (201 - k - 1 - t) \cdot 2 + s \Leftrightarrow t \geq x_1 + 100 - k.$$

В частности, $t \geq x_1$, поскольку $k \leq 100$. Покажем, как получить третью группу гирек общим весом m грамм. Легко видеть, что $m \leq x_1$. Рассмотрим суммы $S_i = x_1 + x_2 + \dots + x_i$ ($i = 1, 2, \dots$). Либо какая-то из этих сумм окажется равна m , либо для некоторого j окажется: $S_j < m$, а $S_{j+1} > m$. В частности, $S_{j+1} - S_j \geq 2$, т. е. $x_{j+1} \geq 2$. Это значит, что среди слагаемых $x_1, x_2, \dots, x_j$ в сумме S_j нет единиц и, у этой суммы не хватает до значения m величины, меньшей, чем x_{j+1} , а значит меньшей, чем x_1 , и, тем самым, меньшей, чем t . Поэтому к гирькам, вес которых равен S_j можно добавить недостающее количество ($m - S_j < t$) однограммовых гирек так, что получится набор гирек весом m грамм. Ясно, что после того как построены первая и третья группы, удовлетворяющие условию, все оставшиеся гирьки составят вторую группу.

9.7. Положим $\angle APD = \angle BPC = \varphi$, тогда $\angle PKA = \angle PLB = \frac{\pi - \varphi}{2}$ в силу равнобедренности треугольников APK и BPL . Следовательно, $MK = ML$.



Далее, из условий $AP = PK$ и $BP = PL$ и теоремы о произведении длин отрезков хорд имеем, что $PK \cdot PC = AP \cdot PC = BP \cdot PD = PL \cdot PD$. Отсюда имеем, что $\frac{PK}{PL} = \frac{PD}{PC}$. Кроме того, $\angle KPD = \angle LPC = \frac{\varphi}{2}$. Поэтому треугольники KPD и LPC подобные. Значит, $\angle PKD = \angle PLC$, откуда следует, что $NK = NL$.

Таким образом имеем, что $MK = ML$ и $NK = NL$. Значит, точки M и N лежат на серединном перпендикуляре к отрезку KL , откуда следует требуемое.

9.8. Заметим, что если в каком-либо столбце (строке) операция перемены знака применялась четное число раз, то это равносильно тому, что она вообще не применялась; если же эта операция применялась нечетное число раз, то это равносильно тому, что она применялась там ровно один раз. Поэтому в дальнейшем считаем, что в каких-либо столбцах (строках) операция применялась по одному разу, а в остальных — не применялась вообще. Пусть операция перемены знака применялась в x столбцах и в y строках таблицы. Тогда общее число c клеток, в которых знаки поменялись на противоположные, равно $c = 20x + 20y - 2xy$. В частности, c — четное число. Полученное уравнение перепишем в виде

$$|x - 10| \cdot |y - 10| = |100 - c/2|. \quad (1)$$

Заметим, что число c клеток, в которых знаки поменялись на противоположные, равно 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56 или 58, в зависимости от того, сколько первоначальных минусов: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 или 8, изменились на плюсы. Поэтому в равенстве (1) правая часть равна соответственно 79, 78, 77, 76, 75, 74, 73, 72 или 71. Далее, оба сомножителя $|x - 10|$ и $|y - 10|$ не превосходят 10 (так как $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 10$). Из всех приведенных чисел лишь 72 представляется в виде произведения двух натуральных чисел, не превосходящих 10 ($72 = 8 \cdot 9$, например, при $x = 1$, $y = 2$). Это как раз соответствует случаю, когда ровно 7 исходных знаков "−" поменялись на "+", т. е. ровно один из первоначальных минусов остался на месте.

10 класс

10.5. Ответ: (1; 0; 1) и (2; 1; 2)

При $z = 0$, уравнение, очевидно, в целых числах решений не имеет. При $z = 1$, легко видеть, y может равняться только 0, и тогда $x = 1$. При $z = 2$ находим, что уравнению удовлетворяют только $y = 1$ и $x = 2$.

Пусть $z \geq 3$. Тогда $3^x + 7^y \not\equiv 8$. Покажем, что x — четное. Действительно, в противном случае 3^x имеет остаток 3 при делении на 8. А поскольку 7^y может иметь только остатки 1 или 7 при делении на 8, то сумма $3^x + 7^y$ не может делиться на 8. Итак, $x = 2a$ для некоторого целого неотрицательного a . Тогда $7^y = 4^z - 3^x = 2^{2z} - 3^{2a} = (2^z - 3^a)(2^z + 3^a)$. Следовательно, $2^z - 3^a$ и $2^z + 3^a$ являются степенями числа 7. При этом, так как $2^z + 3^a > 1$, то $2^z + 3^a \equiv 7$. Если и $2^z - 3^a > 1$, то и $2^z - 3^a \equiv 7$. А значит, $(2^z + 3^a) + (2^z - 3^a) \equiv 7$, т. е. $2 \cdot 2^z \equiv 7$, что невозможно. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $2^z - 3^a = 1$, т. е. $2^z - 1 = 3^a$. Так как $a \geq 1$ (поскольку $z \geq 3$), то $2^z - 1 \equiv 3$, что возможно только при четном z . Положим $z = 2c$ для некоторого целого неотрицательного c . Тогда $4^c - 3^a = 1$. При $a = 1$, находим $c = 1$ и, в результате, получаем уже ранее найденное решение: $x = 1$, $z = 2$, $y = 1$. Если $a > 1$, то $4^c = 3^a + 1$ имеет остаток 1 при делении на 9. Степень числа 4 имеет такой остаток только при c , кратном 3. Но тогда, так 4^3 имеет остаток 1 при делении на 7, 4^c будет иметь остаток 1 и при делении на 7. В результате, при таком c выражение $3^a = 4^c - 1$ должно делиться на 7 без остатка — противоречие. Таким образом, других решений, кроме двух ранее найденных, нет.

10.6. Заметим, что если в каком-либо столбце (строке) операция перемены знака применялась четное число раз, то это равносильно тому, что она вообще не применялась; если же эта операция применялась нечетное число раз, то это равносильно тому, что она применялась там ровно один раз. Поэтому в дальнейшем считаем, что в каких-либо столбцах (строках) операция применялась по одному разу, а в остальных — не применялась вообще. Пусть операция перемены знака применялась в x столбцах и в y строках таблицы. Тогда общее число s клеток, в которых знаки поменялись на противоположные, равно $s = 3nx + 3ny - 2xy$, что после домножения на 2 и группировки можно переписать в виде

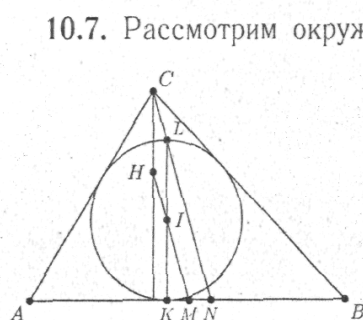
$$|3n - 2x| \cdot |3n - 2y| = |9n^2 - 2c|. \quad (1)$$

Заметим, что число s клеток, в которых знаки поменялись на противоположные, равно 35 или 37, в зависимости от того, сколько первоначальных знаков минусов: 0 или 1, изменились на плюсы. Далее, если бы n было четным, то при любой операции четность числа минусов не менялась бы, тогда как в итоге она поменялась на противоположную ($1 \rightarrow 36$). Стало быть n нечетно. Оба сомножителя $|3n - 2x|$ и $|3n - 2y|$ левой части (1) нечетны и не превосходят $3n$ (так как $0 \leq x \leq 3n$, $0 \leq y \leq 3n$). Если бы хоть один из них был равен $3n$, то правая часть (1) делилась бы на 3, тогда как ни при $s = 35$, ни при $s = 37$ она на 3 не делится. Поэтому оба сомножителя меньше $3n$, а значит, не превосходят $3n - 2$. Тогда $|9n^2 - 2c| \leq (3n - 2)^2$, в частности, $9n^2 - 2c \leq 9n^2 - 12n + 4$, откуда $n \leq \frac{c+2}{6} \leq \frac{37+2}{6} = \frac{13}{2}$, что, учитывая нечетность n , влечет $n \leq 5$. Заметим, что случай $n = 1$ не возможен, так как тогда в таблице 3×3 не могут оказаться 36 минусов. Осталось рассмотреть два случая:

1) $n = 3$. Имеем $|9 - 2x| \cdot |9 - 2y| = 81 - 70$ или $|9 - 2x| \cdot |9 - 2y| = 81 - 74$, т.е. $|9 - 2x| \cdot |9 - 2y| = 11$, что не возможно, так как оба сомножителя не превосходят 9, или $|9 - 2x| \cdot |9 - 2y| = 7$, что возможно (например, при $x = 1, y = 4$).

2) $n = 5$. Имеем $|15 - 2x| \cdot |15 - 2y| = 225 - 70$ или $|15 - 2x| \cdot |15 - 2y| = 225 - 74$, т.е. $|15 - 2x| \cdot |15 - 2y| = 155$ или $|15 - 2x| \cdot |15 - 2y| = 151$, что не возможно, так как оба сомножителя должны быть не больше 15.

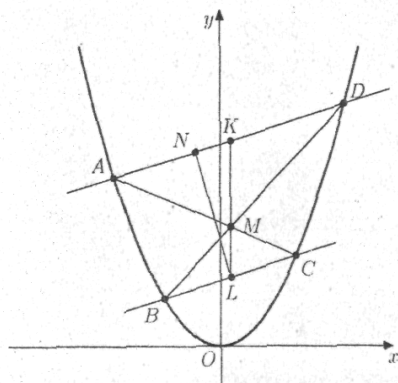
Таким образом единственно возможное значение $n = 3$. Легко видеть, что если в таблице 9×9 единственный минус стоит в левом нижнем углу, и мы поменяем знаки в верхней строке и четырех первых столбцах, то в полученной таблице будет ровно 36 минусов.



10.7. Рассмотрим окружность Γ , вписанную в треугольник ABC . Пусть K — точка касания Γ со стороной AB , и L — точка на окружности Γ , диаметрально противоположная точке K . Пусть N — точка пересечения прямой CL со стороной AB . Известно, что $AK = BN$ (достаточно рассмотреть гомотеию с центром в C , переводящую окружность Γ во вневписанную окружность, которая будет касаться стороны AB в точке N , и воспользоваться теоремой о касательных). Так как M — середина AB , то $KM = AM - AK = BM - BN = MN$. Следовательно, MI — средняя линия треугольника KLN , и поэтому $IM \parallel LN$. Если точки H, I, M лежат на одной прямой, то $HI \parallel CL$, и так как $CH \perp AB$ и $LI \perp AB$, то $CH \parallel LI$. Следовательно, $CHIL$ — параллелограмм, откуда $CH = LI$. Но $LI = r$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC . Таким образом, $CH = r$.

10.8. Ответ: $S = \frac{(m+n)^2}{\sqrt{m-n}}$.

Координаты точки R будем обозначать x_R, y_R . Пусть $y = kx + a$ и $y = kx + b$ — уравнения прямых AD и BC соответственно. Тогда



$$\begin{cases} x_A^2 = y_A = kx_A + a, \\ x_D^2 = y_D = kx_D + a, \end{cases} \quad \begin{cases} x_B^2 = y_B = kx_B + b, \\ x_C^2 = y_C = kx_C + b. \end{cases}$$

Поэтому

$$k = x_A + x_D = x_B + x_C, \quad (1)$$

$$a = -x_A x_D, \quad b = -x_B x_C. \quad (2)$$

Так как K и L — середины сторон AD и BC соответственно, то

$$x_K = 0.5(x_A + x_D), \quad x_L = 0.5(x_B + x_C). \quad (3)$$

Известно, что точка M — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ — лежит на отрезке, соединяющем середины его оснований. С учетом (3), это означает, что отрезок KL , содержащий точку M , перпендикулярен оси Ox , и $x_M = x_K = x_L$. Пусть α — угол, образованный прямыми AD и BC с положительным направлением оси Ox , тогда $\operatorname{tg} \alpha = k$. Если LN — высота трапеции $ABCD$, то $\angle NLK = \alpha$ (как углы с взаимно перпендикулярными сторонами: $LN \perp AD, KL \perp Ox$). Поэтому $LN = KL \cos \alpha$. С

другой стороны $AD = (y_D - y_A)/\cos \alpha$, $BC = (y_C - y_B)/\cos \alpha$. Следовательно искомая площадь

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(AD + BC)LN = \frac{1}{2}(y_D - y_A + y_C - y_B)KL \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = [KL = m + n] = \\ &= \frac{1}{2}(y_D - y_A + y_C - y_B) \cdot \frac{m + n}{k} = \frac{1}{2} \left(\frac{y_D - y_A}{k} + \frac{y_C - y_B}{k} \right) (m + n) \stackrel{(1)}{=} \\ &= \frac{1}{2}(x_D - x_A + x_C - x_B)(m + n) \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть $y = k_1x + c$ — уравнение прямой BD . Тогда

$$\begin{cases} x_B^2 = y_B = k_1x_B + c, \\ x_D^2 = y_D = k_1x_D + c, \end{cases} \implies k_1 = x_B + x_D, \quad c = -x_Bx_D. \quad (5)$$

Поэтому $y_M = 0.5k_1(x_A + x_D) + c = 0.5k_1(x_B + x_C) + c$. Следовательно, из (1) – (3) и (5) получаем

$$\begin{aligned} m &= y_K - y_M = \frac{1}{2}(x_A + x_D)(x_A + x_D) - x_Ax_D - \frac{1}{2}(x_B + x_D)(x_A + x_D) + x_Bx_D = \\ &= \frac{1}{2}(x_A + x_D)(x_A - x_B) - x_D(x_A - x_B) = \frac{1}{2}(x_A - x_B)(x_A - x_D). \\ n &= y_M - y_L \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2}(x_B + x_D)(x_A + x_D) - x_Bx_D - \frac{1}{2}(x_A + x_D)(x_A + x_D) + x_Bx_C = \\ &= \frac{1}{2}(x_A + x_D)(x_B - x_A) - x_B(x_D - x_C) = [x_D - x_C \stackrel{(1)}{=} x_B - x_A] = \frac{1}{2}(x_B - x_A)(x_A + x_D - 2x_B) = \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2}(x_B - x_A)(x_C - x_B). \end{aligned}$$

Тогда $m + n = \frac{1}{2}(x_B - x_A)(x_C - x_B + x_D - x_A)$. Следовательно, равенство (4) можно переписать в виде

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(m + n)}{x_B - x_A} (m + n) = \frac{(m + n)^2}{x_B - x_A}.$$

Заметим, что

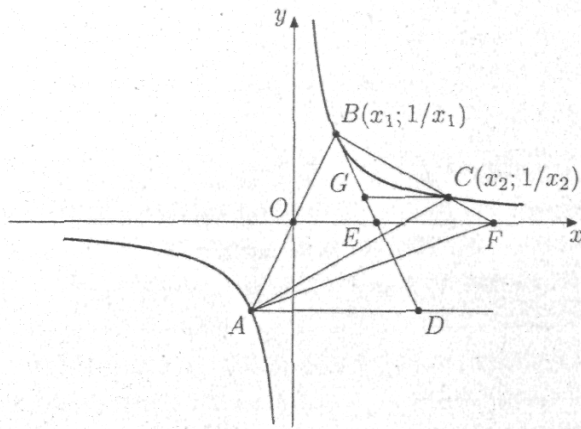
$$m - n = \frac{1}{2}(x_B - x_A)(x_D - x_A - x_C + x_B) = [x_D - x_C \stackrel{(1)}{=} x_B - x_A] = (x_B - x_A)^2.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$S = \frac{(m + n)^2}{x_B - x_A} = \frac{(m + n)^2}{\sqrt{m - n}}.$$

11 класс

11.5. Пусть F и E — точки пересечения прямой BC и касательной к гиперболе с



осью абсцисс соответственно, точка D — точка пересечения касательной с прямой, проходящей через точку A параллельно оси абсцисс (см. рис.).

Так как точек A и B симметричны относительно начала координат, то $A(-x_1; -1/x_1)$. Известно, что производная функции в точке x_1 равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой x_1 . Поэтому

$$\operatorname{tg} \angle BEO = \operatorname{tg}(\pi - \angle BEF) = -\operatorname{tg} \angle BEF = -(1/x)' \Big|_{x=x_1} = \frac{1}{x_1^2}.$$

С другой стороны, $\operatorname{tg} \angle BAD = \operatorname{tg} \angle BOE = 1/x_1 : x_1 = 1/x_1^2$, т.е.

$$\angle BAD = \angle BEO. \quad (1)$$

Кроме того,

$$\operatorname{tg} \angle BFE = \operatorname{tg} \angle BCG = \frac{1/x_1 - 1/x_2}{x_2 - x_1} = \frac{1}{x_1 x_2}$$

и

$$\operatorname{tg} \angle CAD = \frac{1/x_2 + 1/x_1}{x_2 + x_1} = \frac{1}{x_1 x_2}.$$

Следовательно, $\angle CAD = \angle CFE = \angle BFE$.

Поэтому

$$\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD \stackrel{(1)}{=} \angle BEO - \angle BFE = \angle FBE = \angle CBE,$$

что и требовалось доказать.

11.6. 6) Рассмотрим последовательность чисел

$$X_n = \frac{10^{2n} - 1}{9} + \frac{4 \cdot (10^n - 1)}{9} + 1.$$

В десятичной записи таких чисел нет нулей. Действительно, так как $10^k - 1 = \underbrace{99 \dots 99}_k$,

то

$$X_n = \frac{10^{2n} - 1}{9} + \frac{4 \cdot (10^n - 1)}{9} + 1 = \underbrace{11 \dots 1}_{2n} + 4 \cdot \underbrace{11 \dots 1}_n + 1 = \underbrace{11 \dots 1}_n \underbrace{55 \dots 5}_{n-1} 6.$$

Сразу отметим, что сумма цифр такого числа: $S(X_n) = 1 \cdot n + 5 \cdot (n - 1) + 6 = 6n + 1$. Далее,

$$X_n = \frac{10^{2n} - 1}{9} + \frac{4 \cdot (10^n - 1)}{9} + 1 = \frac{10^{2n} - 1 + 4 \cdot (10^n - 1) + 9}{9} =$$

$$= \frac{10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 4}{9} = \left(\frac{10^n + 2}{3} \right)^2 -$$

квадрат натурального числа. (Поскольку $S(10^n + 2) = 3$, то $10^n + 2$ делится на 3.) Остается заметить, что если $n = 6m^2 + 2m$ ($m \in \mathbb{N}$), то $S(X_n) = 6n + 1 = 6(6m^2 + 2m) + 1 = (6m + 1)^2$. Поэтому при любом $m \in \mathbb{N}$ числа X_{6m^2+2m} удовлетворяют всем условиям задачи, а таких чисел бесконечно много.

11.7. Ответ: $n = 5$, $n = 11$.

Заметим, что если в каком-либо столбце (строке) операция перемены знака применялась четное число раз, то это равносильно тому, что она вообще не применялась; если же эта операция применялась нечетное число раз, то это равносильно тому, что она применялась там ровно один раз. Поэтому в дальнейшем считаем, что в каких-либо столбцах (строках) операция применялась по одному разу, а в остальных — не применялась вообще. Пусть операция перемены знака применялась в x столбцах и в y строках таблицы. Тогда общее число c клеток, в которых знаки поменялись на противоположные, равно $c = nx + ny - 2xy$, что после домножения на 2 и группировки можно переписать в виде

$$(n - 2x) \cdot (n - 2y) = n^2 - 2c. \quad (1)$$

Заметим, что число c клеток, в которых знаки поменялись на противоположные, равно 7, 9 или 11, в зависимости от того, сколько первоначальных знаков минусов: 0, 1 или 2, изменились на плюсы. Далее, если бы n было четным, то при любой операции четность числа минусов не менялась бы, тогда как в итоге она поменялась на противоположную ($2 \rightarrow 9$). Стало быть n нечетно. Оба сомножителя $(n - 2x)$ и $(n - 2y)$ левой части (1) нечетны и их модули не превосходят n (так как $0 \leq x \leq n$, $0 \leq y \leq n$). Если хоть один из них в точности равен $\pm n$, то правая часть (1) делится на n , поэтому c делится на n , а тогда $n \leq c \leq 11$. Если же модули обоих сомножителей меньше n , а значит, в виду нечетности n , не превосходят $n - 2$, то $|n^2 - 2c| \leq (n - 2)^2$, в частности, $n^2 - 2c \leq n^2 - 4n + 4$, откуда $n \leq \frac{c + 2}{2} \leq \frac{13}{2}$, что, учитывая нечетность n , влечет $n \leq 5$.

В любом случае $n \leq 11$. Кроме того, $n \geq 3$, так как $n = 1$ не подходит по смыслу задачи.

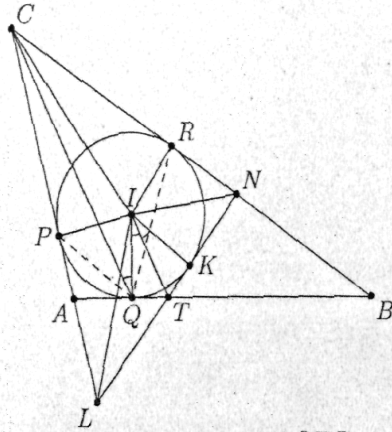
Рассмотрим крайние случаи.

1) $n = 3$. Имеем $(3 - 2x) \cdot (3 - 2y) = 9 - 14 = -5$, или $(3 - 2x) \cdot (3 - 2y) = 9 - 18 = -9$ или $(3 - 2x) \cdot (3 - 2y) = 9 - 22 = -13$. Здесь только -9 можно представить в виде двух сомножителей, по модулю не превосходящих трех. Но и это возможно лишь при $x = 3$, $y = 0$ или $x = 0$, $y = 3$. Однако, очевидно, что оба эти случая не реализуются.

2) $n = 5$. Рассмотрим таблицу, в которой два минуса стоят в первом столбце в двух нижних клетках, а во всех остальных клетках стоят плюсы. Поменяем знаки в первом столбце и двух верхних строках. Легко подсчитать, что в результате получится таблица, содержащая ровно 9 минусов. Следовательно, минимальное значение n равно 5.

3) $n = 11$. Рассмотрим таблицу, в которой два минуса стоят в первом столбце в двух нижних клетках, а во всех остальных клетках стоят плюсы. Поменяем знаки в первом столбце. Легко видеть, что в результате получится таблица, содержащая ровно 9 минусов. Следовательно, максимальное значение n равно 11.

11.8. Обозначим $x = \angle CQT$, $y = \angle QCI$, $2\alpha = \angle BAC$, $2\beta = \angle ABC$, $2\gamma = \angle ACB$. Пусть r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC . Нетрудно заметить, что



$$\angle CIQ = 360^\circ - 90^\circ - 2\alpha - \gamma =$$

$$= 270^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) - \alpha + \beta = 180^\circ - \alpha + \beta.$$

Поэтому

$$x + y = 180^\circ - \angle CIQ = \alpha - \beta. \quad (1)$$

Кроме того,

$$\angle QTL = \angle NTB = 180^\circ - 2(90^\circ - x) = 2x,$$

откуда

$$\angle ILT = 0.5\angle ALT = 0.5(2\alpha - 2x) = \alpha - x, \quad \angle INT = 0.5\angle CNT = 0.5(2\beta + 2x) = \beta + x.$$

Тогда

$$LT = LK - KT = r \operatorname{ctg} \angle ILT - r \operatorname{tg} x = r(\operatorname{ctg}(\alpha - x) - \operatorname{tg} x),$$

$$NT = NK + KT = r \operatorname{ctg} \angle INT + r \operatorname{tg} x = r(\operatorname{ctg}(\beta + x) + \operatorname{tg} x).$$

Следовательно, утверждение задачи будет следовать из равенства

$$\operatorname{ctg}(\alpha - x) - \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}(\beta + x) + \operatorname{tg} x. \quad (2)$$

Поскольку

$$\operatorname{ctg}(\alpha - x) - \operatorname{tg} x = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} x} - \operatorname{tg} x = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} x} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} x},$$

$$\operatorname{ctg}(\beta + x) + \operatorname{tg} x = \frac{1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x = \frac{1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} x} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} x},$$

то (2) равносильно

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} x. \quad (3)$$

Из теоремы синусов для треугольника CQT следует, что $\frac{r}{\sin y} = \frac{CI}{\sin x}$. Так как $CI = r/\sin \gamma$, то $\sin y = \sin \gamma \cdot \sin x$, т.е., с учетом (1) и равенства $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$, имеем $\sin(\alpha - \beta - x) = \sin x \cdot \cos(\alpha + \beta)$. Тогда

$$\sin x \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha - \beta) \cos x - \cos(\alpha - \beta) \sin x,$$

откуда $\sin x(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) = \sin(\alpha - \beta) \cos x$, что равносильно

$$2 \sin x \cos \alpha \cos \beta = (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \cos x, \iff 2 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta,$$

т.е. равносильно (3), что и требовалось.