

Первый день



УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

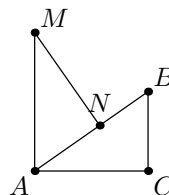
8 класс

8.1. Пешеход, велосипедист и мотоциклист одновременно с постоянными скоростями направляются из пункта A в пункт B . Достигнув пункта B , каждый из них разворачивается и движется обратно к A ; достигнув A , снова разворачивается и направляется к B , и т.д. Первыми после начала движения встретились велосипедист с мотоциклистом в некотором пункте C . К этому времени пешеход прошел только шестую часть пути от A до B . Через 6 минут после указанной встречи произошла вторая встреча — пешехода с мотоциклистом. Велосипедист с пешеходом впервые встретился также в пункте C .

Через какое время после начала движения встретились все трое названных участника движения?

8.2. Найдите все пары (n, m) целых чисел n и m , для которых выполняется равенство $n^2 + n = m^2 + 2m - 9$.

8.3. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен равный ему треугольник AMN , $\angle ANM = 90^\circ$, $AN = BC$ (см. рис.). Окружность Γ_1 , вписанная в треугольник AMN , касается гипотенузы AM в точке P , а окружность Γ_2 , вписанная в треугольник ABC , касается катета BC в точке Q .



Докажите, что отрезок PQ , гипотенуза AB и отрезок, соединяющий центры окружностей Γ_1 и Γ_2 , пересекаются в одной точке.

8.4. В однокруговом турнире по футболу (т. е. каждая команда сыграла с каждой из остальных ровно один матч) участвовало 6 команд. В футболе команда получает 3 очка за победу, 1 очко за ничью и 0 очков за поражение. Известно, что количества набранных командами очков в турнире равны 10, 9, 6, 6, 4 и 2 соответственно.

а) Докажите, что команда, занявшая в турнире второе место (т. е. набравшая 9 очков), не проиграла свой матч команде, занявшей в турнире первое место (т. е. набравшей 10 очков).

б) Можно ли однозначно определить, как закончился матч между командами, занявшими в турнире первое и второе места?

9 класс

9.1. Найдите все пары $(n; m)$ натуральных чисел n и m , удовлетворяющих равенству $n^2 + n + 1 = (m^2 + m - 3)(m^2 - m + 5)$.

9.2. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечена точка M , отличная от точки пересечения его диагоналей AC и BD , так, что отношение площадей треугольников AMC и BMD равно отношению тангенсов углов AMC и BMD , т.е. $S(AMC) : S(BMD) = \operatorname{tg} \angle AMC : \operatorname{tg} \angle BMD$.

Докажите, что $AM^2 + MC^2 + BD^2 = AC^2 + BM^2 + MD^2$.

9.3. В шахматном турнире приняло участие 10 шахматистов. Каждый шахматист с каждым из остальных сыграл одну встречу. Итоги турнира определялись по новой системе подсчёта очков: 3 очка за победу, 1 очко за ничью и 0 очков за поражение (в отличие от обычной системы, по которой за победу дается 1 очко, за ничью 0,5 очка и за поражение 0 очков). Набрав больше всех очков и выиграв более половины своих встреч, первое место на турнире занял гроссмейстер N . Гроссмейстер A заметил гроссмейстеру N , что по обычной системе подсчёта очков N не попал бы даже в семёрку лучших игроков турнира, а гроссмейстер B сказал, что N не попал бы даже в восьмёрку лучших.

Мог ли быть прав **а)** гроссмейстер A ? **б)** гроссмейстер B ?

9.4. Дана прямоугольная таблица $m \times n$ клеточек ($m \geq 4$, $n \geq 4$), в каждую клетку которой записано по одному целому числу. Для каждой клетки число, записанное в эту клетку, равно среднему арифметическому чисел, записанных в каких-то двух соседних с ней по стороне клетках.

Найдите наибольшее возможное количество различных чисел, которые может содержать такая таблица.

10 класс

10.1. Найдите все тройки $(x; n; p)$ натуральных x и n и простых p , для которых $2x^3 + x^2 + 10x + 5 = 2 \cdot p^n$.

10.2. Существует ли функция f , заданная на множестве всех действительных чисел и принимающая действительные значения, и действительное число α , такие, что $f(\alpha) = -2$ и

$$f(f(x)) = xf(x) + 2x$$

для любого действительного x ?

10.3. В остроугольном $\triangle ABC$ на сторонах AB и AC во внешнюю сторону построены квадраты с центрами C_1 и B_1 соответственно. На отрезке C_1B_1 построен квадрат C_1B_1DE , так что точки A и D лежат в разных полуплоскостях относительно C_1B_1 .

Докажите, что центр квадрата C_1B_1DE лежит на прямой BC .

10.4. а) Можно ли при некотором n в квадратной таблице $n \times n$ расставить 100 фишек так, чтобы в каждой клетке стояло не более одной фишки, а в каждом квадрате 2×2 стояло ровно 2 фишки?

б) Можно ли то же самое сделать для 110 фишек?

11 класс

11.1. Найдите все тройки $(x; n; p)$ натуральных x и n и простых p , для которых

$$x^3 + 3x^2 + 7 = 2 \cdot p^n.$$

11.2. Найдите все действительные значения параметра a , при которых существует функция f , заданная на множестве всех действительных чисел и принимающая действительные значения, и действительное число α , такие, что $f(\alpha) = 0$ и

$$f(f(x)) = xf(x) + a$$

для любого действительного x .

11.3. $ABCD$ — вписанный четырёхугольник. Пусть Γ_1 — окружность проходящая через точки A и B , и касающаяся стороны CD в точке E ; Γ_2 — окружность проходящая через точки B и C , и касающаяся стороны DA в точке F ; Γ_3 — окружность проходящая через точки C и D , и касающаяся стороны AB в точке G ; наконец, Γ_4 — окружность проходящая через точки D и A , и касающаяся стороны BC в точке H .

Докажите, что $EG \perp FH$.

11.4. Дана квадратная таблица $n \times n$, где $n \geq 2$. В каждую из некоторых k клеток таблицы ставится по одной фишке так, чтобы в любом квадрате 2×2 было ровно 2 фишки.

Найдите все значения k , при которых это можно сделать.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.1. Ответ : через 1,5 часа.

Пусть расстояние между A и B равно S (км), скорости пешехода, велосипедист и мотоциклиста — соответственно a , b и c (км/ч). Из условия следует (первыми встретились мотоциклист и велосипедист, а затем мотоциклист и пешеход), что $a < b < c$. Пусть D — точка на пути от A до B , в которой оказался пешеход в момент первой встречи велосипедиста и мотоциклиста. По условию $AD = \frac{S}{6}$. Тогда Расстояние AD пешеход преодолел за время $t_1 = \frac{S}{6a}$. За это время велосипедист и мотоциклист до их первой встречи в точке C вместе проехали расстояние $2S$ и сближались со скоростью $b + c$. Поэтому $t_1 = \frac{2S}{b+c}$. В результате, получаем: $\frac{S}{6a} = \frac{2S}{b+c}$, откуда

$$b + c = 12a. \quad (1)$$

Кроме того, так как за время t_1 велосипедист проехал расстояние $t_1 b = \frac{Sb}{6a}$, то $AC = \frac{Sb}{6a}$ и, значит, $CD = AC - AD = \frac{Sb}{6a} - \frac{S}{6} = \frac{S(b-a)}{6a}$. Согласно условию это расстояние пешеход и мотоциклист вместе, двигаясь на встречу со скоростью $a + c$, преодолели за 6 мин, т.е. за $\frac{1}{10}$ часа. Поэтому

$$\frac{S(b-a)}{6a} = \frac{(a+c)}{10}. \quad (2)$$

Далее, пешеход расстояние AC до первой встречи с велосипедистом преодолел за время $t_2 = \frac{AC}{a} = \frac{Sb}{6a^2}$. С другой стороны, за это время пешеход и велосипедист вместе преодолели расстояние $2S$, двигаясь навстречу со скоростью $a + b$. Поэтому $\frac{Sb}{6a^2} = \frac{2S}{a+b}$, откуда $b(a+b) = 12a^2 \Leftrightarrow b^2 + ab - 12a^2 = 0 \Leftrightarrow (b+4a)(b-3a) = 0$. Следовательно, так как $b+4a > 0$ (a и b — положительные величины), то $b-3a = 0$, т.е. $b = 3a$. Тогда из (1) находим $c = 9a$, а из (2) находим $S = 3a$. поэтому $AC = \frac{Sb}{6a} = \frac{3a \cdot 3a}{6a} = 1,5a$ и, значит, пешеход и велосипедист встретились в точке C через $t_2 = \frac{1,5a}{a} = 1,5$ часа после начала движения. За это время мотоциклист проехал расстояние $1,5 \cdot c = 13,5 \cdot a = 4 \cdot 3a + 1,5 \cdot a = 4S + 1,5a = AB + BA + AC$, т.е. через 1,5 часа после начала движения он оказался в точке C . Стало быть, впервые все трое участников движения встретились через 1,5 часа после начала движения.

8.2. Ответ : $(-10, -11)$, $(-10, 9)$, $(-3, -5)$, $(-3, -3)$, $(2, -5)$, $(2, 3)$, $(9, -11)$, $(9, 9)$.

Умножив обе части данного равенства на 4, получим равносильное равенство

$$\begin{aligned} 4n^2 + 4n &= 4m^2 + 8m - 36 \Leftrightarrow 4n^2 + 4n + 1 = 4m^2 + 8m + 2 - 39 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2n+1)^2 = (2m+2)^2 - 39 \Leftrightarrow (2m+2)^2 - (2n+1)^2 = 39 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2m+2-2n-1)(2m+2+2n+1) = 39 \Leftrightarrow (2m-2n+1)(2m+2n+3) = 39. \end{aligned}$$

Так как $39 = 1 \cdot 39 = 39 \cdot 1 = 3 \cdot 13 = 13 \cdot 3 = (-1) \cdot (-39) = (-39) \cdot (-1) = (-3) \cdot (-13) = (-13) \cdot (-3)$ — единственные разложения числа 39 на целые множители, то достаточно рассмотреть следующие случаи.

$$\begin{aligned}
 1) & \begin{cases} 2m - 2n + 1 = 1, \\ 2m + 2n + 3 = 39 \end{cases} \text{ откуда, складывая и вычитая уравнения системы, получим} \\
 & \begin{cases} 4m + 4 = 40, \\ 4n + 2 = 38 \end{cases} \text{ и в результате } \begin{cases} m = 9, \\ n = 9. \end{cases} \\
 2) & \begin{cases} 2m - 2n + 1 = 3, \\ 2m + 2n + 3 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m + 4 = 16, \\ 4n + 2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3, \\ n = 2. \end{cases} \\
 3) & \begin{cases} 2m - 2n + 1 = 39, \\ 2m + 2n + 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m + 4 = 40, \\ 4n + 2 = -38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 9, \\ n = -10. \end{cases} \\
 4) & \begin{cases} 2m - 2n + 1 = 13, \\ 2m + 2n + 3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m + 4 = 16, \\ 4n + 2 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3, \\ n = -3. \end{cases} \\
 5) & \begin{cases} 2m - 2n + 1 = -1, \\ 2m + 2n + 3 = -39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m + 4 = -40, \\ 4n + 2 = -38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -11, \\ n = -10. \end{cases} \\
 6) & \begin{cases} 2m - 2n + 1 = -3, \\ 2m + 2n + 3 = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m + 4 = -16, \\ 4n + 2 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5, \\ n = -3. \end{cases} \\
 7) & \begin{cases} 2m - 2n + 1 = -39, \\ 2m + 2n + 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m + 4 = -40, \\ 4n + 2 = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -11, \\ n = 9. \end{cases} \\
 8) & \begin{cases} 2m - 2n + 1 = -13, \\ 2m + 2n + 3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m + 4 = -16, \\ 4n + 2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5, \\ n = 2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

8.3. Заметим, что $\angle MAN = 90^\circ - \angle BAC = \angle ABC$. Поэтому $MN = AC$, $AN = BC$ и, кроме того, $AP = PQ$. Пусть R — середина гипотенузы AB . Тогда $\triangle APR = \triangle BQR$ (по двум сторонам $AP = BQ$, $AR = BR$ и углу между ними $\angle PAR = \angle QBR$). Но тогда $\angle PRA = \angle BRQ$, и, следовательно, углы PRA и BRQ вертикальные. Значит, отрезок PQ пересекает гипотенузу AB в ее середине, точке R (см. рис. 1).

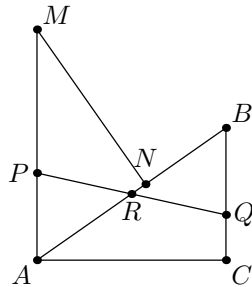


Рис. 1

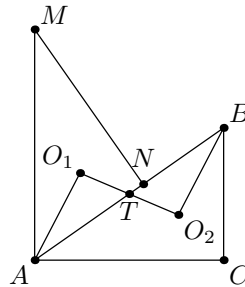


Рис. 2

С другой стороны, пусть T — точка пересечения гипотенузы AB и отрезка, соединяющего центры O_1 и O_2 окружностей Γ_1 и Γ_2 . Тогда

$$\angle O_1AT = 0,5\angle MAN = 0,5\angle ABC = \angle TBO_2,$$

откуда $AO_1 \parallel BO_2$. Поскольку, кроме того, $AO_1 = BO_2$, то AO_1BO_2 — параллелограмм, и точка пересечения его диагоналей, точка T , делит их пополам, т.е. $AT = TB$. Значит, T — середина гипотенузы AB , т.е. точки T и R совпадают (см. рис. 2).

Таким образом, все три отрезка AB , PQ , O_1O_2 пересекаются в одной точке, середине гипотенузы AB .

8.4. Ответ : б) нет, нельзя.

а) Считаем, что из двух команд, набравших по 6 очков, какая-то одна команда заняла в турнире 3-е место, а тогда другая из них — 4-е (например, по разнице забитых и пропущенных мячей). Пронумеруем команды в том же порядке, в каком они заняли места в турнире: № 1, № 2, № 3, № 4, № 5, № 6.

Первое решение. Покажем сначала, что команда № 1 проиграла в турнире хотя бы один матч. В самом деле, если бы это было не так, то в каждой из 5-и игр турнира она набирала бы нечётное число очков (1 или 3), но тогда и сумма набранных ею очков была бы нечётной, что по условию не так.

Таковыми же рассуждениями покажем теперь, что если команда № 2 проиграла хотя бы один матч, то тогда она проиграла не менее двух матчей. Действительно, если бы она проиграла ровно 1 матч, то в каждой из остальных 4-х игр турнира она набирала бы нечётное число очков (1 или 3), но тогда сумма набранных ею очков была бы чётной, что не так по условию.

Наконец заметим, что поскольку согласно условию команда № 6 набрала в турнире 2 очка, то, значит, она 2 встречи в турнире свела вничью, а остальные проиграла.

После этих предварительных замечаний докажем, что команда № 2 не проиграла команде № 1. Предположим противное, т. е. что команда № 1 выиграла у команды № 2. Рассмотрим команды № 3, № 4 и № 5 и обозначим через S сумму набранных ими в турнире очков. Согласно условию $S = 6 + 6 + 4 = 16$. Оценим теперь S по-другому, исходя из сделанного предположения. Так как по доказанному выше команда № 1 проиграла какой-то команде, а этой командой не может быть ни команда № 2 (по предположению), ни команда № 6 (она не выиграла ни одного матча), то этой командой является одна из команд № 3, № 4 или № 5. Значит, $S \geq 3$. Так как по сделанному предположению команда № 2 проиграла матч, то, как доказано выше, она проиграла не менее 2-х матчей. Один матч она проиграла согласно предположению команде № 1, а так как команде № 6, поскольку эта команда не выиграла ни одного матча, команда № 2 проиграть не могла, то ещё хотя бы один матч она проиграла одной из команд № 3, № 4 или № 5. Значит, $S \geq 3 + 3 = 6$. Далее, в трёх встречах между собой команды № 3, № 4 и № 5, поскольку в каждой встрече разыгрываются не менее 2-х очков, набрали не менее $2 + 2 + 2 = 6$ очков. Значит, $S \geq 6 + 6 = 12$. Наконец, во встречах с командой № 6 команды № 3, № 4 и № 5, поскольку команда № 6 ни одной встречи не выиграла и только 2 свела вничью, набрали не менее $1 + 1 + 3 = 5$ очков. Следовательно, $S \geq 12 + 5 = 17$, но по условию $S = 16$. Полученное противоречие показывает, что сделанное предположение неверно, а значит, команда № 2 свою встречу с командой № 1 не проиграла.

Второе решение. Поставим в соответствие команде № k упорядоченную пару (a_k, b_k) целых неотрицательных чисел, где a_k — число встреч турнира, которые команда № k выиграла, а b_k — число встреч, которые она проиграла, $k = 1, 2, \dots, 6$. Поскольку каждая из сумм $a_1 + a_2 + \dots + a_6$ и $b_1 + b_2 + \dots + b_6$ равна числу матчей турнира, закончившихся результативно (т. е. победой одной и поражением другой команд-участниц матча), то эти суммы равны:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_6 = b_1 + b_2 + \dots + b_6. \quad (1)$$

Соотношение (1) будет основным в дальнейшем.

Докажем больше, чем требуется в условии п. **а)** задачи — докажем, что команда № 2 не могла потерпеть в турнире ни одного поражения и, следовательно, в частности, не

могла проиграть команде № 1. Обозначим через O_k число очков, набранных в турнире командой № k , $k = 1, 2, \dots, 6$, т. е. $O_1 = 10$, $O_2 = 9$, $O_3 = O_4 = 6$, $O_5 = 4$ и $O_6 = 2$. Так как команда № k в турнире выиграла ровно a_k своих матчей и ровно b_k проиграла, то, следовательно, ровно $5 - a_k - b_k$ матчей она свела вничью, а значит, всего в турнире она набрала $3 \cdot a_k + 1 \cdot (5 - a_k - b_k) = 2a_k - b_k + 5$ очков. Поэтому целые неотрицательные числа a_k и b_k необходимо должны удовлетворять двум условиям:

$$a_k + b_k \leq 5 \quad \text{и} \quad 2a_k - b_k = O_k - 5, \quad (2)$$

$k = 1, 2, \dots, 6$. Используя соотношения (2), найдём, какие значения могут при каждом $k = 1, 2, \dots, 6$ принимать величины a_k и b_k .

Пусть $k = 1$. Тогда равенство в (2) принимает вид $2a_1 - b_1 = 5$. Записав это равенство в виде $b_1 = 2a_1 - 5$, получаем в силу неотрицательности b_1 неравенство $2a_1 - 5 \geq 0$, т. е. $a_1 \geq 3$. Записав же его в виде $a_1 + b_1 = 3a_1 - 5$, получим в силу неравенства в (2) при $k = 1$, что $3a_1 - 5 \leq 5$, т. е. $a_1 \leq 3$. Итак, $a_1 = 3$ и $b_1 = 2a_1 - 5 = 2 \cdot 3 - 5 = 1$.

Пусть $k = 6$. Тогда равенство в (2) принимает вид $2a_6 - b_6 = -3$. Записав это равенство в виде $3a_6 + 3 = a_6 + b_6$, видим, что $3a_6 + 3 \leq 5$, т. е. $a_6 = 0$, а тогда $b_6 = 2a_6 + 3 = 2 \cdot 0 + 3 = 3$.

Для остальных команд, т. е. для команд № 2, № 3, № 4 и № 5, такие же рассуждения не дают однозначного ответа о значении величин a_k и b_k .

Пусть $k = 2$. Тогда равенство в (2) принимает вид $2a_2 - b_2 = 4$. Записав это равенство в виде $b_2 = 2a_2 - 4$, заключаем, что $2a_2 - 4 \geq 0$, т. е. $a_2 \geq 2$, а записав его в виде $a_2 + b_2 = 3a_2 - 4$ — что $3a_2 - 4 \leq 5$, т. е. $a_2 \leq 3$. Итак, для команды № 2 возможны только два варианта: либо **а)** $a_2 = 2$ и $b_2 = 0$, либо **б)** $a_2 = 3$ и $b_2 = 2$.

Пусть $k = 3$. Тогда равенство в (2) принимает вид $2a_3 - b_3 = 1$. Записав это равенство в виде $b_3 = 2a_3 - 1$, получаем, что $2a_3 - 1 \geq 0$, или $a_3 \geq 1$, а записав его в виде $a_3 + b_3 = 3a_3 - 1$ — что $3a_3 - 1 \leq 5$, или $a_3 \leq 2$. Итак, для команды № 3 возможны также только два варианта: либо $a_3 = 1$ и $b_3 = 1$, либо $a_3 = 2$ и $b_3 = 3$. В частности, в любом случае справедливо неравенство $a_3 \leq b_3$.

Пусть $k = 4$. Так как $O_4 = O_3 = 6$, то для команды № 4 возможны только те же варианты, что и для команды № 3, т. е. либо $a_4 = 1$ и $b_4 = 1$, либо $a_4 = 2$ и $b_4 = 3$. В частности, в любом случае справедливо неравенство $a_4 \leq b_4$.

Пусть $k = 5$. Тогда равенство в (2) принимает вид $2a_5 - b_5 = -1$. Записав это равенство в виде $a_5 + b_5 = 3a_5 + 1$, получаем в силу неравенства в (2) при $k = 5$, что $3a_5 + 1 \leq 5$, т. е. $a_5 \leq 1$. Итак, для команды № 5 возможны также только два варианта: либо $a_5 = 0$ и $b_5 = 1$, либо $a_5 = 1$ и $b_5 = 3$. В частности, в любом случае справедливо неравенство $a_5 < b_5$.

Докажем теперь, что для команды № 2 вариант **б)** $a_2 = 3$ и $b_2 = 2$ невозможен. В самом деле, если бы имел место случай **б)**, то, поскольку $a_1 = 3$, $b_1 = 1$ и $a_6 = 0$, $b_6 = 3$, выполнялись бы равенства: $a_1 + a_2 + a_6 = 3 + 3 + 0 = 6$ и $b_1 + b_2 + b_6 = 1 + 2 + 3 = 6$. Так как эти суммы равны, то вследствие (1) должны быть равны и суммы $a_3 + a_4 + a_5$ и $b_3 + b_4 + b_5$. Но равенство этих сумм невозможно, поскольку, как показано выше, справедливы неравенства: $a_3 \leq b_3$, $a_4 \leq b_4$ и $a_5 < b_5$. Следовательно, для команды № 2 вариант **б)** невозможен, а поэтому для неё выполнен вариант **а)** $a_2 = 2$ и $b_2 = 0$. Так как $b_2 = 0$, то, по-другому, команда № 2 не проиграла в турнире ни одного своего матча и, в частности, не проиграла команде № 1.

Хотя для решения задачи это не нужно, отметим, что проведённые рассуждения позволяют однозначно определить число выигранных и проигранных встреч каждой командой-

участницей. Для команд № 1, № 2 и № 6 это сделано в решении: $a_1 = 3$, $b_1 = 1$; $a_2 = 2$, $b_2 = 0$ и $a_6 = 0$, $b_6 = 3$. Значит, $a_1 + a_2 + a_6 = 5$ и $b_1 + b_2 + b_6 = 4$. Поэтому вследствие (1) должно выполняться равенство $a_3 + a_4 + a_5 + 1 = b_3 + b_4 + b_5$, т. е. равенство $(a_3 - b_3) + (a_4 - b_4) + 1 = b_5 - a_5$. Поскольку, как доказано выше, слагаемые $a_3 - b_3$ и $a_4 - b_4$ в левой части этого равенства неположительны, а правая его часть $b_5 - a_5 \geq 1$, то это равенство может быть выполнено, только если $a_3 = b_3$, $a_4 = b_4$ и $b_5 - a_5 = 1$, т. е. только в случае $a_3 = b_3 = 1$, $a_4 = b_4 = 1$ и $a_5 = 0$, $b_5 = 1$.

Третье решение. Пусть x игр турнира закончилось результативно, а y — вничью. Поскольку всего было сыграно $(6 \cdot 5)/2 = 15$ игр, то $4x + y = 15$. С другой стороны, общее количество очков, разыгранных в турнире равно $3x + 2y = 10 + 9 + 6 + 6 + 4 = 27$. Поэтому $x = 7$, $y = 8$.

Составим таблицу возможных результатов турнира.

Победы	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5
Ничьи	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	0	1	2	3	0	1	2	0	1	0
Поражения	5	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0	3	2	1	0	2	1	0	1	0	0
Очки	0	1	2	3	4	5	3	4	5	6	7	6	7	8	9	9	10	11	12	13	15

Из этой таблицы видно, что команда, набравшая 10 очков и занявшая первое место, победила в трех играх, одну сыграла вничью и одну проиграла, т.е. провела 4 результативные игры. Если бы команда, получившая 9 очков и занявшая второе место, проиграла команде, занявшей первое место, то результаты ее игр — 3 победы, 2 поражения, т.е. она сыграла 5 результативных игр. Следовательно, число результативных игр, сыгранных командами, занявшими первое и второе места, равно 9, однако только одна из этих игр была общей. Таким образом, всего в турнире было сыграно не менее 8 результативных игр, однако, как было показано выше, в турнире всего было сыграно 7 результативных игр, противоречие.

Следовательно, команда, занявшая в турнире второе место, не проиграла свой матч команде, занявшей в турнире первое место.

б) Для того чтобы доказать, что нельзя однозначно определить, как закончился матч между командами № 1 и № 2, достаточно привести пример двух турниров, удовлетворяющих условиям задачи, но в которых матчи между командами № 1 и № 2 закончились по-разному — см. таблицы таких турниров, показанных на рис. 1 и рис. 2 соответственно: в турнире, показанном на рис. 1, команда № 2 выиграла у команды № 1, а в турнире, показанном на рис. 2, матч между командами № 1 и № 2 закончился вничью.

	№1	№2	№3	№4	№5	№6	Σ
№1	•	0	3	3	3	1	10
№2	3	•	1	1	1	3	9
№3	0	1	•	1	1	3	6
№4	0	1	1	•	1	3	6
№5	0	1	1	1	•	1	4
№6	1	0	0	0	1	•	2

Рис. 1

	№1	№2	№3	№4	№5	№6	Σ
№1	•	1	0	3	3	3	10
№2	1	•	3	1	1	3	9
№3	3	0	•	1	1	1	6
№4	0	1	1	•	1	3	6
№5	0	1	1	1	•	1	4
№6	0	0	1	0	1	•	2

Рис. 2

9 класс

9.1. Ответ : $(n, m) = (4, 2)$.

Из условия получаем

$$n^2 + n + 1 = (m^2 + m - 3)(m^2 - m + 5) = m^4 + m^2 + 8m - 15.$$

Рассмотрим полученное уравнение

$$n^2 + n - (m^4 + m^2 + 8m - 16) = 0 \quad (1)$$

как квадратное относительно n . Для того чтобы существовали натуральные решения этого уравнения необходимо, чтобы его дискриминант $D = 4m^4 + 4m^2 + 32m - 63$ являлся квадратом некоторого целого числа. Однако, при всех натуральных m

$$D = 4m^4 + 4m^2 + 32m - 63 = (2m^2 + 2)^2 - 4(m - 1)^2 - 59 < (2m^2 + 2)^2$$

и при всех натуральных $m > 2$

$$D = 4m^4 + 4m^2 + 32m - 63 = (2m^2 + 1)^2 + 32(m - 2) > (2m^2 + 1)^2.$$

Следовательно, натуральные решения уравнения (1) могут существовать лишь при натуральных $m = 1$ Или $m = 2$.

Если $m = 1$, то $n^2 + n + 6 = 0$, откуда $n = -2$ или $n = -3$.

Если $m = 2$, то $n^2 + n - 20 = 0$, откуда $n = -5$ или $n = 4$.

Таким образом единственной парой натуральных чисел, удовлетворяющей условию, является пара $(4, 2)$.

9.2. Так как

$$S(AMC) = 0,5AM \cdot MC \sin \angle AMC, \quad S(BMD) = 0,5BM \cdot MD \sin \angle BMD,$$

то

$$S(AMC) = 0,5AM \cdot MC \sin \angle AMC, \quad S(BMD) = 0,5BM \cdot MD \sin \angle BMD,$$

$$AM \cdot MC = 2S(AMC)/\sin \angle AMC, \quad BM \cdot MD = 2S(BMD)/\sin \angle BMD. \quad (1)$$

По теореме косинусов

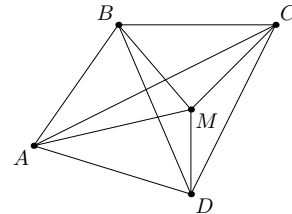
$$AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2AM \cdot MC \cos \angle AMC,$$

$$BD^2 = BM^2 + MD^2 - 2BM \cdot MD \cos \angle BMD.$$

Из (1) получаем

$$\begin{aligned} AC^2 &= AM^2 + MC^2 - 4S(AMC) \cos \angle AMC / \sin \angle AMC = \\ &= AM^2 + MC^2 - 4S(AMC) / \operatorname{tg} \angle AMC, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} BD^2 &= BM^2 + MD^2 - 4S(BMD) \cos \angle BMD / \sin \angle BMD = \\ &= BM^2 + MD^2 - 4S(BMD) / \operatorname{tg} \angle BMD. \end{aligned} \quad (3)$$



Поскольку из условия следует, что

$$S(AMC)/\operatorname{tg} \angle AMC = S(BMD)/\operatorname{tg} \angle BMD,$$

то требуемое равенство следует теперь из (2) и (3).

9.3. Ответ : **а)** да; **б)** нет.

а) Приведём пример турнира, удовлетворяющего условиям задачи, такого, что по старой системе подсчёта очков N не попадает в семёрку лучших (см. рис., на котором шахматисты, отличные от N , обозначены цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, а баллы в таблице турнира выставлены по старой системе).

	N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Очки (Σ)	
											Новая система	Старая система
N	•	0	0	0	1	1	1	0	1	1	15	5
1	1	•	0,5	0,5	0,5	0	0,5	0,5	1	1	14	5,5
2	1	0,5	•	0,5	0,5	0,5	0	0,5	1	1	14	5,5
3	1	0,5	0,5	•	0	0,5	0,5	0,5	1	1	14	5,5
4	0	0,5	0,5	1	•	0,5	0,5	0,5	1	1	14	5,5
5	0	1	0,5	0,5	0,5	•	0,5	0,5	1	1	14	5,5
6	0	0,5	1	0,5	0,5	0,5	•	0,5	1	1	14	5,5
7	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	•	0,5	1	13	5,5
8	0	0	0	0	0	0	0	0,5	•	1	4	1,5
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	•	0	0

б) Так как по условию гроссмейстер N выиграл более половины своих встреч, т. е. N выиграл не менее 5 своих встреч, то по старой системе подсчёта очков он набрал не менее 5 очков. Поэтому, если бы N по старой системе занял место не выше девятого (т. е. не попал бы в восьмёрку лучших), то не менее 8-и участников турнира набрали бы по старой системе подсчёта больше очков чем N , т. е. не менее 5,5 очков каждый. Значит, сумма очков, набранных шахматистами по старой системе, была бы не менее $8 \cdot 5,5 + 5 = 44 + 5 = 49$, тогда как всего в турнире по старой системе разыгрывается $1 \cdot \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ очков. Противоречие. Следовательно, N по старой системе подсчёта очков не мог занять место ниже восьмого.

9.4. Ответ : $mn - 6$.

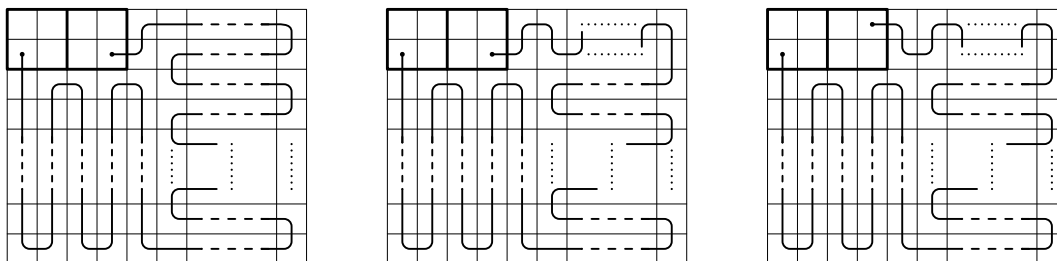
Пусть A — наибольшее число в таблице, а a — наименьшее.

Рассмотрим любую клетку k таблицы, в которой записано число A . Оно равно среднему арифметическому чисел в каких-то двух соседних с ней по стороне клеток k_1 и k_2 . Но все числа в таблице не превосходят A , поэтому числа в этих двух клетках равны A . Так как клетки k_1 и k_2 — соседние по стороне с одной и той же клеткой k , то между собой они не соседние. Поскольку в клетке k_1 записано число A , то оно записано и в каких-то двух соседних с ней по стороне клетках. Одна из этих клеток — клетка k , а другая, поскольку клетки k_1 и k_2 — не соседние, отлична от клетки k_2 . Значит, число A стоит по крайней мере в четырёх различных клетках.

Рассмотрим таблицу, полученную из данной таблицы заменой каждого её числа на противоположное. Полученная таблица тоже удовлетворяет условию задачи, следовательно, наибольшее число встречается в ней по крайней мере четыре раза. Так как a

— наименьшее число в исходной таблице, то $(-a)$ — наибольшее число в полученной таблице, и поэтому в ней число $(-a)$ встречается по крайней мере четыре раза. Следовательно, в исходной таблице число a стоит по крайней мере в четырёх различных клетках.

Таким образом, максимальное и минимальное числа занимают по крайней мере восемь клеток. Остальных клеток в таблице всего $mn - 8$. Значит, в таблице может стоять не больше, чем $mn - 8 + 2 = mn - 6$ различных чисел. Остаётся показать, что в таблице может стоять ровно $mn - 6$ различных чисел.



Отметим в нашей таблице два соседних квадрата 2×2 , один из которых — угловой (см.рис.), и соединим эти квадратики линией, проходящей через каждую клетку таблицы ровно по одному разу, как показано на рисунках, в зависимости от чётности m и n . Во все клетки одного из отмеченных квадратов поставим число 1, а во все клетки другого — число $mn - 6$. Будем двигаться от того конца проведённой нами линии, на котором стоит число 1, к другому её концу, и в каждую следующую клетку, через которую проходит эта линия, будем ставить число, которое на 1 больше числа из предыдущей клетки. Так как вне отмеченных квадратов ровно $mn - 8$ клеток, то мы расставим на проведённой нами линии все целые числа от 2 до $mn - 7$, а значит, последнее число на этой линии тоже будет на 1 больше предпоследнего. Таким образом мы заполним всю таблицу.

Докажем, что это заполнение удовлетворяет условию. В каждом из отмеченных квадратов 2×2 все числа равны, следовательно, любое число, которое стоит внутри отмеченного квадрата 2×2 , равно среднему арифметическому тех двух соседних чисел, которые стоят внутри того же квадрата. Любое другое число стоит на проведённой нами линии, но не на её концах, и поэтому оно на 1 больше предыдущего числа на этой линии и на 1 меньше следующего, а значит, оно является средним арифметическим этих двух чисел. Таким образом, это заполнение удовлетворяет условию.

10 класс

10.1. Ответ: $(x; n; p) = (1; 2; 3)$, $(x; n; p) = (3, 2, 7)$.

Легко видеть, что $2x^3 + x^2 + 10x + 5 = (x^2 + 5)(2x + 1)$, поэтому исходное равенство переписывается в виде

$$(x^2 + 5)(2x + 1) = 2 \cdot p^n. \quad (1)$$

Поскольку $(2x+1)$ — нечетное число при любых натуральных x , то $p \neq 2$ и $2x+1 = p^k$, $x^2+5 = 2 \cdot p^{n-k}$. При этом, так как очевидно, что $x^2+5 > 2x+1$ при всех $x \in \mathbb{N}$ и $p \geq 3$, то $n-k \geq k$. Следовательно, число $(x^2+5) : (2x+1)$. Поэтому число $(x^2+5)/(2x+1)$ целое, но тогда и число $2(x^2+5)/(2x+1)$ целое. Так как $2(x^2+5) = x(2x+1) + (10-x)$, то число $(10-x)/(2x+1)$ также должно быть целым, а вместе с ним должно быть целым

число $2(10 - x)/(2x + 1)$. Однако, $2(10 - x) = -(2x + 1) + 21$, следовательно, должно быть целым число $21/(2x + 1)$. Последнее возможно лишь при $2x + 1 = 1, 3, 7, 21$, т.е. при натуральных $x = 1, x = 3, x = 20$.

При $x = 1$ имеем $(x^2 + 5)(2x + 1) = 6 \cdot 3 = 18 = 2 \cdot 3^2$, откуда $p = 3, n = 2$.

При $x = 3$ имеем $(x^2 + 5)(2x + 1) = 14 \cdot 7 = 2 \cdot 7^2$, откуда $p = 7, n = 2$.

При $x = 20$ имеем $(x^2 + 5)(2x + 1) = 405 \cdot 21 = 5 \cdot 7 \cdot 3^5$, т.е. не имеет вид $2 \cdot p^n$ ни при каких натуральных n и простых p .

10.2. Ответ : нет, не существует.

Допустим, что существует функция, удовлетворяющая равенству $f(f(x)) = xf(x) + 2x$ при любом действительном x , причем $f(\alpha) = -2$ при некотором α . Имеем:

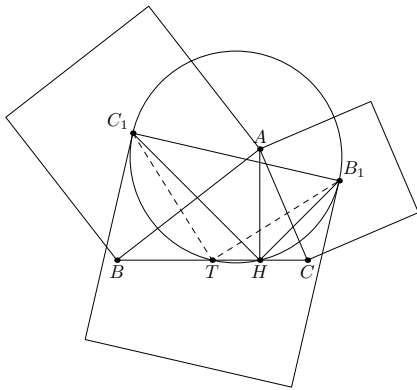
$$f(-2) = f(f(\alpha)) = \alpha f(\alpha) + 2\alpha = -2\alpha + 2\alpha = 0.$$

Тогда $f(0) = f(f(-2)) = -2f(-2) - 4 = -4$.

Далее $f(-4) = f(f(0)) = 0 \cdot f(0) + 2 \cdot 0 = 0$.

В результате, $f(0) = f(f(-4)) = -4f(-4) - 8 - 4 \cdot 0 - 8 = -8$. Однако $f(0) = -4$ — противоречие.

10.3. Пусть точка H — основание высоты опущенной из вершины A на сторону BC .



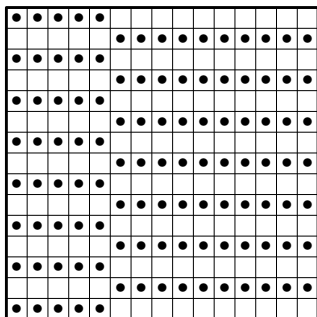
Так как $\angle AB_1C = 90^\circ$, то $\angle AHC + \angle AB_1C = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Таким образом, точки A, B_1, C, H лежат на одной окружности. Так как $AB_1 = B_1C$, то HB_1 — биссектриса угла $\angle AHC$, следовательно $\angle AHB_1 = \angle B_1HC = 90^\circ/2 = 45^\circ$. Аналогично показываем, что $\angle AHC_1 = \angle C_1HB = 45^\circ$.

Далее рассмотрим окружность ω построенную на отрезке C_1B_1 как на диаметре. Так как $\angle C_1HB_1 = \angle C_1HA + \angle AHB_1 = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$, то получаем, что $H \in \omega$. Пусть точка T — вторая точка пересечения окружности ω и BC , тогда $\angle C_1B_1T = \angle C_1HT = 45^\circ$ и $\angle TC_1B_1 = \angle B_1HC = 45^\circ$. Таким образом $\triangle C_1TB_1$ — прямоугольный равнобедренный треугольник, стало быть точка $T \in BC$ будет совпадать с центром квадрата C_1B_1DE .

В случае, когда точка T совпадает с H , то есть ω касается прямой BC , имеем, $\angle C_1B_1H = \angle C_1HB = 45^\circ$ и $\angle B_1C_1H = \angle B_1HC = 45^\circ$. Таким образом точка H — центр квадрата C_1B_1DE .

10.4. Ответ : а) нет, нельзя; б) да, можно.

а) При $n = 14$ вся таблица разбивается на 49 квадратов 2×2 . Поэтому, если



в каждом из них находится ровно 2 фишки, то общее число фишек в таблице равно $2 \cdot 49 = 98$. Поскольку фишек больше, то $n > 14$. С другой стороны, если $n \geq 15$, то число фишек в таблице не менее 105 (см. решение задачи 11.4). Поэтому 100 фишек расставить 100 фишек с соблюдением условий нельзя.

б) Нужная расстановка имеет место при $n = 15$ и приведена в следующем примере.

11 класс

11.1. Ответ: $(x; n; p) = (1; 2; 3)$, $(x; n; p) = (3; 2; 5)$.

Легко видеть, что $x^3 + 3x + 14 = (x + 2)(x^2 - 2x + 7)$, поэтому исходное равенство переписывается в виде

$$(x + 2)(x^2 - 2x + 7) = 2 \cdot p^n. \quad (1)$$

Очевидно, что $x^2 - 2x + 7 > x + 2$ при всех $x \in \mathbb{N}$. Поэтому и в случае $x + 2 = 2 \cdot p^k$, $x^2 - 2x + 7 = p^{n-k}$, и в случае $x + 2 = p^k$, $x^2 - 2x + 7 = 2 \cdot p^{n-k}$, имеем $n - k \geq k \geq 0$. Это означает, что в обоих случаях число $2(x^2 - 2x + 7) : (x + 2)$. Следовательно, число $2(x^2 - 2x + 7)/(x + 2)$ целое, но так как $2(x^2 - 2x + 7) = 2x(x + 2) - 8(x + 2) - 30$, то должно быть целым число $30/(x + 2)$. Последнее возможно лишь если $(x + 2)$ является делителем 30. Однако из (1) следует, что число $x + 2$ имеет не более двух простых делителей, причем один из них в этом случае равен 2. Поэтому при натуральном x число $x + 2$ может принимать лишь значения 3, 5, 6, 10, т.е. x может принимать лишь значения 1, 3, 4, 8.

При $x = 1$ имеем $(x + 2)(x^2 - 2x + 7) = 3 \cdot 6 = 18 = 2 \cdot 3^2$, откуда $p = 3$, $n = 2$.

При $x = 3$ имеем $(x + 2)(x^2 - 2x + 7) = 5 \cdot 10 = 2 \cdot 5^2$, откуда $p = 5$, $n = 2$.

При $x = 4$ имеем $(x + 2)(x^2 - 2x + 7) = 6 \cdot 15 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, т.е. не имеет вид $2 \cdot p^n$ ни при каких натуральных n и простых p .

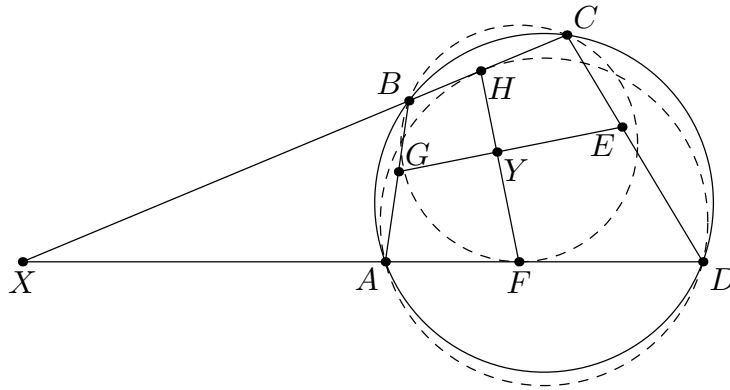
При $x = 8$ имеем $(x + 2)(x^2 - 2x + 7) = 10 \cdot 55 = 2 \cdot 5^2 \cdot 11$, т.е. не имеет вид $2 \cdot p^n$ ни при каких натуральных n и простых p .

11.2. Ответ: $a = 0$.

Действительно, если $a = 0$, то функция $f \equiv 0$ (т.е. константа 0) удовлетворяет условию. Пусть теперь $a \neq 0$ и допустим, что $f(\alpha) = 0$ при некотором α . Имеем: $f(0) = f(f(\alpha)) = \alpha \cdot f(\alpha) + a = a$. Тогда $f(a) = f(f(0)) = 0 \cdot f(0) + a = a$. Поэтому $a = f(a) = f(f(a)) = a \cdot f(a) + a = a \cdot a + a = a^2 + a$, т.е. $a = a^2 = a$, и тогда $a = 0$ — противоречие.

11.3. Если четырёхугольник $ABCD$ имеет пару параллельных сторон, то доказательство следует из симметрии конструкции. Далее будем предполагать, что четырёхугольник $ABCD$ отличен от трапеции и прямоугольника.

Пусть $X = BC \cap AD$, так как Γ_2 касается AD в точке F , то $XF^2 = XB \cdot XC$.



Аналогично $XH^2 = XA \cdot XD$. Но так как четырёхугольник $ABCD$ — вписанный, то $XB \cdot XC = XA \cdot XD$, откуда $XF = XH$, таким образом $\triangle XHF$ — равнобедренный. Значит $\angle BHF = 0,5(180^\circ - \angle CXD) = 0,5(\angle C + \angle D)$. Аналогично $\angle BGE = 0,5(\angle A + \angle D)$. Пусть $GE \cap HF = Y$, тогда $\angle GYH = 360^\circ - (\angle B + 0,5(\angle C + \angle D) + 0,5(\angle A +$

$\angle D)) = 360^\circ - (\angle B + \angle D) - 0,5(\angle A + \angle C)$. В силу того, что $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$, получаем, что $\angle GYH = 360^\circ - 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, таким образом $EG \perp FH$.

11.4. Ответ: $n^2/2$ при четном n ; любое число из промежутка $[2k^2 + k, 2k^2 + 3k + 1]$ при нечетном $n = 2k + 1$.

Если $n = 2k$ — четное число, то вся таблица разбивается на $k^2 = n^2/4$ квадратов 2×2 , в каждом из которых находится ровно 2 фишки. Поэтому общее число фишек равно $2k^2 = n^2/2$.

Пусть теперь $n = 2k + 1$. Разобьем таблицу на квадраты 2×2 и фигуры вида, указанного на рисунке 1, так, как показано на рисунке 2. В любой такой фигуре должна стоять хотя бы одна фишка, иначе в квадрате 2×2 , примыкающем к данной, должно быть не менее 3 фишек (см. рис. 3) — противоречие. Таким образом, общее число фишек в таблице не менее $2k^2 + k$.

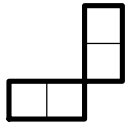


Рис. 1

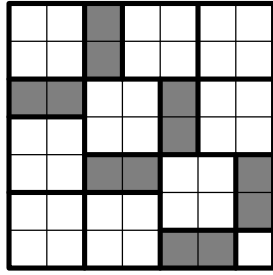


Рис. 2

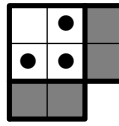


Рис. 3

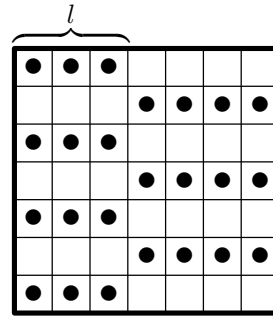


Рис. 4

С другой стороны, поскольку в любом квадрате 2×2 должно быть ровно 2 пустых клетки (незанятых фишками), то аналогично получаем, что пустых клеток в таблице также не менее $2k^2 + k$. И значит, фишек в таблице не более $(2k + 1)^2 - (2k^2 + k) = 2k^2 + 3k + 1$. Пример, приведенный на рисунке 4, показывает, что любое значение числа фишек из указанного промежутка достигается. (В этом примере число фишек равно $2k^2 + k + l$, где $0 \leq l \leq 2k + 1$.)

Второй день

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.5. Действительные, попарно различные, ненулевые числа a , b , c таковы, что графики функций $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = \frac{cx + b}{cx + a}$ и $h(x) = cx + b$ имеют ровно одну общую точку и других попарных точек пересечения не имеют.

Найдите все числа a , b , c , удовлетворяющие указанному условию.

8.6. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) диагональ CA является биссектрисой угла BCD , $CD = AO$ и $BC = OD$, где O — точка пересечения диагоналей.

Найдите углы трапеции $ABCD$.

8.7. У олигарха Бори было 14 серебряных, 15 золотых и 16 платиновых слитков, а у олигарха Ромы — 16 серебряных, 15 золотых и 14 платиновых. Время от времени, Боря и Рома стали меняться слитками следующим образом. Один из них давал другому два слитка из одного металла и получал взамен тоже два слитка, по одному из двух других металлов. В какой-то момент оказалось, что у Ромы нет ни одного золотого слитка.

Сколько платиновых слитков могло у него быть в этот момент?

8.8. N мальчиков ($N \geq 3$), никакие два из которых не равны по росту, выстраиваются по кругу. Назовём мальчика *средним* в данной расстановке их по кругу, если один из его соседей выше его по росту, а другой — ниже.

Докажите, что если N нечётно, то в любой расстановке этих N мальчиков по кругу найдётся хотя бы один средний мальчик.

9 класс

9.5. Найдите все возможные значения, которые может принимать произведение $(ab - cd)(c + d)$, если ненулевые действительные числа a , b , c , d таковы, что

$$a + b + c + d = 0, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{abcd} = 0.$$

9.6. Пусть a, b, c — последовательные нечетные натуральные числа. Известно, что число $a^{b+2} + b^{c+2} + c^{a+2}$ делится на число $a^n + b^n + c^n$ при некотором нечетном натуральном n .

Найдите числа a, b, c и n .

9.7. В четырехугольнике $ABCD$ проведена диагональ BD .

Найдите максимально возможное значение площади этого четырехугольника, если длина ломаной $ABDC$ равна L .

9.8. N мальчиков ($N \geq 3$), никакие два из которых не равны по росту, выстраиваются по кругу. Назовём мальчика *высоким* в данной расстановке их по кругу, если оба его соседа ниже его по росту, и *низким*, если оба соседа выше его по росту.

Докажите, что в любой расстановке этих N мальчиков по кругу число высоких мальчиков равно числу низких мальчиков.

10 класс

10.5. Графики парабол $y = x^2 - a$ и $x = y^2 - b$, $a > 0$, $b > 0$, пересекаются в четырех точках, абсциссы которых x_1, x_2, x_3, x_4 .

Докажите, что $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) = 1$.

10.6. а) Пусть $n^2 + 1 = ab$ — разложение числа $n^2 + 1$, где n — натуральное, на натуральные множители $a > b$.

Докажите, что $a - b \geq \sqrt{4n - 3}$.

б) Найдите все такие натуральные n , при которых оценка п. а) является точной.

10.7. Какие-то три стороны четырехугольника имеют длины 2, 7 и 11.

Найдите площадь этого четырехугольника, если известно, что он имеет наибольшую площадь из всех четырехугольников с указанными сторонами.

10.8. N мальчиков ($N \geq 3$), никакие два из которых не равны по росту, выстраиваются по кругу. Назовём мальчика *высоким* в данной расстановке их по кругу, если оба его соседа ниже его.

Сколько всего может быть высоких мальчиков в расстановке? (Укажите, с обоснованием, все возможные значения.)

11 класс

11.5. На координатной плоскости нарисованы графики параболы $y = ax^2$, $a > 0$, и гиперболы $y = 1/x$, пересекающиеся в точке T . Общая касательная этих графиков касается графика гиперболы в точке Q и графика параболы в точке P .

а) Докажите, что какие-то две медианы треугольника PQT взаимно перпендикулярны.

б) Найдите площадь треугольника PQT .

6. Квадратный трёхчлен $x^2 + px + q$ с целыми коэффициентами p и q называется *иррациональным*, если он имеет иррациональные корни α_1 и α_2 .

Найдите наименьшее значение суммы модулей корней $|\alpha_1| + |\alpha_2|$ среди всех иррациональных квадратных трёхчленов.

7. В четырехугольнике $ABCD$ известны суммы противоположных сторон: $AB + CD = 6$, $BC + DA = 8$.

Найдите площадь этого четырехугольника, если известно, что он имеет наибольшую площадь из всех четырехугольников с указанными суммами противоположных сторон.

8. N мальчиков ($N \geq 3$), никакие два из которых не равны по росту, выстраиваются по кругу. Назовём мальчика *средним* в данной расстановке их по кругу, если один из его соседей выше его по росту, а другой — ниже.

Сколько всего может быть средних мальчиков в расстановке? (Укажите, с обоснованием, все возможные значения.)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.5. Ответ: $a = \frac{3}{11}$, $b = -\frac{8}{11}$, $c = \frac{4}{11}$.

Так как графики функций $f(x)$ и $h(x)$ имеют ровно одну общую точку, то уравнение $ax^2 + bx + c = cx + b$, т.е. уравнение

$$ax^2 - (-b)x + (c - b) = 0, \quad (1)$$

имеет единственное решение. Это значит, его дискриминант равен 0, т.е. $(c - b)^2 - 4a(c - b) = 0 \Leftrightarrow (c - b)(c - b - 4a) = 0$. Так как по условию $c \neq b$ и, значит, $c - b \neq 0$, то $c - b - 4a = 0$, т.е.

$$c - b = 4a. \quad (2)$$

Тогда уравнение (1) с учетом равенства (2) принимает вид $ax^2 - 4ax + 4a = 0$, откуда $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Таким образом $x = 2$ — абсцисса точки пересечения всех трех графиков.

Далее, поскольку графики функций $g(x)$ и $h(x)$ также имеют ровно одну общую точку, то уравнение $\frac{cx+b}{cx+a} = cx+b$, т.е. уравнение $cx+b = (cx+b)(cx+a)$ имеет единственное решение. Но, очевидно, то уравнение превращается в правильное равенство при $cx+b=0$ и при $cx+a=1$, т.е. при $x = -\frac{b}{c}$ и при $x = -\frac{1-a}{c}$. Но так как точка пересечения всех графиков единственна и ее абсцисса, как установлено выше, $x = 2$, то

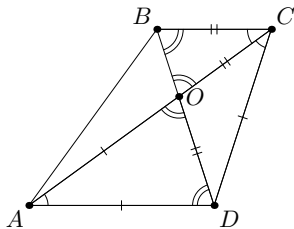
$$-\frac{b}{c} = 2, \quad x = \frac{1-a}{c}. \quad (3) - (4)$$

Из (2), (3) и (4) находим $a = \frac{3}{11}$, $b = -\frac{8}{11}$ и $c = \frac{4}{11}$. Остается убедиться, что при найденных значениях a , b и c , графики функции $f(x)$ и $g(x)$ также пересекаются ровно в одной точке, абсцисса которой $x = 2$. Это легко проверить непосредственно.

8.6. Ответ: $\angle A = 54^\circ$, $\angle B = 126^\circ$, $\angle C = 72^\circ$, $\angle D = 108^\circ$.

Пусть $CD = AO = a$, $BC = OD = b$ и $\angle BCD = 2\alpha$. Тогда по условию $BD = y$, $\angle DCA = \angle ACB = \alpha$. Кроме того, поскольку $BC \parallel AD$, то $\angle CAD = \angle ACB = \alpha$. Поэтому $\triangle ADC$ — равнобедренный и, значит, $AD = CD = a$. Тогда и $\triangle AOD$ — равнобедренный ($AO = a$ и $AD = a$). Следовательно, $\angle AOD = \angle ADO$. Далее, так как $\angle BOC = \angle AOD$ (как вертикальные углы) и $\angle OBC = \angle ODA$ (как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD), то $\triangle BOC$ — также равнобедренный и, значит, $OC = BC = b$. Значит, и $\triangle COD$ — равнобедренный ($OC = b$ и $OD = b$). Поэтому $\angle ODC = \angle OCD = \alpha$. Тогда в $\triangle COD$ внешний угол $\angle BOC = \angle OCD + \angle ODC = \alpha + \alpha = 2\alpha$ и, значит, $\angle OBC = \angle BOC = 2\alpha$. В частности, это означает, что $\triangle BCD$ — равнобедренный ($\angle DBC = 2\alpha$ и $\angle BCD = 2\alpha$). Тогда $BD = CD = a = AD$ и поэтому $\triangle ADB$ — также равнобедренный.

В результате, в $\triangle BCD$ сумма углов $\angle BCD + \angle CDB + \angle DBC = 2\alpha + \alpha + 2\alpha = 5\alpha$. Поскольку сумма углов треугольника равна 180° , получаем $5\alpha = 180^\circ$, откуда $\alpha = 36^\circ$.



Тогда в трапеции $ABCD$ имеем: $\angle C = 2\alpha = 72^\circ$, $\angle D = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$. В равнобедренном $\triangle ADB$ находим также, что угол этого треугольника и данной трапеции $\angle A = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ADB) = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$. Наконец, $\angle B = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 54^\circ = 126^\circ$.

8.7. Ответ: 17, 20, 23, 26 и 29.

Пусть (S, G, P) – набор соответственно серебряных, золотых и платиновых слитков у Ромы в какой-то момент. (В начале он равен $(16, 15, 14)$.) Заметим, что у Бори и Ромы вместе имеется по 30 слитков из каждого из названных металлов. Поэтому в любой момент времени $S \leq 30$, $G \leq 30$ и $P \leq 30$. Далее, так в результате обмена, каждый из олигархов два слитка отдает и два слитка получает, то общее число слитков у каждого из олигархов в результате обменов не меняется и, значит, $S + G + P = 16 + 15 + 14 = 45$. Следовательно, если в какой-то момент у Ромы нет золотых слитков, т.е. $G = 0$, а, как отмечено выше, всегда $S \leq 30$, то в этот момент число платиновых слитков у него $P \geq 45 - 30 = 15$. Итак, если у Ромы нет золотых слитков, то число платиновых слитков P у него в этот момент таково, что $15 \leq P \leq 30$.

Выясним, как может изменяться разность между числом золотых слитков. Операция обмена, указанная в условии задачи, означает, что если до обмена у Ромы был набор слитков (S, G, P) , то после обмена получится какой-то из следующих наборов:

- 1) $(S + 2, G - 1, P - 1)$, 2) $(S - 2, G + 1, P + 1)$, 3) $(S - 1, G + 2, P - 1)$,
4) $(S + 1, G - 2, P + 1)$, 5) $(S - 1, G - 1, P + 2)$, 6) $(S + 1, G + 1, P - 2)$.

Видим, что разность $G - P$ в случаях 1) и 2) не меняется, в случаях 3) и 6) она увеличивается на 3, а в случаях 4) и 5) уменьшается на 3, т.е. $G - P$ может меняться в результате одного обмена только на 3. А так как в начале $G - P = 15 - 14 = 1$, то после любого количества обменов $G - P \equiv 1 \pmod{3}$. При $G = 0$, получим $-P \equiv 1 \pmod{3}$, или $P \equiv 2 \pmod{3}$, т.е. P имеет остаток 2 при делении на 3. Среди чисел от 15 до 30 остаток 2 при делении на 3 имеют только числа 17, 20, 23, 26 и 29. Поэтому число платиновых слитков у Ромы в момент, когда у него не было золотых слитков, не могло, быть другим, кроме указанных пяти чисел. С другой стороны, названные числа слитков у него могли получиться. Покажем, как.

Прежде всего, если Рома 7 раз подряд передаст Боре по 2 золотых слитка, то у него исходный набор слитков $(16, 15, 14)$ преобразуется в набор $(23, 1, 21)$. Далее, первая таблица показывает, как получить наименьшее возможное число 17 платиновых слитков, а вторая таблица — наибольшее возможное число 29 платиновых слитков.

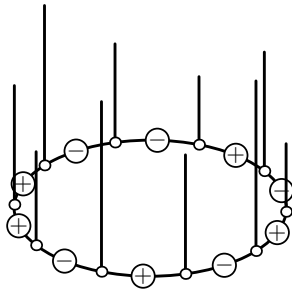
S	23	21	22	23	24	25	26	27	28	S	23	21	22	20	18	19	17	15	16
G	1	2	0	1	2	0	1	2	0	G	1	2	0	1	2	0	1	2	0
P	21	22	23	21	19	20	18	16	17	P	21	22	23	24	25	26	27	28	29

В этих таблицах видим, что 20, 23 и 26 монет у Ромы тоже могло быть.

8.8. Первое решение. Рассмотрим любую расстановку мальчиков по кругу. Поставим между каждыми двумя соседними мальчиками знак „+“ или „−“ по следующему правилу: будем двигаться по кругу по ходу часовой стрелки, начав с какого-нибудь мальчика, и ставить перед очередным мальчиком знак „+“, если он выше предыдущего, и знак „−“, если он ниже (см. рис.). Расстановку знаков прекращаем, как только мы дойдём до мальчика, с которого её начали.

Вследствие такой расстановки знаков между мальчиками ясно, что мальчик будет средним, если и только если с обеих его сторон стоят одинаковые знаки: либо оба „+“, либо оба „−“.

Предположим, что в некоторой расстановке мальчиков по кругу не нашлось ни одного



среднего мальчика. Тогда в этой расстановке слева и справа от каждого мальчика стоят разные знаки. Следовательно, знаки „+“ и „-“ чередуются и поэтому их чётное число. С другой стороны, количество расставленных знаков равно количеству мальчиков, стоящих по кругу, т. е. равно N . Значит, число N должно быть чётным, но это противоречит условию. Поэтому сделанное предположение неверно, и в любой расстановке по кругу нечётного числа мальчиков найдётся хотя бы один средний мальчик.

Второе решение. Предположим, что в некоторой расстановке мальчиков по кругу не нашлось ни одного среднего мальчика. Рассмотрим эту расстановку.

Начав с какого-либо мальчика и двигаясь, например, по ходу часовой стрелки, пронумеруем мальчиков последовательно числами от 1 до N . Назовём мальчика высоким, если он выше обоих своих соседей, и низким, если он ниже обоих своих соседей.

Так как в нашей расстановке мальчиков по кругу нет ни одного среднего мальчика, то каждый мальчик является либо высоким, либо низким. Рассмотрим любых двух соседних мальчиков. Тот из них, который ниже, не может быть высоким, так как он ниже по крайней мере одного из своих соседей. Значит, он является низким. Тот мальчик, который выше, не может быть низким, так как он выше по крайней мере одного из своих соседей. Значит, он является высоким. Таким образом, из любых двух соседних мальчиков один является низким, а другой — высоким.

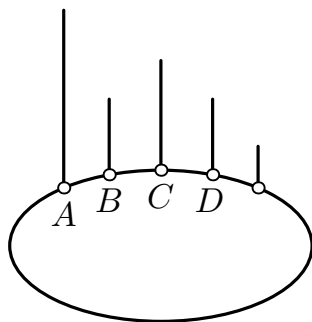
Следовательно, низкие и высокие мальчики чередуются, и мальчики с номерами 1, 3, 5, ... либо все низкие, либо все высокие. Так как N нечётно, то мальчик с номером N тоже среди них. Поэтому мальчики с номерами 1 и N либо оба низкие, либо оба высокие. Но этого по доказанному быть не может, так как мальчики с номерами 1 и N являются соседними. Значит, сделанное предположение неверно, и в любой расстановке мальчиков по кругу должен быть хотя бы один средний мальчик.

Третье решение. Докажем утверждение задачи методом математической индукции по числу N мальчиков (N нечётно, $N \geq 3$).

База индукции $N = 3$. Как бы ни стали 3 мальчика по кругу, среди них есть средний — это тот, который не самый высокий и не самый низкий из них.

Допустим, что утверждение задачи справедливо для некоторого нечётного $N = k$, т. е. как бы ни стали k мальчиков по кругу, среди них найдётся средний мальчик.

Докажем, что тогда утверждение задачи справедливо и для $N = k + 2$. Рассмотрим $k + 2$ мальчика. Пусть $\mathcal{R}$ — некоторая расстановка этих $k + 2$ мальчиков по кругу. Если в



$\mathcal{R}$ есть средний мальчик, то доказывать нечего. Предположим, что средних мальчиков в расстановке $\mathcal{R}$ нет. Пусть A — это самый высокий из $k + 2$ мальчиков и, если двигаться по ходу часовой стрелки, то пусть соседом A является мальчик B , соседом B — мальчик C , а соседом C — мальчик D (см. рис.). Ясно, что B ниже C (иначе B был бы средним, что по предположению не так). Временно удалим мальчиков B и C из расстановки $\mathcal{R}$ — получится расстановка $\mathcal{R}^*$ из k мальчиков. По предположению индукции в расстановке $\mathcal{R}^*$ есть средний мальчик. Им может быть только мальчик D .

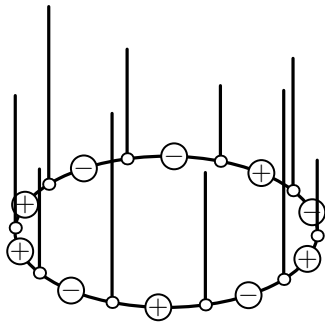
Вернём теперь мальчиков B и C на свои места. Видим, что C не может быть выше D (иначе D был бы средним и в расстановке $\mathcal{R}$). Но тогда, поскольку B ниже C , а C ниже, как доказано, D , мальчик C является средним в расстановке $\mathcal{R}$. Противоречие. Следовательно, сделанное предположение неверно, и в расстановке $\mathcal{R}$ есть средний мальчик.

то площадь четырехугольника при фиксированных x , y , z максимальна при $\angle ABD = \angle CBD = 90^\circ$. Следовательно,

$$S(ABCD) = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}yz = \frac{1}{2}y(x+z) = [x+y+z=L \Rightarrow x+z=L-y] = \frac{1}{2}y(L-y).$$

Максимальное значение произведения $y(L-y)$ при $0 < y < L$, очевидно достигается при $y = L/2$, и равно $L^2/4$. Таким образом, максимальное значение площади четырехугольника $ABCD$ при заданной сумме сторон AB , CD и диагонали BD , $AB + BD + DC = L$, равно $L^2/8$.

9.8. Первое решение. Поставим между каждыми двумя соседними мальчиками знак „+“



или „-“ по следующему правилу: будем двигаться по кругу по ходу часовой стрелки, начав с какого-нибудь мальчика, и ставить перед очередным мальчиком знак „+“, если он выше предыдущего, и знак „-“, если он ниже (см. рис.). Расстановку знаков прекращаем, как только мы дойдём до мальчика, с которого её начали. Вследствие такой расстановки знаков между мальчиками ясно, что мальчик является высоким, если и только если перед ним стоит знак „+“, а после него — знак „-“, и мальчик является низким, если и только если перед ним стоит знак „-“, а после него — знак „+“. Таким образом, количество высоких мальчиков

равно числу перемен знака с „+“ на „-“ при движении по кругу по часовой стрелке, а количество низких мальчиков — числу перемен знака с „-“ на „+“. Кроме того, самый высокий из N мальчиков является высоким, значит, среди знаков встречаются как знаки „+“, так и „-“.

Разобьём все расставленные знаки на группы, каждая из которых состоит из одного или более подряд идущих одинаковых знаков, так, чтобы группы были максимальными по длине, т. е. так, чтобы перед началом и после конца любой группы знаки менялись на противоположные.

Группы плюсов и группы минусов чередуются. Следовательно, знак „+“ меняется на знак „-“, если и только если этот знак „+“ является последним в некоторой группе плюсов, и поэтому перемен знака с „+“ на „-“ столько же, сколько всего групп плюсов. Кроме того, знак „-“ меняется на знак „+“, если и только если этот знак „-“ является последним в какой-нибудь группе минусов, а значит, и перемен знака с „-“ на „+“ столько же, сколько и групп минусов. Таким образом, перемен знака с „+“ на „-“ ровно столько же, сколько и перемен знака с „-“ на „+“, следовательно, высоких мальчиков столько же, сколько и низких.

Второе решение. Заметим, что самый высокий из мальчиков, стоящих по кругу, является высоким, а самый низкий из мальчиков, стоящих по кругу, является низким. Значит, среди мальчиков найдётся хотя бы один высокий и хотя бы один низкий.

Будем двигаться по часовой стрелке, начиная с любого высокого мальчика, пока не встретим следующего высокого мальчика (не исключено, что того, с которого начали). Рассмотрим самого низкого из мальчиков, которые при этом нам встретились. Этот мальчик не является ни первым, ни последним из встретившихся нам мальчиков, так как и первый, и последний из них являются высокими. Следовательно, оба соседа самого низкого из встретившихся нам мальчиков выше него, а значит, он является низким.

Теперь докажем, что низких мальчиков не меньше, чем высоких. Будем двигаться по часовой стрелке, начиная с любого высокого мальчика. Между любыми двумя высокими мальчиками нам, как доказано, встретится хотя бы один низкий. Значит, низких мальчиков не меньше, чем высоких.

Аналогично доказывается, что высоких мальчиков не меньше, чем низких.

Так как низких мальчиков не меньше, чем высоких, и высоких мальчиков не меньше, чем низких, то количество высоких мальчиков равно количеству низких мальчиков.

Третье решение. Назовём мальчика средним в расстановке, если в ней он не является ни высоким, ни низким. Докажем утверждение задачи методом математической индукции по числу N мальчиков.

База индукции $N = 3$. Как бы ни стали 3 мальчика по кругу, среди них есть ровно один высокий и ровно один низкий — это, соответственно, самый высокий и самый низкий из этих трёх мальчиков.

Допустим, что утверждение задачи справедливо для некоторого $N = k$, т. е. как бы ни стали k мальчиков по кругу, среди них число высоких мальчиков равно числу низких.

Докажем, что тогда утверждение задачи справедливо и для $N = k + 1$. Рассмотрим $k + 1$ мальчиков. Пусть $\mathcal{R}$ — некоторая расстановка этих $k + 1$ мальчиков по кругу. Пусть A — это самый высокий из $k + 1$ мальчиков, а мальчики B и C — его соседи

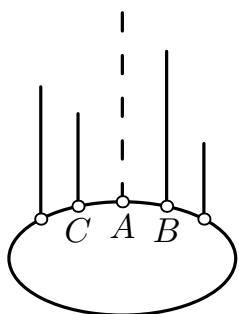


Рис. 1

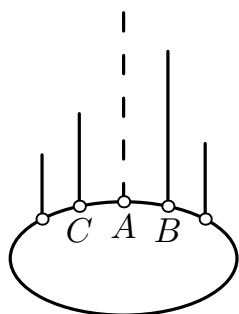


Рис. 2

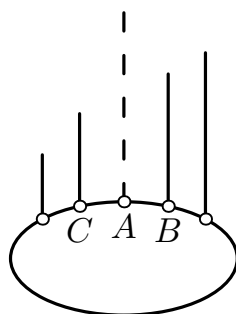


Рис. 3

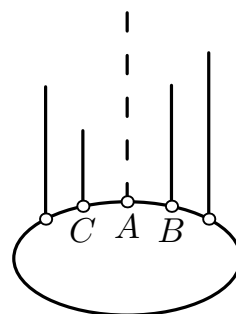


Рис. 4

в расстановке $\mathcal{R}$. Временно удалим мальчика A из расстановки $\mathcal{R}$ — получится расстановка $\mathcal{R}^*$ из k мальчиков. Согласно предположению индукции в расстановке $\mathcal{R}^*$ высоких и низких мальчиков поровну. В расстановке $\mathcal{R}^*$ среди мальчиков B и C не более одного высокого. Если высокий ровно один (пусть это B), то возвращение A на своё прежнее место сделает B в расстановке $\mathcal{R}^*$ средним, а C останется низким, если он был низким в $\mathcal{R}^*$, и средним, если он в расстановке $\mathcal{R}^*$ был средним (см. рис. 1 и рис. 2 соответственно). Если же в расстановке $\mathcal{R}^*$ среди мальчиков B и C высокого нет, то в этой расстановке мальчики B и C либо 1) оба они средние, либо 2) один из них низкий, а другой средний. Возвращение A на своё прежнее место в случае 1) сделает одного из мальчиков B и C низким, а другой останется средним, а в случае 2) оба станут низкими (см. рис. 3 и рис. 4 соответственно). В любом случае число высоких и число низких мальчиков увеличиваются на 1 и остаются равными.

10 класс

10.5. Абсцисса x_i , любой точки пересечения данных парабол удовлетворяет системе двух уравнений $y_i = x_i^2 - a$, $x_i = y_i^2 - b$, $i = 1, 2, 3, 4$. Поэтому $x_i = (x_i^2 - a)^2 - b$, откуда

$$x_i^4 - 2ax_i^2 - x_i + a^2 - b.$$

Тогда, по теореме Виета, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, $x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2 = 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) &= [x_1 + x_4 = -(x_2 + x_3)] = \\ &= -(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) = -(x_1^2 + x_1x_3 + x_2x_1 + x_2x_3)(x_2 + x_3) = \\ &= -(x_1^2x_2 + x_1x_2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_1^2x_3 + x_1x_2x_3 + x_2^2x_3) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -((x_1^2x_2 + x_1x_2^2) + (x_1^2x_3 + x_1x_3^2) + (x_2^2x_3 + x_2x_3^2) + 2x_1x_2x_3) = \\
&= -(x_1x_2(x_1 + x_2) + x_1x_3(x_1 + x_3) + x_2x_3(x_2 + x_3) + 2x_1x_2x_3) = \\
&= [x_1 + x_2 = -(x_3 + x_4), x_1 + x_3 = -(x_2 + x_4), x_2 + x_3 = -(x_1 + x_2)] = \\
&= -(-x_1x_2(x_3 + x_4) - x_1x_3(x_2 + x_4) - x_2x_3(x_1 + x_4) + 2x_1x_2x_3) = \\
&= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_2 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 - 2x_1x_2x_3 = \\
&= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 1,
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

10.6. Ответ: **б)** $n = \frac{k^2 + 3}{4}$, где k нечётно.

а) Первое решение. Обозначим $t = a - b$, т. е. $a = b + t$. Тогда равенство $n^2 + 1 = ab$ переписывается в виде $n^2 + 1 = (b + t)b$, или $b^2 + tb - (n^2 + 1) = 0$.

Заменив в последнем равенстве число b на переменную x , рассмотрим квадратное относительно x уравнение

$$x^2 + tx - (n^2 + 1) = 0. \quad (*)$$

Квадратное уравнение $(*)$ имеет целые коэффициенты и целый корень $x = b$. Значит, его дискриминант $D = t^2 + 4(n^2 + 1)$ — квадрат натурального числа. Так как $t^2 + 4(n^2 + 1) > (2n)^2$, то, следовательно, $D \geq (2n + 1)^2$. Поэтому $t^2 + 4(n^2 + 1) \geq (2n + 1)^2$, или $t^2 \geq 4n - 3$, откуда $t \geq \sqrt{4n - 3}$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Допустим противное: $a - b < \sqrt{4n - 3}$. Возводя обе части этого неравенства в квадрат, получим $a^2 - 2ab + b^2 < 4n - 3$, или, прибавляя к левой части этого неравенства $4ab$, а к правой — равную $4ab$ величину $4(n^2 + 1)$, придём к неравенству

$$(a + b)^2 < 4n - 3 + 4(n^2 + 1) = (2n + 1)^2. \quad (1)$$

С другой стороны, по неравенству Коши $a + b \geq 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{n^2 + 1}$. Возводя обе части этого неравенства в квадрат, получим неравенство

$$(a + b)^2 \geq 4(n^2 + 1) > (2n + 1)^2. \quad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) видим, что квадрат $(a + b)^2$ натурального числа сам находится строго между квадратами двух последовательных натуральных чисел, а значит, не может быть квадратом натурального числа. Противоречие. Следовательно, $a - b \geq \sqrt{4n - 3}$.

б) Докажем сначала, что если $n^2 + 1 = ab$, где n, a, b — натуральные числа и разность $a - b = \sqrt{4n - 3}$, то $n = \frac{k^2 + 3}{4}$, где k нечётно. Действительно, так как a и b — натуральные, то и их разность, равная $\sqrt{4n - 3}$, должна быть натуральным числом. Следовательно, $4n - 3 = k^2$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Поскольку число $4n - 3$ нечётно, то k также нечётно. Выражая из последнего равенства n , получим $n = \frac{k^2 + 3}{4}$. Число n является натуральным, поскольку k нечётно, а квадраты нечётных натуральных чисел при делении на 4 дают остаток 1.

Обратно, докажем, что для любого $n = \frac{k^2 + 3}{4}$, где k нечётное, имеется разложение $n^2 + 1 = ab$ числа $n^2 + 1$ на такие натуральные множители $a > b$, для которых $a - b = \sqrt{4n - 3} = k$.

Для нахождения a и $-b$ имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a + (-b) = k, \\ a \cdot (-b) = -(n^2 + 1). \end{cases}$$

По теореме, обратной теореме Виета, числа a и $-b$ — корни квадратного относительно x уравнения $x^2 - kx - (n^2 + 1) = 0$. Корни этого уравнения

$$x_{1,2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 4(n^2 + 1)}}{2} = \frac{k \pm \sqrt{4n - 3 + 4(n^2 + 1)}}{2} = \frac{k \pm \sqrt{(2n + 1)^2}}{2} = \frac{k \pm (2n + 1)}{2}.$$

Поскольку $a > 0$ и $-b < 0$, то

$$a = \frac{k + (2n + 1)}{2} \quad \text{и} \quad -b = \frac{k - (2n + 1)}{2}. \quad (*)$$

Так как k нечётно, то числа a и $-b$ целые.

Из равенств $(*)$ очевидно, что $a - b = k$. Поэтому остаётся только проверить, что $ab = n^2 + 1$. В самом деле,

$$\begin{aligned} a \cdot b &= \frac{k + (2n + 1)}{2} \cdot \frac{-k + (2n + 1)}{2} = \frac{(2n + 1)^2 - k^2}{4} = \\ &= \frac{(4n^2 + 4n + 1) - (4n - 3)}{4} = \frac{4n^2 + 4}{4} = n^2 + 1. \end{aligned}$$

10.7. Ответ: $30\sqrt{3}$.

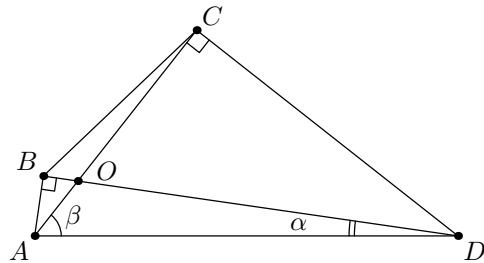
Не сложно показать, что если четырехугольник с тремя заданными сторонами имеет максимально возможную площадь, то он будет выпуклым. Пусть заданы стороны AB , BC , CD четырехугольника $ABCD$ и он имеет максимальную площадь. Поскольку $S(ABCD) = S(ABD) + S(BCD)$ и $S(ABD) = 0,5 \cdot AB \cdot BD \sin \angle ABD$, то при $\angle ABD \neq 90^\circ$ существовал бы четырехугольник с заданными сторонами, площадь которого была бы больше. Следовательно, $AB \perp BD$. Аналогично, $CD \perp AC$. Поэтому прямые углы ABD и ACD опираются на общий отрезок AD , и, следовательно, четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, диаметром которой является сторона AC .

Пусть $\angle CAD = \beta$, $\angle BDA = \alpha$, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AC = x$, $BD = y$, $AD = z$. Тогда

$$a = z \sin \alpha, \quad c = z \sin \beta, \quad x = z \cos \beta, \quad y = z \cos \alpha,$$

$$b = z \sin \angle CDA = z \sin(90^\circ - \beta - \alpha) = z \cos(\beta + \alpha) = z(\cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha).$$

Нетрудно заметить, что $bz + ac = xy$. (Отметим, что это равенство непосредственно следует также из теоремы Птолемея.) С другой стороны, применяя теорему Пифагора для



прямоугольных треугольников ABD и ACD , получим $ac + zb = \sqrt{(z^2 - c^2)(z^2 - a^2)}$. Поэтому $z^4 - (a^2 + b^2 + c^2)z^2 - 2abcz = 0$, и так как $z \neq 0$, то $z^3 - (a^2 + b^2 + c^2)z - 2abc = 0$.

Заметим, что значение z не зависит от того какие значения принимают длины сторон AB , BC и CD , поэтому не нарушая общности, считаем $a = 2$, $b = 7$, $c = 11$. Подставляя числовые значения, получаем уравнение

$$z^3 - 174z - 308 = 0. \quad (1)$$

Попытаемся найти целое решение полученного уравнения. Заметим, что целое решение этого уравнения должно быть четным и поскольку $AD = z$ — гипотенуза прямоугольных треугольников ABD и ACD , то $z > 2$, $z > 11$. Кроме того, $z = AC < AB + BC + CD = 2 + 7 + 11 = 20$. Поскольку $308 = 2^2 \cdot 7 \cdot 11$, то возможным целым решением уравнения (1), с учетом выше сказанного, может быть лишь число 14. Подставляя число 14 в уравнение (1), убеждаемся, что оно является корнем этого уравнения.

Применяя теорему синусов к треугольнику BCD , получаем $7 = b = z \sin \angle BDC = 14 \sin \angle BDC$, откуда $\sin \angle BDC = 1/2$, т.е. $\angle BDC = 30^\circ$. Поэтому угол между диагоналями AC и BD равен $\angle COD = 90^\circ - \angle BDC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Используя числовые данные, находим

$$AC = x = \sqrt{z^2 - c^2} = \sqrt{196 - 121} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3},$$

$$BD = y = \sqrt{z^2 - a^2} = \sqrt{196 - 4} = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}.$$

Следовательно, искомая площадь равна

$$S(ABCD) = 0,5 \cdot AC \cdot BD \cdot \sin \angle COD = 0,5 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}/2 = 30\sqrt{3}.$$

10.8. Ответ: любое целое число от 1 до $[N/2]$ включительно.

Первое решение. Пусть N мальчиков, никакие два из которых не равны по росту, выстроились по кругу. Без нарушения общности считаем, что все они стоят лицом к центру — тогда каждый мальчик является соседом справа только у одного мальчика.

Если некоторый мальчик m является высоким в данной расстановке по кругу, то оба его соседа высокими в этой расстановке не являются: их сосед m выше (точнее, длиннее) их. В частности, у мальчика m его сосед справа не является высоким. Отметим всех высоких мальчиков в данной расстановке и объединим в одну пару каждого высокого мальчика и его соседа справа. Ясно, что никакой мальчик не входит в две такие пары. Следовательно, количество пар не превосходит $[N/2]$, а так как в каждой паре ровно один высокий мальчик, то в расстановке высоких мальчиков не более $[N/2]$ (здесь [...] — целая часть числа). Несколько короче, это можно было бы доказать методом от противного: если бы среди N мальчиков высоких было больше чем $[N/2]$, то какие-то два высоких мальчика были бы соседями, а значит, один из них не мог бы быть высоким.

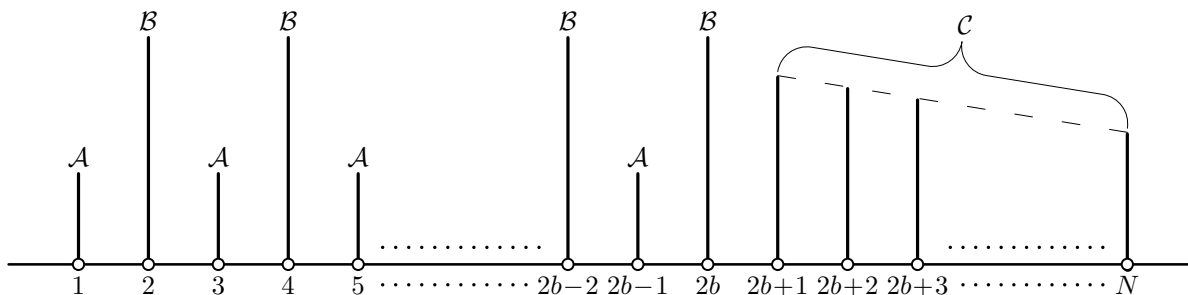
С другой стороны, в любой расстановке всегда есть хотя бы один высокий мальчик — это самый высокий из N мальчиков. Итак, в любой расстановке N мальчиков по кругу число b высоких мальчиков не менее одного и не более $[N/2]$.

Остаётся для любого натурального b из отрезка $[1, [N/2]]$ привести пример такой расстановки N мальчиков по кругу, в которой ровно b высоких мальчиков.

Перенумеруем мальчиков в порядке возрастания их роста: $1, 2, 3, \dots, N$. Фиксируем какое-либо натуральное $b \in [1, [N/2]]$. Разобьём N мальчиков на три группы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и

$\mathcal{C}$: группа $\mathcal{A}$ состоит из b мальчиков самого низкого роста, т. е. из мальчиков $1, 2, \dots, b$; группа $\mathcal{B}$ состоит из b мальчиков самого высокого роста, т. е. из мальчиков $N-b+1, N-b+2, \dots, N$ (так как $b \leq [N/2]$, т. е. $2b \leq N$, то группы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ организовать можно); наконец, группа $\mathcal{C}$ состоит из всех остальных мальчиков, т. е. из мальчиков $b+1, \dots, N-b$ (если N чётно и $b = N/2$, то группа $\mathcal{C}$ окажется пустой).

Места, на которые можно ставить мальчиков по кругу, также пронумеруем, начав с какого-либо места, подряд по ходу часовой стрелки: $1, 2, \dots, N$. Поставим на первые b нечётных мест (т. е. на места с номерами $2k-1$, где $k = 1, \dots, b$) мальчиков из группы $\mathcal{A}$ в каком-либо порядке, а на первые b чётных мест (т. е. на места с номерами $2k$, где $k = 1, \dots, b$) мальчиков из группы $\mathcal{B}$ в каком-либо порядке, и на оставшиеся места $2b+1, \dots, N$ поставим мальчиков из группы $\mathcal{C}$ в порядке убывания их роста (т. е. на место с номером $2b+1$ станет мальчик $N-b$, ..., на место с номером N — мальчик $b+1$). В такой расстановке будет ровно b высоких мальчиков — ими будут в точности все мальчики из группы $\mathcal{B}$. В самом деле, никакой мальчик из группы $\mathcal{A}$ или группы $\mathcal{C}$ не является в этой расстановке высоким: по построению хотя бы один его сосед (а для мальчика из $\mathcal{A}$ оба его соседа) выше его. Мальчики же из группы $\mathcal{B}$ — все высокие в этой расстановке: их соседи — это мальчики из групп $\mathcal{A}$ или $\mathcal{C}$, а они ниже ростом.



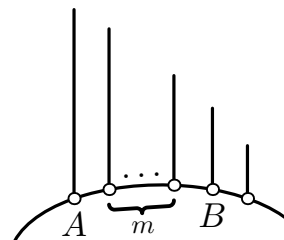
Чтобы проиллюстрировать на рисунке описанную выше расстановку мальчиков, разорвём для наглядности окружность, вдоль которой стоят мальчики, между местами 1 и N и распрямим её (вместе со стоящими на ней мальчиками) в отрезок — см. рисунок, на котором числа под горизонтальным отрезком (бывшим ранее окружностью) — номера мест, на которых стоят мальчики, вертикальные отрезки схематично показывают их относительный рост, а буквы над этими отрезками — группу, которой принадлежит мальчик.

Второе решение. Вначале индукцией по числу $N \geq 3$ докажем, что в любой расстановке N мальчиков по кругу не более $[N/2]$ высоких.

База индукции $N = 3$ и $N = 4$ очевидна.

Предположим, что сформулированное утверждение справедливо для всех $N = 3, \dots, k$, т. е. в любой расстановке l мальчиков, где $3 \leq l \leq k$, по кругу не более $[l/2]$ высоких.

Докажем, что утверждение верно и для $N = k+1$. Рассмотрим какую-либо расстановку $\mathcal{R}$ этих $k+1$ мальчиков по кругу. Если в ней нет высокого или высокий только один, то доказывать нечего. Пусть поэтому в расстановке $\mathcal{R}$ число высоких мальчиков $b \geq 2$. Рассмотрим какого-либо высокого в расстановке $\mathcal{R}$ мальчика A , и пусть B — первый следующий за ним по ходу часовой стрелки высокий мальчик в этой расстановке. Без нарушения общности считаем, что A выше B . Пусть между мальчиками A и B , если двигаться по ходу часовой стрелки,



располагаются m мальчиков. Ясно, что $m \geq 1$. Ни один из этих m мальчиков не является высоким в расстановке $\mathcal{R}$ (A и B — ближайшие по ходу часовой стрелки высокие мальчики в $\mathcal{R}$). Удалим из расстановки $\mathcal{R}$ этих m мальчиков и мальчика B — получим новую расстановку $\mathcal{R}^*$, в которой не более $(k+1) - (m+1) = k-m \leq k-1$ мальчиков. Из удалённых мальчиков в расстановке $\mathcal{R}$ только один являлся высоким — это мальчик B . В получившейся расстановке $\mathcal{R}^*$ статус оставшихся мальчиков, как легко видеть, не изменится: A останется высоким, а не удалённый сосед мальчика B (поскольку A выше B и B был высоким) не будет высоким и в расстановке $\mathcal{R}^*$. Стало быть, в расстановке $\mathcal{R}^*$ высоких мальчиков будет на одного меньше, чем в расстановке $\mathcal{R}$, т. е. их будет $b-1$. В силу предположения индукции $b-1 \leq [(k-1)/2]$, а значит, $b \leq [(k-1)/2] + 1 = [(k+1)/2]$. Утверждение доказано.

С другой стороны, в любой расстановке всегда есть хотя бы один высокий мальчик — это самый высокий из N мальчиков. Итак, в любой расстановке N мальчиков по кругу число b высоких мальчиков не менее одного и не более $[N/2]$.

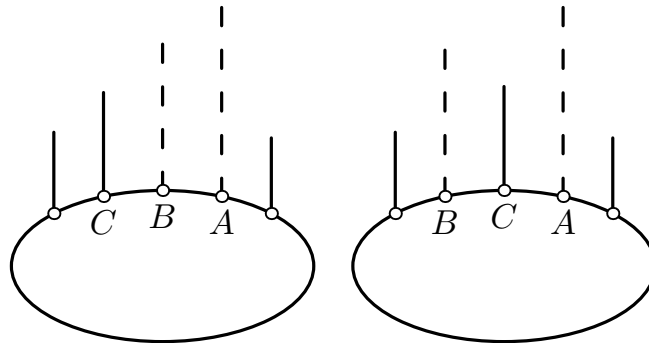
Теперь методом математической индукции по числу N мальчиков покажем, что для любого натурального $b \in [1, [N/2]]$ найдётся такая расстановка N мальчиков по кругу, в которой ровно b высоких мальчиков.

База индукции $N = 3$ и $N = 4$ очевидна.

Допустим, что сформулированное утверждение справедливо для некоторого $N = k$, т. е. какое бы натуральное число $b \in [1, [k/2]]$ ни взять, найдётся такая расстановка k мальчиков, в которой ровно b высоких.

Докажем, что тогда утверждение задачи справедливо и для $N = k+2$. Зафиксируем любое натуральное b из отрезка $[1, [(k+2)/2]]$. Могут представиться только две возможности: либо **а)** $b \in [1, [k/2]]$, либо **б)** $b = [k/2] + 1$. Пусть A — самый высокий из $k+2$ мальчиков, а B — следующий за ним по росту. Временно удалим этих двух мальчиков — останутся k мальчиков.

В случае **а)** рассмотрим какую-либо такую существующую по предположению индукции расстановку оставшихся k мальчиков, в которой ровно b высоких. Выберем в



этой расстановке какого-нибудь высокого мальчика (обозначим его C) и поставим рядом с ним с одной стороны от него мальчиков A и B (см. рис. 1). Легко видеть, что в получившейся расстановке $k+2$ мальчиков число высоких мальчиков не изменится, т. е. равно b . В случае **б)** рассмотрим какую-либо такую существующую по предположению индукции расстановку оставшихся k мальчиков, в которой ровно $[k/2]$ высоких. Выберем в этой расстановке какого-нибудь высокого мальчика (обозначим его C) и поставим рядом с ним с одной стороны от него мальчика A , а с другой — мальчика B (см. рис. 2). В получившейся расстановке $k+2$ мальчиков мальчик C не будет высоким, мальчики A и B будут высокими, а из остальных мальчиков высокими будут те

же мальчики, которые были высокими и в выбранной расстановке k мальчиков. Стало быть, в полученной расстановке высоких мальчиков будет ровно $[k/2] + 1$.

11 класс

11.5. 6) Ответ: $S = 27/4$.

Найдем координаты $(x_T; y_T)$ точки пересечения графиков параболы $y = ax^2$ и гиперболы $y = 1/x$. Имеем $ax_T^2 = 1/x_T$, откуда $x_T = 1/\sqrt[3]{a} = t$ и $y_T = 1/x_T = t$. Уравнение касательной к графику параболы в точке $P(x_P; y_P)$ имеет вид $y - y_P = 2a(x - x_P)$, а уравнение касательной к графику гиперболы в точке $Q(x_Q; y_Q)$ имеет вид $y - y_Q = (-1/x_Q^2)(x - x_Q)$. Так как эта касательная является общей для обоих графиков, то

$$2ax_P = -1/x_Q^2, \quad (1)$$

$$-2ax_P^2 + y_P = 1/x_Q + y_Q.$$

Так как $y_P = ax_P^2$ и $y_Q = 1/x_Q$, то полученное равенство примет вид

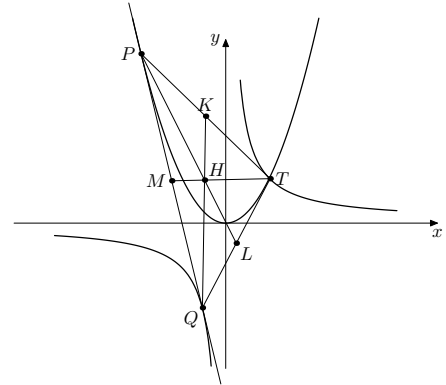
$$-ax_P^2 = 2/x_Q. \quad (2)$$

Решая систему уравнений (1), (2), находим $x_Q = -1/(2t)$, $x_P = -2/t$, и тогда $y_Q = -2t$, $y_P = 4t$. Таким образом

$$T(\frac{1}{t}; t), \quad P(-\frac{2}{t}; 4t), \quad Q(-\frac{1}{2t}; -2t). \quad (3)$$

Пусть M , K , L — середины сторон PQ , PT , TQ соответственно. Тогда

$$M(-\frac{5}{4t}; t), \quad K(-\frac{1}{2t}; \frac{5}{2}t); \quad L(\frac{1}{4t}; -t).$$



Сравнивая полученные значения с (3), замечаем, что отрезок MT параллелен оси Ox , так как $y_M = y_T$, а отрезок QK параллелен оси Oy , так как $y_Q = y_K$. Следовательно медианы MT и QK в треугольнике PQT перпендикулярны, что и требовалось доказать.

Пусть H — точка пересечения медиан треугольника PQT . Тогда

$$S(PQT) = 2S(QKT) = [TH \perp QK] = 2 \cdot \frac{1}{2} QK \cdot TH = [TH = \frac{2}{3} MT] = \frac{2}{3} QK \cdot TM.$$

Поскольку $TM \parallel Ox$, то $TM = 1/t - (-5/(4t)) = 9/(4t)$, Аналогично, так как $QK \parallel Oy$, то $QK = 5t/2 - (-2t) = 9t/2$. Таким образом,

$$S(PQT) = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4t} \cdot \frac{9t}{2} = \frac{27}{4}.$$

11.6. Ответ: $\sqrt{5}$.

Так как квадратный трёхчлен $x^2 + px + q$ по условию имеет корни, то его дискриминант $D = p^2 - 4q$ неотрицателен. Поскольку $p^2 = 4q + D$ и по условию p и q — целые,

Доказательство. По формуле Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Так как по условию полупериметр $p = (c+L)/2$ и сторона c фиксированы, то площадь треугольника максимальна, если произведение $(p-a)(p-b)$ принимает максимальное значение для $0 < a < L$, $0 < b < L$, $a+b=L$. Имеем

$$\begin{aligned}(p-a)(p-b) &= (p-a)(p-(L-a)) = (p-a)(p-L+a) = -a^2 + aL + p(p-L) = \\ &= -(a-L/2)^2 + L^2/4 + p(p-L).\end{aligned}$$

Очевидно, что максимальное значение рассматриваемое произведение принимает при $a = L/2$, что и доказывает лемму.

Из леммы теперь следует, что у рассматриваемого четырехугольника $AB = BC = 3$, $AD = DC = 4$. Тогда

$$S(ABCD) = S(ABD) + S(BDC) = 2S(ABD) = 2 \cdot 0.5 \cdot AB \cdot AD \sin \angle BAD = 12 \sin \angle BAD,$$

а так как по условию его площадь максимальна, то $\angle BAD = 90^\circ$ и $S(ABCD) = 12$.

11.8. Ответ : любое целое число от 0 до $N-2$ включительно одинаковой чётности с N .

Первое решение. Рассмотрим любую расстановку мальчиков по кругу. Поставим

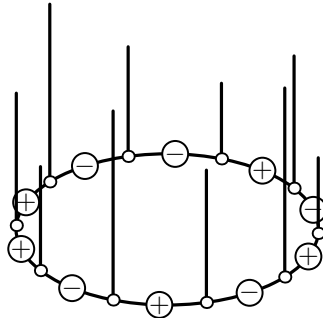


Рис. 1

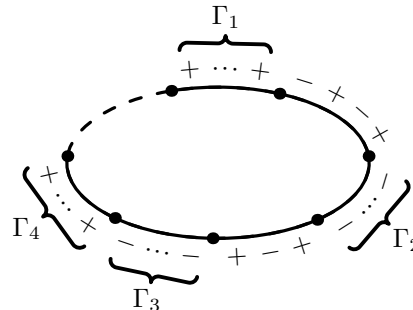


Рис. 2

между каждыми двумя соседними мальчиками знак „+“ или „-“ по следующему правилу: будем двигаться по кругу по ходу часовой стрелки, начав с какого-нибудь мальчика, и ставить перед очередным мальчиком знак „+“, если он выше предыдущего, и знак „-“, если он ниже (см. рис. 1). Расстановку знаков прекращаем, как только мы дойдём до мальчика, с которого её начали.

Вследствие такой расстановки знаков между мальчиками ясно, что мальчик будет средним, если и только если с обеих его сторон стоят одинаковые знаки: либо оба „+“, либо оба „-“.

Если среди расставленных знаков встречается более одного подряд идущих одинаковых знаков, то каждую такую последовательность подряд идущих одинаковых знаков объединим в одну (свою для каждой последовательности) группу, содержащую все знаки этой последовательности (см. рис. 2). Возможно, что таких групп не будет вовсе (рассуждения этот случай не исключают). Пусть в результате мы получили k групп $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$, содержащих соответственно $m_1, \dots, m_k$ знаков ($m_i \geq 2$, $i = 1, \dots, k$). Так как средние мальчики — это в точности те мальчики, с обеих сторон от которых стоят одинаковые знаки, то такие мальчики находятся только между знаками каждой из групп

$\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$, а значит, число s средних мальчиков равно $s = (m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \dots + (m_k - 1) = m_1 + m_2 + \dots + m_k - k$.

Если некоторая группа Γ_i состоит из „+“, то с обеих сторон от неё стоит по одному знаку „–“, а если из „–“, то с обеих сторон от неё – по одному знаку „+“ (если бы это было не так, то эти знаки были бы отнесены к группе Γ_i). Пусть m – число знаков, не попавших ни в одну из групп (возможно, $m = 0$). Знаки, стоящие между соседними группами чередуются (если бы это было не так, то какие-то из них образовали бы новую группу, чего быть не может, поскольку $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ – все группы). Поэтому, если мы в каждой группе вытрем все знаки, кроме одного, то получим такую расстановку знаков, в которой знаки „+“ и „–“ чередуются, а их число будет $m + k$, и, значит, число $m + k$ чётно.

С другой стороны, $N = m_1 + m_2 + \dots + m_k + m$, или $N = (m_1 + m_2 + \dots + m_k - k) + (m + k)$, т. е. $N = s + (m + k)$. Поскольку число $m + k$, как доказано, чётно, то число s средних мальчиков и число N всех мальчиков имеют одинаковую чётность. Ясно, что $s \leq N - 2$, поскольку два мальчика – самый высокий и самый низкий из N мальчиков – не могут быть средними ни в какой расстановке. Итак, в любой расстановке N мальчиков по кругу число s средних мальчиков имеет ту же чётность, что и число N , и не превосходит $N - 2$.

Остаётся для любого натурального s из отрезка $[0, N - 2]$ и такого, что $s \equiv N \pmod{2}$, привести пример такой расстановки N мальчиков по кругу, в которой ровно s высоких мальчиков.

Перенумеруем мальчиков в порядке возрастания их роста: $1, 2, 3, \dots, N$. Фиксируем какое-либо натуральное $s \in [0, N - 2]$, такое, что $s \equiv N \pmod{2}$. Так как $s \equiv N \pmod{2}$ и $s \leq N - 2$, то число $N - s$ чётно и положительно; обозначим $2b = N - s$, $b \in \mathbb{N}$. Разобьём

N мальчиков на три группы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$: группа $\mathcal{A}$ состоит из b мальчиков самого низкого роста, т. е. из мальчиков $1, 2, \dots, b$; группа $\mathcal{B}$ состоит из b мальчиков самого высокого роста, т. е. из мальчиков $N - b + 1, N - b + 2, \dots, N$; наконец, группа $\mathcal{C}$ состоит из всех остальных $s = N - 2b$ мальчиков, т. е. из мальчиков $b + 1, \dots, N - b$.

Места, на которые можно ставить мальчиков по кругу, также пронумеруем, начав с какого-либо места, подряд по ходу часовой стрелки: $1, 2, \dots, N$. Поставим на первые b нечётных мест (т. е. на места с номерами $2k - 1$, где $k = 1, \dots, b$) мальчиков из группы $\mathcal{A}$ в каком-либо порядке, а на первые b чётных мест (т. е. на места с номерами $2k$, где $k = 1, \dots, b$) мальчиков из группы $\mathcal{B}$ в каком-либо порядке, и на оставшиеся места $2b + 1, \dots, N$ поставим мальчиков из группы $\mathcal{C}$ в порядке убывания их роста (т. е. на место с номером $2b + 1$ станет мальчик $N - b$, ..., на место с номером N – мальчик $b + 1$). В такой расстановке будет ровно s средних мальчиков – ими будут в точности все мальчики из группы $\mathcal{C}$. В самом деле, никакой мальчик из группы $\mathcal{A}$ или группы $\mathcal{B}$ не является в этой расстановке средним: по построению для мальчика из группы $\mathcal{A}$ оба соседа выше его, а для мальчика из группы $\mathcal{B}$ оба соседа ниже его. Мальчики же из группы $\mathcal{C}$ все средние.

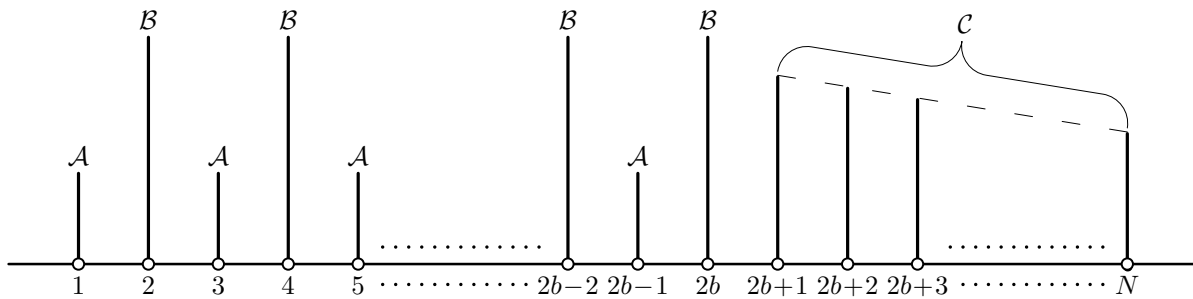


Рис. 3

Чтобы проиллюстрировать на рисунке описанную выше расстановку мальчиков, разорвём для наглядности окружность, вдоль которой стоят мальчики, между местами 1 и N и распрямим её (вместе со стоящими на ней мальчиками) в отрезок — см. рисунок, на котором числа под горизонтальным отрезком (бывшим ранее окружностью) — номера мест, на которых стоят мальчики, вертикальные отрезки схематично показывают их относительный рост, а буквы над этими отрезками — группу, которой принадлежит мальчик.

Второе решение.

Третье решение. Назовём мальчика высоким в расстановке, если он выше каждого из своих соседей, и низким, если он ниже каждого из своих соседей. Ясно, что в расстановке любой мальчик является только либо высоким, либо низким, либо средним.

Вначале методом математической индукции по числу N ($N \geq 3$) мальчиков докажем, что число средних мальчиков в любой расстановке N мальчиков по кругу не превосходит $N - 2$ и имеет ту же чётность, что и N .

База индукции $N = 3$ очевидна.

Допустим, что сформулированное утверждение справедливо для некоторого $N = k$, т. е. в любой расстановке k мальчиков по кругу число средних не превосходит $k - 2$ и имеет такую же чётность как и k .

Докажем, что тогда утверждение задачи справедливо и для $N = k + 1$. Рассмотрим $k + 1$ мальчиков и некоторую их расстановку $\mathcal{R}$ по кругу. Пусть A — самый высокий из N мальчиков, и пусть мальчик B — сосед мальчика A , а мальчик C — другой (отличный от A) сосед

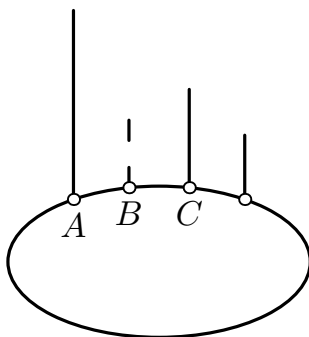


Рис. 1

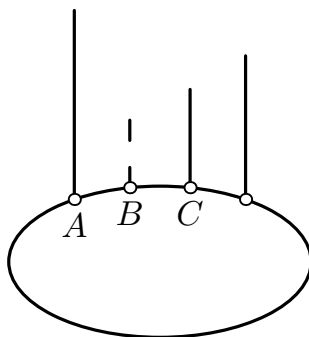


Рис. 2

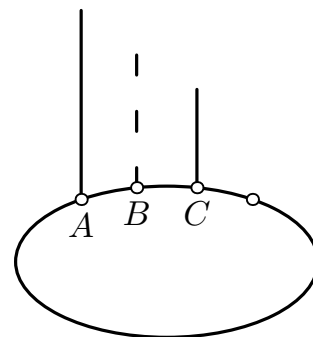


Рис. 3

мальчика B . Удалим мальчика B из расстановки $\mathcal{R}$ — получим некоторую расстановку $\mathcal{R}^*$ оставшихся k мальчиков по кругу. Найдём, как могло измениться число t средних

мальчиков в расстановке $\mathcal{R}^*$ по сравнению с их числом s в расстановке $\mathcal{R}$. Свой статус (высокий, средний или низкий) в расстановке $\mathcal{R}^*$ по сравнению с расстановкой $\mathcal{R}$ мог изменить только мальчик C . Если мальчик B был низкий в $\mathcal{R}$, то в расстановке $\mathcal{R}^*$ число средних мальчиков по сравнению с расстановкой $\mathcal{R}$ изменяется на 1 (либо C не был средним в $\mathcal{R}$, но стал средним в $\mathcal{R}^*$, т. е. $s = t + 1$ (см. рис. 1), либо он был средним в $\mathcal{R}$, но перестал им быть в $\mathcal{R}^*$, т. е. $s = t - 1$ (см. рис. 2)). Если же B был средним в расстановке $\mathcal{R}$, то статус C в расстановке $\mathcal{R}^*$ по сравнению с расстановкой $\mathcal{R}$ не изменяется (если он был средним, то средним и останется, а если низким — то останется низким (см. рис. 3)). В этом случае $s = t - 1$. Итак, либо $s = t - 1$, либо $s = t + 1$. Следовательно, так как по предположению индукции $t \equiv k \pmod{2}$, то $s \equiv k+1 \pmod{2}$, а так как $t \leq k - 2$, то $s \leq k - 1 = (k + 1) - 2$. Утверждение доказано.

Теперь методом математической индукции по числу N мальчиков покажем, что для любого целого $s \in [0, N - 2]$, такого, что $s \equiv N \pmod{2}$, найдётся такая расстановка N мальчиков по кругу, в которой ровно s средних мальчиков.

База индукции $N = 3$ очевидна.

Допустим, что сформулированное утверждение справедливо для некоторого $N = k$, т. е. для любого $s \in [0, k - 2]$, такого, что $s \equiv k \pmod{2}$, найдётся такая расстановка k мальчиков по кругу, в которой ровно s средних мальчиков.

Докажем, что тогда утверждение задачи справедливо для $N = k + 1$. Пусть A — самый высокий из $k + 1$ мальчика. Временно удалим его из числа мальчиков, останутся k мальчиков. Рассмотрим какую-либо расстановку $\mathcal{R}$ оставшихся k мальчиков по кругу, в которой ровно s средних мальчиков ($s \leq k - 2$ и $s \equiv k \pmod{2}$). Пусть G — какая-либо группа подряд стоящих мальчиков в этой расстановке, в которой все мальчики, кроме крайних, являются средними. Обозначим крайних мальчиков из группы G через B и C , и пусть B выше C . Тогда, поставив мальчика A между мальчиком C и его соседом из группы G , получим расстановку $\mathcal{R}'$ из $k + 1$ мальчика, в которой ровно $s - 1$ средних, а поставив мальчика A между мальчиком B и тем его соседом, который не входит в группу G , получим расстановку $\mathcal{R}''$ из $k + 1$ мальчика, в которой ровно $s + 1$ средних мальчиков. Так как по предположению индукции целое неотрицательное число s может быть взято любым, таким, что $s \leq k - 2$ и $s \equiv k \pmod{2}$, то, следовательно, для любого натурального $m \in [0, k - 1]$, такого, что $m \equiv k + 1 \pmod{2}$, существует расстановка $k + 1$ мальчиков по кругу, в которой ровно m средних мальчиков. Утверждение доказано.