

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.1. Числа x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$) являются корнями уравнения

$$x^3 - 3x^2 + (a + 2)x - a = 0,$$

где a — некоторое действительное число.

Найдите все возможные значения, которые может принимать выражение $4x_1 - x_1^2 + x_3^2$.

8.2. Найдите все пары $(n; m)$ натуральных чисел n и m , для которых выполняется равенство

$$n! + 505 = m^2.$$

8.3. В треугольнике ABC проведена медиана AM . Пусть B_1 — основание перпендикуляра BB_1 , опущенного из вершины B на биссектрису угла BMA , а C_1 — основание перпендикуляра CC_1 , опущенного из вершины C на биссектрису угла AMC . Луч MA пересекает отрезок B_1C_1 в точке A_1 .

Найдите величину отношения B_1A_1/A_1C_1 .

8.4. У Тани есть n^2 конфет, которые разложены в n коробок ($n > 2$). Таня выбирает какие-то две коробки и, если общее число конфет в них четное, то Таня перекладывает конфеты в этих двух коробках так, чтобы их стало поровну. В противном случае Таня выбирает другую пару коробок и пытается сделать с ними то же самое.

При каких n Таня заведомо может с помощью таких перекладываний уравнивать количества конфет во всех коробках независимо от их первоначального распределения в этих коробках?

9 класс

9.1. Прямая пересекает гиперболу H_1 , заданную уравнением $y = 1/x$, в точках A и B , а гиперболу H_2 , заданную уравнением $y = -1/x$, — в точках C и D . Точка O — начало координат.

Докажите, что площади треугольников OAC и OBD равны.

9.2. Существует ли функция $f(x)$, заданная при всех действительных x и принимающая действительные значения, которая удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{cases} \{f(x)\} \sin^2 x + \{x\} \cos f(x) \cos x = f(x), \\ f(f(x)) = f(x), \end{cases}$$

при всех действительных x .

(Здесь через $\{y\}$ обозначена дробная часть числа y .)

9.3. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) как на диаметрах построены окружности Γ_{AB} и Γ_{CD} . Окружность Γ_{AB} пересекает отрезки AC и BD в точках M и N соответственно. Окружность Γ_{CD} пересекает отрезки AC и BD в точках K и L соответственно.

Докажите, что четырехугольник $MNKL$ — трапеция или параллелограмм.

9.4. У Светы есть n^2 конфет, которые разложены в n коробок ($n > 3$). Света выбирает какие-то три коробки и, если общее число конфет в них кратно 3, Света перекладывает конфеты в этих трёх коробках так, чтобы их стало поровну. В противном случае Света выбирает другую тройку коробок и делает с ними то же самое.

При каких n Света заведомо может с помощью таких перекладываний уравнивать количества конфет во всех коробках независимо от их первоначального распределения в этих коробках?

10 класс

10.1. Из точки M , лежащей на гиперболе H_1 , заданной уравнением $y = 1/x$, проведены две касательные к ветвям гиперболы H_2 , заданной уравнением $y = -1/x$; M_1, M_2 — точки касания.

Докажите, что прямая M_1M_2 касается гиперболы H_1 .

10.2. а) Когда натуральное число n разделили с остатком поочередно на два других натуральных числа, то в результате получили два ненулевых остатка.

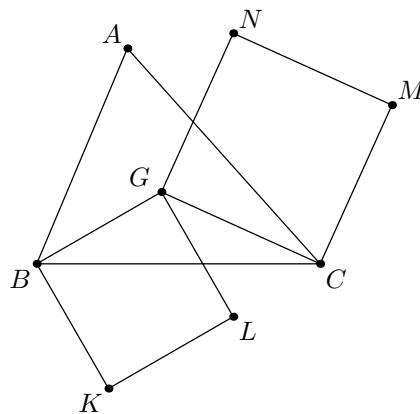
Может ли сумма этих остатков равняться исходному числу n ?

б) Натуральное число n разделили с остатком поочередно на 29, на 39 и на 59. В результате получились три ненулевых остатка, сумма которых равна исходному числу n .

Найдите все такие n .

10.3. Пусть A_1 — середина стороны BC , а G — точка пересечения медиан треугольника ABC . Через $GBKL$ и $GCMN$ обозначены квадраты, лежащие слева относительно лучей GB и GC соответственно (см. рисунок). Пусть A_2 — середина отрезка, соединяющего центры квадратов $GBKL$ и $GCMN$.

Найдите отношение отрезков AG/A_1A_2 .



10.4. Найдите все действительные числа a и функции $f(x)$, заданные при всех действительных x и принимающие действительные значения, удовлетворяющие следующим двум условиям:

1) справедливо неравенство $af(x) - x \leq af(f(y)) - y$ для всех действительных чисел x и y .

2) существует действительное число x_0 , такое, что $f(x_0) = x_0$.

11 класс

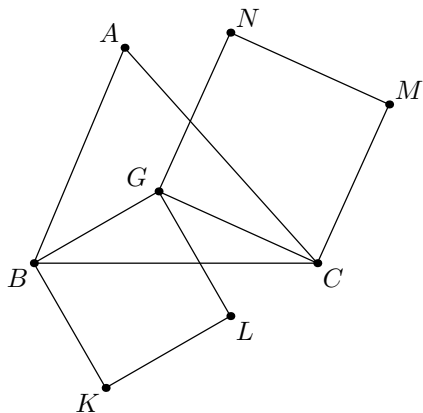
11.1. Прямая пересекает гиперболу H_1 , заданную уравнением $y = 1/x$, в точках A и B , а гиперболу H_2 , заданную уравнением $y = -1/x$, — в точках C и D . Касательные к гиперболе H_1 в точках A и B пересекаются в точке M , а касательные к гиперболе H_2 в точках C и D пересекаются в точке N .

Докажите, что точки M и N симметричны относительно начала координат.

11.2. Натуральное число n разделили с остатком поочередно на 29, на 41 и на 59. В результате получились три ненулевых остатка, сумма которых равна исходному числу n .

Найдите все такие n .

11.3. Пусть A_1 — середина стороны BC , а G — точка пересечения



медиан неравностороннего треугольника ABC . Через $GBKL$ и $GCMN$ обозначены квадраты, лежащие слева относительно лучей GB и GC соответственно (см. рисунок). Пусть A_2 — середина отрезка, соединяющего центры квадратов $GBKL$ и $GCMN$. Описанная окружность треугольника A_1A_2G пересекает BC в точках A_1 и X .

Найдите отношение A_1X/XH , где H — основание высоты AH треугольника ABC .

11.4. Найдите все функции $f(x)$, заданные на отрезке $[0, 1]$ и принимающие значения из отрезка $[0, 1]$, которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{cases} \{f(x)\} \sin^2 x + \{x\} \cos f(x) \cos x = f(x), \\ f(f(x)) = f(x), \end{cases}$$

при всех действительных x .

(Здесь через $\{y\}$ обозначена дробная часть числа y .)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.1. Ответ : 4.

Заметим, что 1 – корень уравнения

$$x^3 - 3x^2 + (a + 2)x - a = 0. \quad (1)$$

Поэтому, преобразовав левую часть этого уравнения

$$x^3 - 3x^2 + (a + 2)x - a = x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + ax - a = (x - 1)(x^2 - 2x + a),$$

получим равносильное уравнение $(x - 1)(x^2 - 2x + a) = 0$. Следовательно, два других корня уравнения (1) являются корнями квадратного уравнения

$$x^2 - 2x + a = 0. \quad (2)$$

Корнями этого уравнения являются числа $1 \pm \sqrt{1 - a}$. Так как одно из этих чисел больше 1, а второе меньше 1, то $x_1 = 1 - \sqrt{1 - a}$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1 + \sqrt{1 - a}$. Следовательно,

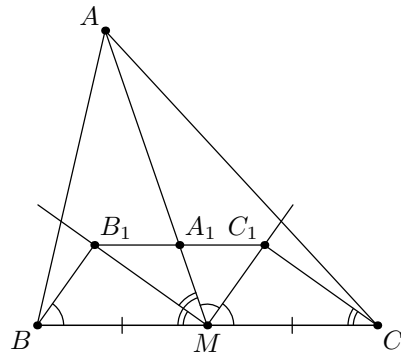
$$4x_1 - x_1^2 + x_3^2 = (x_3 + x_1)(x_3 - x_1) + 4x_1 = 2(x_3 - x_1) + 4x_1 = 2(x_3 + x_1) = 2 \cdot 2 = 4.$$

8.2. Ответ : (4; 23), (5; 25), (6; 35).

Легко видеть, что числа $1! + 505 = 506$, $2! + 505 = 507$, $3! + 505 = 511$ не являются точными квадратами. Далее, $4! + 505 = 529 = 23^2$, $5! + 505 = 625 = 25^2$, $6! + 505 = 1225 = 35^2$. Поэтому имеем три пары (4; 23), (5; 25), (6; 35), удовлетворяющие условию задачи. Покажем, что больше решений данного уравнения нет. Действительно, числа $7! + 505 = 5545$ и $9! + 505 = 363385$ – не точные квадраты, так как делятся на 5, но не делятся на 25. Число $8! + 505 = 40825 = 25 \cdot 1633$ – не полный квадрат, так как 1633 – не точный квадрат. Наконец, если $n \geq 10$, то $n!$ заканчивается по крайней мере двумя нулями. Поэтому число $n! + 505 = m^2$ заканчивается цифрами 05, следовательно, делятся на 5, но не делятся на 25 и, значит, не является точным квадратом.

8.3. Ответ : 1.

Пусть $\angle BMA = 2x$, тогда $\angle AMC = 180^\circ - 2x$. Так как MB_1 делит угол BMA пополам, то $\angle BMB_1 = \angle B_1MA = x$. Аналогично получаем, что $\angle AMC_1 = \angle C_1MC = 90^\circ - x$. Треугольник BMB_1 является прямоугольным, поэтому $\angle B_1BM = 90^\circ - \angle B_1MB = 90^\circ - x$. У прямоугольных треугольников BMB_1 и MCC_1 равны гипотенузы ($BM = MC$) и углы, прилежащие к гипотенузам ($\angle B_1BM = \angle C_1MC = x$). Следовательно, $\triangle BMB_1 \cong \triangle MCC_1$. Из равенства треугольников $\triangle BMB_1 = \triangle MCC_1$, следует равенство отрезков $BB_1 = MC_1$. Так как $\angle B_1BM = \angle C_1MC$,



то $BB_1 \parallel MC_1$. Таким образом, четырехугольник VMC_1B_1 является параллелограммом. Так как $B_1C_1 \parallel BM$, то $\angle VMB_1 = \angle A_1B_1M = \angle B_1MA_1$. Следовательно, треугольник B_1MA_1 является равнобедренным: $MA_1 = A_1B_1$. Аналогично, треугольник MC_1A_1 является равнобедренным: $MA_1 = C_1A_1$. Тогда искомое отношение равно $B_1A_1/A_1C_1 = MA_1/MA_1 = 1$.

8.4. Ответ : при $n = 2^m$, где m — любое натуральное число, большее 1.

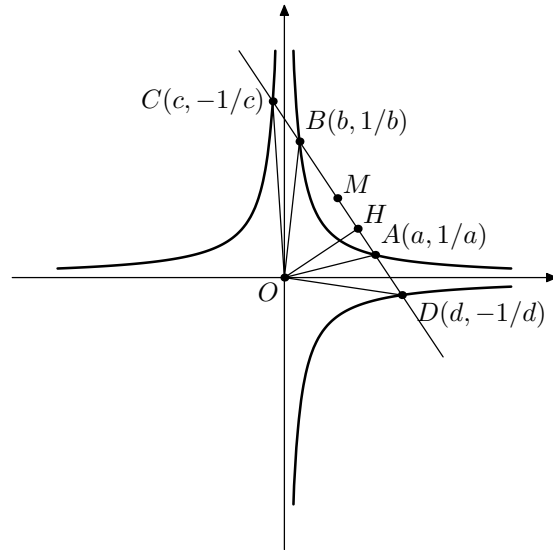
Тане нужно сделать так, чтобы в результате во всех коробках стало по n конфет. Если в какой-то коробке находится a конфет, то величину $a - n$ будем называть отклонением (числа конфет в этой коробке). В этом смысле, цель переключиваний — сделать отклонения числа конфет во всех коробках равными нулю. Заметим, при этом, что сумма всех отклонений равна нулю, или, что то же самое, сумма всех положительных отклонений равна сумме модулей всех отрицательных отклонений. Далее, сделать результативный ход, т. е. изменить количества конфет в коробках, можно всегда, если только имеются коробки с не равными отклонениями одинаковой четности. При этом уменьшается модуль отклонения в той из двух коробок, в которой он был наибольшим, если оба отклонения были положительными, или оба — отрицательными, либо уменьшаются модули отклонений в обеих коробках, если одно из них было положительным а другое отрицательным. Потому процесс переключиваний конечен, и он закончится, если либо 1) все отклонения нулевые, либо 2) имеются только два отклонения разной четности, одно из которых положительное, а другое отрицательное.

Покажем, что если $n = 2^m$ ($m > 1$), то вариант 2) не возможен. Действительно, пусть имеется a ($1 < a < n$) положительных отклонений, равных x , и $n - a$ отрицательных отклонений, равных $-y$. Тогда, как отмечалось, $ax + (n - a)(-y) = 0$, откуда $a(x + y) = ny$, или $a(x + y) = 2^m y$. Из полученного равенства, поскольку $a < n = 2^m$, следует, что сумма $x + y$ четная, т. е. отклонения x и y — одинаковой четности, и, следовательно вариант 2) исключен. Иными словами, при таких n всегда можно уравнивать количества конфет в коробках.

Пусть теперь число $n > 2$ таково, что $n \neq 2^m$. Тогда $n = (2k + 1) \cdot 2^m$ для некоторого натурального k и целого неотрицательного m . Тогда, положим, что конфеты распределены по коробкам следующим образом: имеется $a = 2^m$ коробок с положительным отклонением $x = 2k$, а в остальных $n - a = 2k \cdot 2^m$ отрицательное отклонение $-y = -1$. Такое распределение действительно возможно, поскольку $a(x + y) = ny$ при указанных значениях a , x , y и n , очевидно, выполняется. При этом, так как положительное отклонение $2k$ и отрицательное -1 имеют разные четности, т. е. имеет место случай 2), невозможно сделать ни одного результативного хода и, тем самым, невозможно уравнивать количества конфет во всех коробках.

9 класс

9.1. Не нарушая общности, можно считать, что гиперболы, прямая и точки на них расположены так, как это изображено на рисунке (в противном случае достаточно повернуть всю плоскость на угол, кратный 90° , и переобозначить точки). Пусть $A(a; 1/a)$, $B(b; 1/b)$, $C(c; -1/c)$, $D(d, -1/d)$. Заметим, что все числа a , b , c , d попарно различны, причем $c < 0$, $d > a > b > 0$. Запишем уравнения прямых ℓ_{AB} и ℓ_{CD} , проходящих через пары точек A , B и C , D :



$$\ell_{AB}: \frac{x-a}{b-a} = \frac{y-1/a}{1/b-1/a} \Leftrightarrow$$

$$y = -\frac{1}{ab}x + \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

$$\ell_{CD}: \frac{x-c}{d-c} = \frac{y+1/c}{-1/d+1/c} \Leftrightarrow y = \frac{1}{cd}x - \frac{1}{c} - \frac{1}{d}.$$

Поскольку эти прямые совпадают $\ell = \ell_{AB} = \ell_{CD}$, то

$$ab = -cd, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{c} - \frac{1}{d} \Rightarrow a + b = c + d. \quad (1)$$

Абсцисса середины M отрезка AB равна $x_M = (a+b)/2$, и в силу (1) равна абсциссе $(c+d)/2$ середины отрезка CD . Поскольку точки A , B , C , D лежат на одной прямой, то M — середина и отрезка AB , и отрезка CD . Поэтому $AC = CM + MA = MD + MB = BD$. Поскольку высоты, проведенные из вершины O , к сторонам AC и BD треугольников OAC и OBD совпадают (эти высоты — перпендикуляр OH , опущенный из точки O на прямую ℓ), то площади этих треугольников равны.

9.2. Ответ: Нет, не существует.

Предположим, что функция $f(x)$, удовлетворяющая условию задачи существует.

Подставив $f(x)$ вместо x в первое равенство условия задачи, получим соотношение

$$\{f(f(x))\} \sin^2 f(x) + \{f(x)\} \cos^2 f(x) = f(f(x)).$$

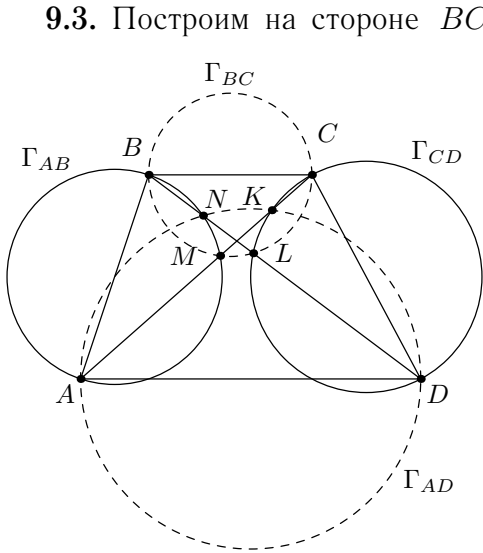
Так как $f(f(x)) = f(x)$, то из последнего равенства следует, что $\{f(x)\} = f(x)$. Таким образом, множество значений функции $f(x)$ принадлежит полуинтервалу $[0, 1[$.

Подставив в первое равенство условия задачи вместо x число π , получим соотношение

$$-\{\pi\} \cos f(\pi) = f(\pi).$$

Так как $f(\pi) \in [0, 1[$ и число π не является целым, то левая часть последнего равенства является отрицательным числом, в то время как правая — неотрицательным. Получено противоречие.

Следовательно, не существует функции, удовлетворяющей условию задачи.



9.3. Построим на стороне BC как на диаметре окружность Γ_{BC} . Она пройдет через точки M и L . Действительно, $\angle AMB = 90^\circ$ как опирающийся на диаметр AB окружности Γ_{AB} . Тогда $\angle BMC = 180^\circ - \angle AMB = 90^\circ$, и, следовательно, точка M принадлежит окружности Γ_{BC} . Аналогично,

$$\angle DLC = 90^\circ \Rightarrow \angle BLC = 180^\circ - \angle DLC = 90^\circ,$$

поэтому точка L также принадлежит окружности Γ_{BC} . Построим на стороне AD как на диаметре окружность Γ_{AD} . Аналогично предыдущему доказываем, что точки N и K принадлежат окружности Γ_{AD} .

Заметим теперь, что

$$\angle NKM = \angle NKA = 0.5 \sphericalangle AN = \angle NDA = \angle BDA$$

и

$$\angle KML = \angle CML = 0.5 \sphericalangle CL = \angle CBL = \angle CBD.$$

Так как $BC \parallel AD$, то $\angle BDA = \angle CBD$, и, значит $\angle NKM = \angle KML$, откуда и следует параллельность прямых NK и ML .

Другое расположение точек рассматривается аналогично.

9.4. Ответ : при $n = 3^m$, где m — любое натуральное число, большее 1.

Свете нужно сделать так, чтобы в результате во всех коробках стало по n конфет. Если в какой-то коробке находится a конфет, то величину $a - n$ будем называть отклонением (числа конфет в этой коробке). В этом смысле, цель переключиваний — сделать отклонения числа конфет во всех коробках равными нулю. Заметим, при этом, что сумма всех отклонений равна нулю. Далее, сделать результативный ход, т. е. изменить количества конфет в коробках, можно только в следующих случаях, если а) имеются коробки с не равными отклонениями, сравнимыми по модулю 3, или б) имеются коробки со всеми тремя не равными по модулю 3 отклонениями. При этом заведомо уменьшается модуль отклонения в той из трех коробок, в которой он был наибольшим (а возможно, модули двух или всех трех отклонений). Потому процесс переключиваний конечен, и он закончится, если либо 1) все отклонения нулевые, либо 2) имеются только два не сравнимые по модулю 3 отклонения, одно из которых положительное, а другое отрицательное.

Покажем, что если $n = 3^m$ ($m > 1$), то вариант 2) не возможен. Действительно, пусть имеется a ($1 < a < n$) положительных отклонений, равных x , и $n - a$ отрицательных отклонений, равных $-y$. Тогда, как отмечалось, $ax + (n - a)(-y) = 0$, откуда $a(x + y) = ny$, или $a(x + y) = 3^m y$. Из полученного равенства, поскольку $a < n = 3^m$, следует, что сумма $x + y$ делится на 3, т. е. отклонения x и $-y$ — сравнимы по модулю 3, и, следовательно вариант 2) исключен. Иными словами, при таких n всегда можно уравнивать количества конфет в коробках.

Пусть теперь число $n > 3$ таково, что $n \neq 3^m$. Тогда $n = (3k + 1) \cdot 3^m$ (или $n = (3k + 2) \cdot 3^m$) для некоторого натурального k (целого неотрицательного k) и целого неотрицательного m . Тогда положим, что конфеты распределены по коробкам следующим образом: имеется $a = 3^m$ коробок с положительным отклонением $x = 3k$, а в

остальных $n - a = 3k \cdot 3^m$ отрицательное отклонение $-y = -1$ (или $-y = -2$). Такое распределение действительно возможно, поскольку $a(x + y) = ny$ при указанных значениях a, x, y и n , очевидно, выполняется. При этом, так как положительное отклонение $3k$ и отрицательное -1 (или -2) не сравнимы по модулю 3, т. е. имеет место случай 2), невозможно сделать ни одного результативного хода и, тем самым, невозможно уравнивать количества конфет во всех коробках.

10 класс

10.1. Не нарушая общности, считаем, что точка $M(a; 1/a)$ лежит на ветви гиперболы $H_1, y = 1/x$, расположенной в первой координатной четверти, а точки $M_1(b_1; -1/b_1)$ и $M_2(b_2; -1/b_2)$ лежат на ветвях гиперболы $H_2, y = -1/x$, расположенных во второй и четвертой координатных четвертях, соответственно (см. рис.). Так как производная функции $y(x) = -1/x$ равна $y'(x) = \frac{1}{x^2}$, то уравнение касательной к гиперболе H_2 в точке с координатами $(b; -1/b)$ имеет вид

$$y = \frac{1}{b^2}(x - b) - \frac{1}{b}.$$

Поскольку точка $M(a; 1/a)$ принадлежит этой касательной, то $\frac{1}{a} = \frac{1}{b^2}(a - b) - \frac{1}{b}$. Следовательно, абсциссы b_1 и b_2 точек M_1 и M_2 удовлетворяют уравнению

$$b^2 + 2ab - a^2 = 0. \quad (1)$$

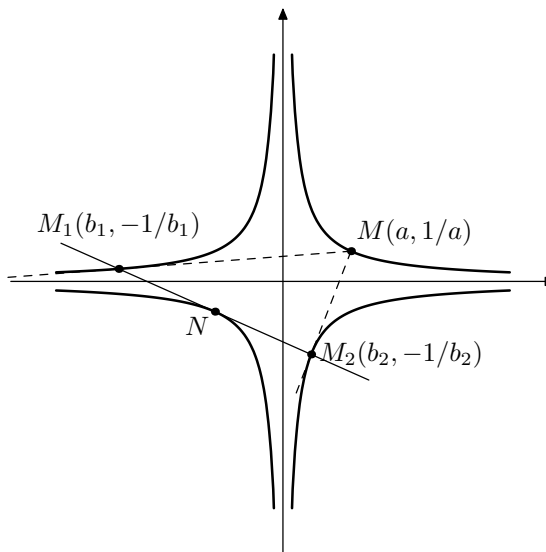
Уравнение прямой, проходящей через точку M_1 может быть записано в виде $y = k(x - b_1) - \frac{1}{b_1}$, и если эта прямая проходит через точку M_2 , то $-\frac{1}{b_2} = k(b_2 - b_1) - \frac{1}{b_1}$, откуда $k = \frac{1}{b_1 b_2}$, поскольку $b_1 \neq b_2$. Таким образом, уравнение прямой $M_1 M_2$ имеет вид

$$y = \frac{1}{b_1 b_2}(x - b_1) - \frac{1}{b_1} \iff y = \frac{1}{b_1 b_2}x - \frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_1} \iff y = \frac{x - (b_1 + b_2)}{b_1 b_2}.$$

Поскольку b_1 и b_2 — корни уравнения (1), то по теореме Виета имеем $b_1 b_2 = -a^2$, $b_1 + b_2 = -2a$. Тогда уравнение прямой $M_1 M_2$ примет вид

$$y = \frac{x + 2a}{-a^2}.$$

Заметим, что при $x = -a$ получим $y = -1/a$, т.е. точка $N(-a; -1/a)$, принадлежащая ветви гиперболы H_1 , лежащей в третьей координатной четверти, принадлежит прямой



M_1M_2 . Осталось заметить, что угловым коэффициентом касательной к гиперболе H_1 в точке $N(-a; -1/a)$ равен $y'(-a) = -\frac{1}{(-a)^2}$, т.е. совпадает с угловым коэффициентом прямой M_1M_2 . Следовательно, прямая M_1M_2 касается гиперболы H_1 (в точке N).

10.2. Ответ: а) нет, не может; б) $n = 112$.

а) Предположим, что сумма двух ненулевых остатков r_1 и r_2 , полученных при делении числа n на a и на b ($a \leq b$) равна исходному числу n . Тогда $n = aq_1 + r_1 = bq_2 + r_2 = r_1 + r_2$, (q_1 и q_2 — целые неотрицательные) причем $r_1 < a$, $r_2 < b$, откуда $bq_2 = r_1 < a \leq b$. Неравенство $bq_2 < b$ может быть выполнено только при $q_2 = 0$. Но тогда $r_1 = bq_2 = b \cdot 0 = 0$ — противоречие.

б) Пусть, согласно условию, $n = 29q_1 + r_1 = 39q_2 + r_2 = 59q_3 + r_3 = r_1 + r_2 + r_3$, причем $r_1 < 29$, $r_2 < 39$, $r_3 < 59$. Из данных равенств, в частности, следует, что $59q_3 = r_1 + r_2 \leq 28 + 38 = 66$, откуда $q_3 = 1$. Тогда

$$r_1 + r_2 = 59. \quad (1)$$

Далее, $39q_2 = r_1 + r_3 \leq 28 + 58 = 86$, откуда $q_2 \leq 2$. Рассмотрим два случая:

а) $q_2 = 1$. Тогда

$$r_1 + r_3 = 39. \quad (2)$$

Тогда из (1) и (2) получаем $98 = 59 + 39 = r_1 + r_2 + r_1 + r_3 = n + r_1 = 29q_1 + 2r_1$, т.е. $29q_1 + 2r_1 = 98$, откуда q_1 четно и $29q_1 < 98$, следовательно $q_1 = 2$. Тогда $r_1 = \frac{1}{2}(98 - 2 \cdot 29) = 20$. Но тогда согласно (1) $r_2 = 59 - 20 = 39$, что невозможно, так как $r_2 < 39$.

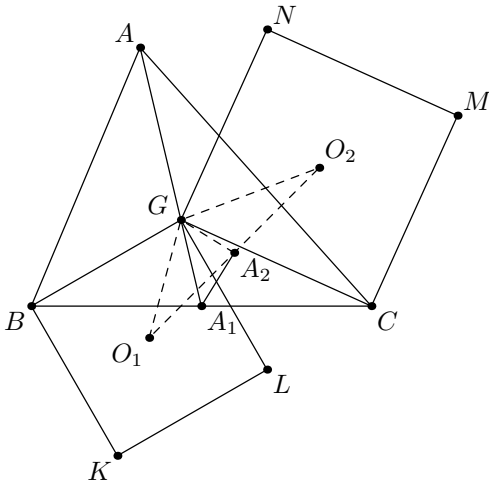
б) $q_2 = 2$. Тогда

$$r_1 + r_3 = n - r_2 = 39q_2 = 78. \quad (3)$$

Тогда из (1) и (3) аналогично получаем $29q_1 + 2r_1 = 137$, откуда q_1 нечетное и $29q_1 < 137$, следовательно $q_1 = 1$ или 3. Если $q_1 = 1$, то $2r_1 = 108$, т.е. $r_1 = 54$ — противоречие. Если $q_1 = 3$, то $r_1 = 25$, $r_2 = 34$, $r_3 = 53$, $n = 27 + 32 + 55 = 112$ — это значение удовлетворяет условию задачи.

10.3. Ответ: $2\sqrt{2}$.

Пусть $R_G^{45^\circ}$ — поворот на 45° вокруг точки G , а H_G^λ — гомотетия с центром G и коэффициентом $\lambda = 1/\sqrt{2}$. Рассмотрим треугольники BCG и O_1O_2G . Так как $\angle O_1GB = \angle O_2GC = 45^\circ$, $BG = \sqrt{2}GO_1$ и $CG = \sqrt{2}GO_2$, то $H_G^\lambda \circ R_G^{45^\circ}(\triangle BCG) = \triangle O_1O_2G$, а значит медиана GA_1 треугольника BCG под действием преобразования $H_G^\lambda \circ R_G^{45^\circ}$ переходит в медиану GA_2 треугольника O_1O_2G . Другими словами, $\angle A_2GA_1 = 45^\circ$ и $GA_1 = \sqrt{2}GA_2$. Таким образом, $\triangle A_1A_2G$ — равнобедренный прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине A_2 . Поэтому $\sqrt{2}A_1A_2 = GA_1 = AG/2$, т.е. $AG/A_1A_2 = 2\sqrt{2}$.



10.4. Ответ: $a = 1$, $f(x) = x$.

1) Пусть сперва $a < 0$. В данном неравенстве

$$af(x) - x \leq af(f(y)) - y \quad (1)$$

положим $y = x$, получим $af(x) \leq af(f(x))$, и тогда

$$f(x) \geq f(f(x)), \text{ при всех действительных } x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Далее, положим в (1) $x = f(y)$, получим $y \leq f(y)$ при всех $y \in \mathbb{R}$. В частности, при $y = f(x)$ будет справедливо неравенство $f(x) \leq f(f(x))$, и тогда в силу (2) справедливо равенство

$$f(f(x)) = f(x), \text{ при всех действительных } x \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, неравенство (1) принимает вид $af(x) - x \leq af(y) - y$, при всех действительных $x, y \in \mathbb{R}$. Отсюда $af(x) - x$ — константа, т.е. $af(x) = x + c$. Заменяя здесь x на $f(x)$, получим $af(f(x)) = f(x) + c$, или $f(x) + c = af(f(x)) = x + c$, следовательно, $f(x) = x$, а тогда $ax = x + c$ при всех действительных $x \in \mathbb{R}$. Получено противоречие.

2) Если $a = 0$, то неравенство (1) превращается в неравенство $-x \leq -y$, при всех действительных $x, y \in \mathbb{R}$, что не является верным.

3) Наконец, пусть $a > 0$. Далее обозначим $\alpha = f(0)$. Положим в (1) $x = 0$, получим

$$y + a\alpha \leq af(f(y)). \quad (3)$$

Далее, положим $y = 0$ в (1), получим

$$af(x) \leq x + af(\alpha). \quad (4)$$

Полагая в неравенстве (4) $x = f(y)$, имеем $af(f(y)) \leq f(y) + af(\alpha)$, и тогда с учетом неравенства (3), имеем неравенство $y + a\alpha \leq f(y) + af(\alpha)$, т.е.

$$f(y) \geq y + d, \quad (5)$$

где $d = a\alpha - af(\alpha)$. Тогда из неравенств (4) и (5) и того, что $a > 0$, следует $x + af(\alpha) \geq af(x) \geq ax + ad$ или $(1 - a)x \geq a(d - f(\alpha))$, при всех действительных $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, $1 - a = 0$, а значит $a = 1$.

Стало быть, неравенство (1) имеет вид

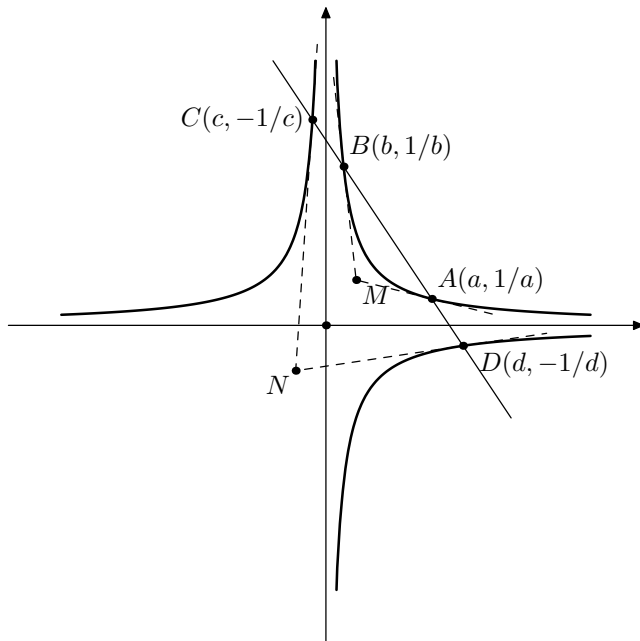
$$f(x) - x \leq f(f(y)) - y \quad (1')$$

Положим здесь $x = f(y)$, получим $y \leq f(y)$. С другой стороны, при $y = x_0$ неравенство (1') влечет $f(x) \leq x$. Отсюда $f(x) = x$.

Проверка того, что число $a = 1$ и функция $f(x) = x$ удовлетворяют условию задачи, является тривиальной.

11 класс

11.1. Не нарушая общности, можно считать, что гиперболы, прямая и точки на них



расположены так, как это изображено на рисунке (в противном случае достаточно повернуть всю плоскость на угол, кратный 90° , и переобозначить точки). Пусть $A(a; 1/a)$, $B(b; 1/b)$, $C(c; -1/c)$, $D(d; -1/d)$. Заметим, что все числа a, b, c, d попарно различны, причем $c < 0$, $d > a > b > 0$.

Так как производная функции $y(x) = 1/x$ равна $y'(x) = -1/x^2$, то уравнения касательных к гиперболе H_1 в точках A и B имеют соответственно вид

$$y = -\frac{1}{a^2}(x - a) + \frac{1}{a}$$

и

$$y = -\frac{1}{b^2}(x - b) + \frac{1}{b}.$$

Следовательно, абсцисса x_M их точки пересечения M удовлетворяет уравнению $-\frac{1}{a^2}(x - a) + \frac{1}{a} = -\frac{1}{b^2}(x - b) + \frac{1}{b}$, откуда $x_M = \frac{2ab}{a + b}$. Тогда ордината y_M точки M равна

$$y_M = -\frac{1}{a^2}(x_M - a) + \frac{1}{a} = \frac{2}{a + b}.$$

Аналогично, так как производная функции $y(x) = -1/x$ равна $y'(x) = 1/x^2$, то уравнения касательных к гиперболе H_2 в точках C и D имеют соответственно вид

$$y = \frac{1}{c^2}(x - c) - \frac{1}{c} \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{d^2}(x - d) - \frac{1}{d}.$$

Следовательно, абсцисса x_N их точки пересечения N удовлетворяет уравнению $\frac{1}{c^2}(x - c) - \frac{1}{c} = \frac{1}{d^2}(x - d) - \frac{1}{d}$, откуда $x_N = \frac{cd}{c + d}$. Тогда ордината y_N точки N равна

$$y_N = \frac{1}{c^2}(x_N - c) - \frac{1}{c} = -\frac{2}{c + d}.$$

При решении задачи 9.1 было показано, что из условия принадлежности точек A , B , C , D одной прямой следуют равенства $a + b = c + d$ и $ab = -cd$. Поэтому $x_M = -x_N$ и $y_M = -y_N$, что и означает симметричность точек M и N относительно начала координат.

11.2. Ответ: $n = 79$ и $n = 114$.

Пусть, согласно условию, $n = 29q_1 + r_1 = 41q_2 + r_2 = 59q_3 + r_3 = r_1 + r_2 + r_3$, причем $r_1 < 29$, $r_2 < 41$, $r_3 < 59$. Из данных равенств, в частности, следует, что $59q_3 = r_1 + r_2 \leq 28 + 40 = 68$, откуда $q_3 = 1$. Тогда

$$r_1 + r_2 = 59. \quad (1)$$

При $x \in [0, 1[$ значение $\cos x$ больше нуля, и $\{x\} = x$. Таким образом, $x \cos f(x) = f(x) \cos x$ при $x \in [0, 1[$. Разделив последнее равенство на $\cos x \cos f(x)$, получим соотношение

$$\frac{x}{\cos x} = \frac{f(x)}{\cos f(x)}.$$

Рассмотрим функцию $g(x) = x/\cos(x)$, заданную на полуинтервале $[0, 1[$. Докажем, что $g(x)$ строго возрастает. Действительно, $g'(x) = (\cos x + x \sin x)/\cos^2 x > 0$ при $x \in [0, 1[$. Так как при $x \in [0, 1[$ справедливо равенство $g(x) = g(f(x))$, то $f(x) = x$.

Положив $x = 1$ в первом равенстве условия задачи, получим соотношение $f(1)(1 - \sin^2 1) = 0$. Так как $\sin^2 1 \neq 1$, то $f(1) = 0$. Таким образом, $f(x) = \{x\}$ при всех $x \in [0, 1]$. Проверка того, что $f(x) = \{x\}$ действительно удовлетворяет условию задачи, является тривиальной.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.5. Докажите, что если для некоторых целых чисел a , b и c выполняется равенство

$$\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{a^2 + c^2} = \frac{2c}{b + c},$$

то произведение bc является квадратом некоторого целого числа.

8.6. В таблицу 7×7 вписаны числа (не обязательно целые) так, что произведение чисел в любом квадрате 3×3 равно произведению чисел в любом квадрате 4×4 .

Может ли произведение всех чисел в данной таблице равняться 2015?

8.7. На плоскости даны точка A и прямая ℓ , не проходящая через точку A . Для любой точки M , лежащей на прямой ℓ , на плоскости отмечается точка N так, что треугольник AMN , вершины которого перечислены по ходу часовой стрелки, является равносторонним.

Найдите геометрическое место вершин N равносторонних треугольников AMN , когда вершина M пробегает прямую ℓ .

8.8. Можно ли разбить все натуральные числа

а) от 1 до 20; **б)** от 1 до 30

на несколько групп так, чтобы в каждой группе одно из чисел равнялось сумме остальных чисел этой группы?

9 класс

9.5. Положительные действительные числа a , b , c , d таковы, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1.$$

Докажите, что

$$\frac{a+b}{a^2-ab+b^2} + \frac{b+c}{b^2-bc+c^2} + \frac{c+d}{c^2-cd+d^2} + \frac{d+a}{d^2-da+a^2} \leq 2.$$

9.6. Дан треугольник ABC . Окружность ω проходит через вершины B и C , пересекая стороны AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Пусть X — середина дуги $\smile B_1BC$, а Y — середина дуги $\smile BCC_1$ окружности ω .

Найдите угол между XU и биссектрисой угла CAB .

9.7. Назовем последовательность *хорошей*, если она состоит из конечного числа последовательных натуральных чисел.

Найдите количество хороших последовательностей, у каждой из которых сумма всех членов равна числу 1564. (Хорошая последовательность может состоять и из одного числа.)

9.8. При каких натуральных n ($n < 24$) все целые числа от n до 24 (включительно) можно разбить на несколько групп так, чтобы в каждой группе одно из чисел равнялось сумме остальных чисел этой группы?

10 класс

10.5. Докажите, что

$$|(a - b)(b - c)(c - d)(d - a)| \leq \frac{abcd}{4},$$

если действительные числа a, b, c, d принадлежат отрезку $[1; 2]$.

10.6. Назовем последовательность *хорошей*, если она состоит из конечного числа последовательных натуральных чисел.

Найдите количество хороших последовательностей, у каждой из которых сумма всех членов равна числу 4030^k , где k — некоторое натуральное число. (Хорошая последовательность может состоять и из одного числа.)

10.7. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC , точки A_1, B_1, C_1 — основания высот AA_1, BB_1, CC_1 , соответственно. Точки D, K, L, M, N — середины отрезков $AC, BC_1, BA_1, HA_1, HC_1$, соответственно, а P, Q, R — точки пересечения прямых AL и CK, AN и CK, AL и CM , соответственно.

Докажите, что прямая DQ касается окружности, описанной около треугольника PQR .

10.8. При каких натуральных n ($n < 60$) все целые числа от n до 60 (включительно) можно разбить на несколько групп так, чтобы в каждой группе одно из чисел равнялось сумме остальных чисел этой группы?

11 класс

11.5. Найдите все действительные $x \geq -1$, для которых при всех $a_1, \dots, a_n \geq 1$, где $n \geq 2$, справедливо неравенство

$$\frac{a_1 + x}{2} \cdot \frac{a_2 + x}{2} \cdot \dots \cdot \frac{a_n + x}{2} \leq \frac{a_1 a_2 \dots a_n + x}{2}.$$

11.6. Пусть M – множество натуральных чисел от 1 до 2015, не являющихся квадратами натуральных чисел.

а) Докажите, что для любого числа $n \in M$ дробная часть $\{\sqrt{n}\}$ его корня квадратного больше 0,011.

б) Докажите, что найдётся число $n \in M$, для которого $\{\sqrt{n}\} < 0,0115$.

11.7. Пусть I центр вписанной окружности треугольника ABC . Точки A_1, B_1, C_1 – точки касания вписанной окружности треугольника ABC его сторон BC, CA, AB , соответственно. Описанная около треугольника BC_1B окружность пересекает прямую BC в точках B и K , а окружность, описанная около треугольника CB_1C_1 , пересекает прямую BC в точках C и L .

Докажите, что прямые LC_1, KB_1, IA_1 пересекаются в одной точке.

11.8 Пусть n – натуральное число. При каком наименьшем натуральном m ($m > n$) все целые числа от n до m (включительно) можно разбить на несколько групп так, чтобы в каждой группе одно из чисел равнялось сумме остальных чисел этой группы?

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.5. Если $b = 0$ или $c = 0$, то ясно, что bc — точный квадрат. Если же $a = 0$, то из равенства

$$\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{a^2 + c^2} = \frac{2c}{b + c} \quad (1)$$

легко следует, что $b = c$ и, значит, снова bc — точный квадрат. Поэтому можно считать, что a, b, c — ненулевые числа. Тогда равенство (1) можно переписать в виде

$$\frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}} + \frac{1}{1 + \frac{c^2}{a^2}} = \frac{2}{1 + \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c}}.$$

Сделав замену $x = \frac{b}{a}$ и $y = \frac{a}{c}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + y^2} = \frac{2}{1 + xy} &\Leftrightarrow \frac{2 + x^2 + y^2}{(1 + x^2)(1 + y^2)} = \frac{2}{1 + xy} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2 + x^2 + y^2)(1 + xy) = 2(1 + x^2)(1 + y^2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 + x^2 + y^2 + 2xy + x^3y + xy^3 = 2 + 2x^2 + 2y^2 + 2x^2y^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^3y - 2x^2y^2 + xy^3 - x^2 + 2xy - 2y^2 &\Leftrightarrow xy(x - y)^2 - (x - y)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - y)^2(xy - 1) = 0. \end{aligned}$$

Тогда либо $x - y = 0$, т. е. $x = y$, или $\frac{b}{a} = \frac{a}{c}$, откуда $bc = a^2$ — точный квадрат; либо $xy = 1$, т. е. $\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = 1 \Leftrightarrow \frac{b}{c} = 1$, или $b = c$ и, значит, снова bc — точный квадрат.

8.6. Ответ: да, может.

Пусть числа a и b такие, что $ab = 1$. Тогда в следующей таблице произведение чисел во всех квадратах 3×3 и 4×4 равно 1.

a	b	a	b	a	b	a
b	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1
a	b	a	b	a	b	a
b	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1
a	b	a	b	a	b	a

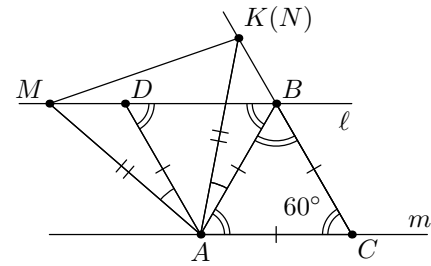
Таким образом, таблица удовлетворяет условию задачи, причем произведение всех чисел в таблице, легко видеть равно a , т. е. может принимать любое ненулевое значение, в том числе 2015.

8.7. Ответ: прямая BC , где $B \in \ell$, C лежит на прямой m , проходящей через точку A параллельно прямой ℓ , правее точки A (A лежит ниже прямой ℓ), треугольник ABC равносторонний.

Не нарушая общности, считаем, что точка A лежит ниже прямой ℓ . Покажем, что искомое ГМТ — прямая BC , где $B \in \ell$, C лежит на прямой m ,

проходящей через точку A параллельно прямой ℓ , правее точки A , треугольник ABC равносторонний.

Покажем вначале, что точки N лежат на прямой BC . Если точка M совпадает с точкой B , то очевидно, точка N совпадает с точкой C . Пусть M — произвольная точка прямой ℓ , отличная от точки B . Из точки A в правой относительно прямой AM полуплоскости построим луч, образующий с прямой AM угол в 60° . Точку пересечения этого луча с прямой BC обозначим K (см. рис.). Пусть D — такая точка на прямой ℓ , лежащая левее точки B , что треугольник ABD равносторонний. Заметим, что



$$\angle MAD = \angle MAK - \angle DAK = 60^\circ - \angle DAK = \angle DAB - \angle DAK = \angle KAB \quad (1)$$

Кроме того,

$$\angle MDA = 180^\circ - \angle BDA = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ = 180^\circ - \angle ABC = \angle KBA. \quad (2)$$

Поскольку по построению $AD = AB$, то в силу (1) и (2) треугольники MAD и KAB равны (по двум углам и стороне между ними). Поэтому $AM = AK$, и так по построению $\angle MAK = 60^\circ$, то треугольник MAK равносторонний, т.е. точка K совпадает с точкой N , что и означает принадлежность точки N прямой BC .

Теперь нам осталось показать, что для любой точки N на прямой BC существует такая точка M на прямой ℓ , что треугольник NAM будет равносторонним. Для этого достаточно провести те же рассуждения, что и выше, начав с выбора произвольной точки N на прямой BC . Действительно, пусть N — точка на BC . Из точки A в левой относительно прямой AN полуплоскости построим луч, образующий с прямой AN угол в 60° . Точку пересечения этого луча с прямой ℓ обозначим M (см. рис.). Пусть D — такая точка на прямой ℓ , лежащая левее точки B , что треугольник ABD равносторонний. Заметим, что

$$\angle MAD = \angle MAN - \angle DAN = 60^\circ - \angle DAN = \angle DAB - \angle DAN = \angle NAB \quad (3)$$

Кроме того,

$$\angle MDA = 180^\circ - \angle BDA = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ = 180^\circ - \angle ABC = \angle NBA. \quad (4)$$

Поскольку по построению $AD = AB$, то в силу (3) и (4) треугольники MAD и NAB равны (по двум углам и стороне между ними). Поэтому $AM = AN$, и так по построению $\angle MAN = 60^\circ$, то треугольник MAN равносторонний, что и требовалось доказать.

8.8. Ответ : а) да, можно; б) нет, нельзя.

а) Приведем соображения, которые позволяют строить пример не наугад. Так как в каждой группе все числа должны быть различными, то одно из чисел (будем называть его главным) может равняться сумме остальных чисел в этой группе только, если кроме главного числа в группе есть еще не менее двух чисел. Следовательно, в каждой группе должно быть не менее трех чисел. Поэтому, если данные 20 чисел можно разбить так, как требуется, то число групп должно быть не более $[20 : 3] = 6$. Далее, если a — главное число в группе, то сумма чисел в этой группе равна $2a$. Поэтому сумма чисел в

шести группах, не превосходит $2(20 + 19 + 18 + 17 + 16 + 15) = 210$. С другой стороны, сумма данных чисел $1 + 2 + 3 + \dots + 20 = 210$. Поэтому групп должно быть ровно шесть и главными числами в них должны быть как-раз наибольшие возможные: 20, 19, 18, 17, 16 и 15. Теперь, зная главные числа в группах, нетрудно добавить к ним остальные, чтобы получить нужное разбиение. Один из возможных способов – следующий:

20	19	18	17	16	15
14	12	10	13	11	9
6	7	8	4	5	1, 2, 3

б) Как было отмечено выше, если a – главное число в группе, то сумма чисел в этой группе равна $2a$, т.е. является четной. Поэтому, если какой-то набор чисел можно разбить на группы так, как требуется, то сумма всех чисел в этом наборе должна быть четной. Однако сумма чисел $1 + 2 + 3 + \dots + 30 = \frac{(1 + 30) \cdot 30}{2} = 31 \cdot 15$ – нечетная. Поэтому числа от 1 до 30 разбить нужным образом на группы нельзя.

9 класс

9.5. Обозначим $x = 1/a$, $y = 1/b$, $z = 1/c$, $u = 1/d$. Тогда $x + y + z + u = 1$, $xyzu \neq 0$, а требуемое неравенство примет вид

$$\frac{xy(x+y)}{x^2-xy+y^2} + \frac{yz(y+z)}{y^2-yz+z^2} + \frac{zu(z+u)}{z^2-zu+u^2} + \frac{ux(u+x)}{u^2-ux+x^2} \leq 2, \quad (1)$$

поскольку (для остальных слагаемых аналогично)

$$\frac{a+b}{a^2-ab+b^2} = \frac{ab(b^{-1}+a^{-1})}{a^2b^2(b^{-2}-a^{-1}b^{-1}+a^{-2})} = \frac{xy(y+x)}{y^2-xy+x^2}.$$

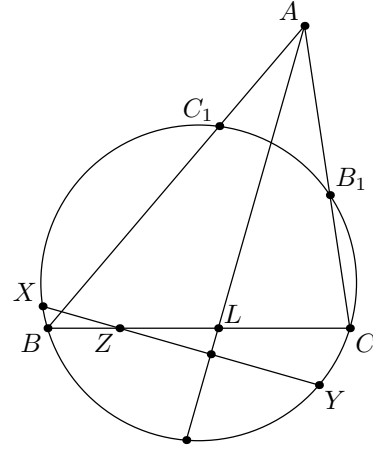
Так как для ненулевых x и y имеем $x^2 - xy + y^2 = x^2 - xy + y^2/4 + 3y^2/4 = (x - y/2)^2 + 3y^2/4 > 0$ и $0 \leq (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = (x^2 - xy + y^2) - xy$, то $x^2 - xy + y^2 \geq xy$ и $\frac{xy}{x^2 - xy + y^2} \leq 1$. Аналогично, $\frac{yz}{y^2 - yz + z^2} \leq 1$, $\frac{zu}{z^2 - zu + u^2} \leq 1$, $\frac{ux}{u^2 - ux + x^2} \leq 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{xy(x+y)}{x^2-xy+y^2} + \frac{yz(y+z)}{y^2-yz+z^2} + \frac{zu(z+u)}{z^2-zu+u^2} + \frac{ux(u+x)}{u^2-ux+x^2} &\leq (x+y) + (y+z) + (z+u) + (u+x) = \\ &= 2(x+y+z+u), \end{aligned}$$

откуда в силу равенства $x + y + z + u = 1$ и следует искомое неравенство (1). Заметим, что равенство достигается при $x = y = z = u = 1/4$, т.е. при $a = b = c = d = 4$.

9.6. Ответ : 90° .

Пусть $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$, тогда $\angle CAB = 180^\circ - \beta - \gamma$. Через ξ обозначим градусную меру дуги $\smile C_1B$, которая не содержит вершину C , через η – градусную меру дуги $\smile B_1C_1$, которая не содержит вершин B и C , наконец, через ζ обозначим градусную меру дуги $\smile CB_1$, которая не содержит вершину B . Тогда $\gamma = (\xi + \eta)/2$ и $\beta = (\eta + \zeta)/2$. Пусть прямые XY и BC пересекаются в точке Z . Рассмотрим случай расположения точки X , Y и Z как на рисунке. Угол BZX является внешним для треугольника ZXC , поэтому $\angle BZX = \angle ZCX + \angle CXZ$. В силу сделанных обозначений, имеем



$$\angle ZCX = \frac{1}{2} \left(\xi + \eta - \frac{1}{2}(360^\circ - \zeta) \right) \text{ и}$$

$$\angle CXZ = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(360^\circ - \xi) - (\eta + \zeta) \right).$$

Таким образом,

$$\angle BZX = \angle ZCX + \angle CXZ = (\xi - \zeta)/4 = ((\xi + \eta) - (\zeta + \eta))/4 = (\gamma - \beta)/2.$$

Пусть биссектриса угла CAB пересекает сторону BC в точке L . Угол ALC является внешним для треугольника LBA , а значит $\angle ALC = \angle ABC + \angle LAB = \beta + (90^\circ - (\gamma + \beta)/2) = 90^\circ - (\gamma - \beta)/2$. Так как $\angle BZX + \angle ALC = 90^\circ$, то $AL \perp XY$.

9.7. Ответ : 4.

Пусть

$$k + 1, k + 2, \dots, k + n \quad (*)$$

– хорошая последовательность с суммой N . Так как

$$(k + 1) + (k + 2) + \dots + (k + n) = \frac{n(n + 2k + 1)}{2},$$

то верно равенство

$$n(n + 2k + 1) = 2N. \quad (**)$$

Очевидно, верно и обратное. Поэтому последовательность $(*)$ с суммой N существует тогда и только тогда, когда уравнение $(**)$ имеет решение для некоторых натурального n и целого неотрицательного k .

Числа n и $n + 2k + 1$ имеют разную чётность. Поэтому уравнение $(**)$ равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} n = q_1, \\ n + 2k + 1 = q_2, \end{cases} \quad \begin{matrix} (*) \\ (**) \end{matrix}$$

в которой пара (q_1, q_2) натуральных чисел пробегает множество, удовлетворяющее условиям: $q_1 < q_2$, $q_1 q_2 = 2N$ и $q_1 \not\equiv q_2 \pmod{2}$. Количество P таких пар равно количеству $D(N)$ нечётных делителей числа N . Действительно, всякий нечётный делитель q числа N однозначно определяет такую пару – она составлена из чисел q и $2N/q$, причём

различным нечётным делителям соответствуют разные пары, т. е. $P \geq D(N)$. С другой стороны, в каждой такой паре (q_1, q_2) то из её чисел q_1 и q_2 , которое нечётно, является нечётным делителем числа N , причём разным парам соответствуют различные нечётные делители, т. е. $D(N) \geq P$. Таким образом, $P = D(N)$, что и утверждалось.

Остаётся заметить, что при любой паре (q_1, q_2) , удовлетворяющей указанным условиям, система $(**)$ имеет единственное решение (n, k) , где n натуральное, а k целое неотрицательное, и разным таким парам (q_1, q_2) соответствуют различные решения. Поскольку $D(1564) = D(4 \cdot 17 \cdot 23) = 4$, то количество искомых последовательностей равно 4.

9.8. Ответ : при $n = 1$ и 4.

Так как в каждой группе все числа должны быть различными, то одно из чисел (будем называть его главным в группе) может равняться сумме остальных чисел в этой группе только, если кроме главного числа в группе есть еще не менее двух чисел. Следовательно, в каждой группе должно быть не менее трех чисел. А так количество чисел от n до 24 равно $25 - n$, то число групп $k \leq \frac{25 - n}{3}$. Сумма всех чисел от n до 24 равна $S = \frac{(n + 24)(25 - n)}{2}$. Оценим сумму чисел в k группах. Если a — главное число в группе, то согласно условию сумма чисел в данной группе равна $2a$. Поэтому, во первых сумма S должна быть четной, во вторых сумма чисел в k группах не превосходит

$$\begin{aligned} 2 \cdot (24 + 23 + 22 + \dots + (25 - k)) &= 2 \cdot \frac{(24 + 25 - k) \cdot k}{2} = (49 - k) \cdot k \leq \\ &\leq \left(49 - \frac{25 - n}{3}\right) \cdot \frac{25 - n}{3} = \frac{(122 + n)(25 - n)}{9}. \end{aligned}$$

Следовательно, разбиение возможно только при условии:

$$\begin{aligned} S \leq \frac{(122 + n)(25 - n)}{9} &\Leftrightarrow \frac{(n + 24)(25 - n)}{2} \leq \frac{(122 + n)(25 - n)}{9} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9(n + 24) \leq 2(122 + n) \Leftrightarrow n \leq 4. \end{aligned}$$

При $n = 2$ и $n = 3$ сумма чисел S равна соответственно $\frac{(2 + 24)(25 - 2)}{2} = 13 \cdot 23$ и $\frac{(3 + 24)(25 - 3)}{2} = 27 \cdot 11$, т.е. является нечетной. В этом случае, разбить числа от n до 24 так, как требуется в условии, нельзя. Пример разбиения при $n = 1$ приведен в следующей таблице:

24	23	22	21	20	19	18	3
17	15	13	11	16	14	12	2
7	8	9	10	4	5	6	1

Если в этом примере убрать последнюю группу чисел, то получим пример разбиения для $n = 4$. Таким образом, единственные значения n , при которых разбиение возможно, это $n = 1$ и 4.

10 класс

10.5. Очевидно, что

$$|(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)| \leq \frac{abcd}{4} \iff \frac{(a-b)^2}{ab} \cdot \frac{(b-c)^2}{bc} \cdot \frac{(c-d)^2}{cd} \cdot \frac{(d-a)^2}{da} \leq \frac{1}{16}. \quad (*)$$

Заметим, что

$$\frac{(a-b)^2}{ab} \leq \frac{1}{2}.$$

В самом деле, имеем

$$\frac{(a-b)^2}{ab} \leq \frac{1}{2} \iff 2(a-b)^2 \leq ab \iff 2\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 5\left(\frac{a}{b}\right) + 2 \leq 0 \iff 2\left(\frac{a}{b} - 2\right)\left(\frac{a}{b} - \frac{1}{2}\right) \leq 0.$$

Так как $a, b \in [1, 2]$, то последнее неравенство, очевидно, выполнено.

Имеем

$$0 \leq \frac{(a-b)^2}{ab} \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \frac{(b-c)^2}{bc} \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \frac{(c-d)^2}{cd} \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \frac{(d-a)^2}{da} \leq \frac{1}{2}.$$

Следовательно, неравенство (*) выполнено.

Отметим, что равенство достигается тогда и только тогда, когда $\{(a, b, c, d) = (2, 1, 2, 1), (1, 2, 1, 2)\}$.

10.6. Ответ: $(k+1)^3$.

Пусть

$$k+1, k+2, \dots, k+n \quad (*)$$

— хорошая последовательность натуральных чисел с суммой N . Так как

$$(k+1) + (k+2) + \dots + (k+n) = \frac{n(n+2k+1)}{2},$$

то верно равенство

$$n(n+2k+1) = 2N. \quad (**)$$

Очевидно, верно и обратное. Поэтому последовательность (*) с суммой N существует тогда и только тогда, когда уравнение (**) имеет решение для некоторых натурального n и целого неотрицательного k .

Числа n и $n+2k+1$ имеют разную чётность. Поэтому уравнение (**) равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} n = q_1, \\ n + 2k + 1 = q_2, \end{cases} \quad \begin{matrix} (*) \\ (**) \end{matrix}$$

в которой пара (q_1, q_2) натуральных чисел пробегает множество, удовлетворяющее условиям: $q_1 < q_2$, $q_1 q_2 = 2N$ и $q_1 \not\equiv q_2 \pmod{2}$. Количество P таких равно количеству $D(N)$ нечётных делителей числа N . Действительно, всякий нечётный делитель q числа N однозначно определяет такую пару — она составлена из чисел q и $2N/q$, причём различным нечётным делителям соответствуют разные пары, т. е. $P \geq D(N)$. С другой стороны, в каждой такой паре (q_1, q_2) то из её чисел q_1 и q_2 , которое нечётно, является

нечётным делителем числа N , причём разным парам соответствуют различные нечётные делители, т. е. $D(N) \geq P$. Таким образом, $P = D(N)$, что и утверждалось.

Остаётся заметить, что при любой паре (q_1, q_2) , удовлетворяющей указанным условиям, система $(**)$ имеет единственное решение (n, k) , где n натуральное, а k целое неотрицательное, и разным таким парам (q_1, q_2) соответствуют различные решения. Поскольку $D(4030^k) = D(2^k \cdot 5^k \cdot 13^k \cdot 31^k) = (k+1)^3$, то количество искомых последовательностей равно $(k+1)^3$.

10.7. Заметим, что все прямоугольные треугольники ABA_1 , AHC_1 , CBC_1 , CHA_1 попарно подобны. Следовательно, так как L , N , K , M — середины соответствующих сторон, то

$$\Delta ALB \sim \Delta ANH \sim \Delta CKB \sim \Delta CMH.$$

Поэтому

$$\angle LAB = \angle NAH = \angle KCB = \angle MCH = \varphi.$$

Пусть $\angle CAB = \alpha$. Тогда

$$\begin{aligned} \angle RCA + \angle RAC &= \\ &= (\angle RCC_1 + \angle C_1CA) + (\angle CAB - \angle BAL) = \\ &= (\varphi + 90^\circ - \alpha) + (\alpha - \varphi) = 90^\circ, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\angle ARC = 90^\circ$. Аналогично имеем $\angle AQC = 90^\circ$. Следовательно, точки A , R , Q , C лежат на одной окружности с диаметром AC . Поэтому $DC = DQ$ и $\angle PQR = \angle CAP$. Следовательно, треугольник DQC равнобедренный. Таким образом,

$$\angle RQD = 180^\circ - \angle PQR - \angle DQC = 180^\circ - \angle CAP - \angle ACP = \angle APC = \angle RPQ.$$

Последнее равенство и означает, что DQ касается описанной окружности треугольника PQR (с точки Q).

10.8. Ответ: при $n = 1, 4$ и 5 .

Так как в каждой группе все числа должны быть различными, то одно из чисел (будем называть его главным в группе) может равняться сумме остальных чисел в этой группе только, если кроме главного числа в группе есть еще не менее двух чисел. Следовательно, в каждой группе должно быть не менее трех чисел. А так количество чисел от n до 60 равно $61 - n$, то число групп $k \leq \frac{61-n}{3}$. Сумма всех чисел от n до 60 равна $S = \frac{(n+60)(61-n)}{2}$. Оценим сумму чисел в k группах. Если a — главное число в группе, то согласно условию сумма чисел в данной группе равна $2a$. Поэтому, во первых, сумма S должна быть четной, во вторых, сумма чисел в k группах не превосходит

$$\begin{aligned} 2 \cdot (60 + 59 + 58 + \dots + (61 - k)) &= 2 \cdot \frac{(60 + 61 - k) \cdot k}{2} = (121 - k) \cdot k \leq \\ &\leq \left(121 - \frac{61 - n}{3}\right) \cdot \frac{61 - n}{3} = \frac{(302 + n)(61 - n)}{9}. \end{aligned}$$

Следовательно, разбиение возможно только при условии:

$$S \leq \frac{(302+n)(61-n)}{9} \Leftrightarrow \frac{(n+60)(61-n)}{2} \leq \frac{(302+n)(61-n)}{9} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 9(n+60) \leq 2(302+n) \Leftrightarrow 7n \leq 64,$$

т.е. $n \leq 9\frac{1}{7}$, а поскольку n – целое, $n \leq 9$.

Предположим, $n = 9$. Тогда сумма всех чисел $S = \frac{(9+60)(61-9)}{2} = 69 \cdot 26 = 1794$. Число групп $k \leq \frac{61-9}{3} = 17\frac{1}{3}$ и, значит, $k \leq 17$. Но сумма чисел в 17-и группах не превосходит $(121-k) \cdot k = 104 \cdot 17 = 1768$, т.е. меньше суммы всех чисел. Поэтому разбить числа нужным образом нельзя. Значит, $n \leq 8$. Но при $n = 8$ сумма всех чисел на 8 больше, чем при $n = 9$, т.е. равна $1794 + 8 = 1804$, а максимально возможное количество групп $k = [53 : 3] = 17$, т.е. такое же. Значит, по прежнему максимально возможная сумма чисел в группах меньше суммы всех имеющихся чисел. Так что, и в этом случае нужного разбиения не существует, и, значит, $n \leq 7$. Далее, сумма чисел от n до 60 $S = \frac{(n+60)(61-n)}{2}$ является четной (а иначе, разбиение невозможно) только, при $n = 4m$ или $n = 4m + 1$, где m – натуральное число. Среди чисел, меньших 7, такими являются только $n = 1, 4$ и 5. Таким образом, единственные значения n , при которых разбиение возможно, это $n = 1, 4$ или 5. Для всех этих n разбиения существуют. В следующей таблице приведен пример нужного разбиения чисел от 5 до 60 ($n = 5$):

60	59	58	57	56	55	54	53	52
43	41	39	37	35	33	31	29	27
17	18	19	20	21	22	23	24	25

51	50	49	48	47	46	45	44	26
42	40	38	36	34	32	30	28	8, 6
9	10	11	12	13	14	15	16	7, 5

Этот пример легко преобразовать в пример для $n = 4$. Добавив число 4, достаточно лишь перестроить две последние группы, например, так (приводим, только вторую часть таблицы):

51	50	49	48	47	46	45	44	28
42	40	38	36	34	32	30	26	16
9	10	11	12	13	14	15	8, 6, 4	7, 5

Наконец, добавив к последнему примеру еще одну группу $\{3, 2, 1\}$, получим пример для $n = 1$.

11 класс

11.5. Ответ: $x \in [-1, 1]$.

Если $x \geq -1$ удовлетворяет условию задачи, то, полагая в неравенстве из условия задачи

$$\frac{a_1+x}{2} \cdot \frac{a_2+x}{2} \cdot \dots \cdot \frac{a_n+x}{2} \leq \frac{a_1 a_2 \dots a_n + x}{2} \quad (*)$$

значения $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$, получим неравенство $\left(\frac{1+x}{2}\right)^n \leq \frac{1+x}{2}$, откуда необходимо $x \leq 1$.

Докажем индукцией по $n \geq 2$, что при $x \in [-1, 1]$ неравенство (*) выполняется при всех натуральных n и всех $a_1, \dots, a_n \geq 1$.

При $n = 2$ неравенство (*) принимает вид

$$\frac{a_1 + x}{2} \cdot \frac{a_2 + x}{2} \leq \frac{a_1 a_2 + x}{2}, \quad (**)$$

или, после очевидных равносильных преобразований,

$$x^2 + (a_1 + a_2 - 2)x - a_1 a_2 \leq 0.$$

Но это неравенство выполнено при всех $x \in [-1, 1]$ и любых $a_1, a_2 \geq 1$. Действительно,

$$\begin{aligned} x^2 + (a_1 + a_2 - 2)x - a_1 a_2 &\leq 1 + (a_1 + a_2 - 2) \cdot 1 - a_1 a_2 = \\ &= a_1 + a_2 - a_1 a_2 - 1 = -(a_1 - 1)(a_2 - 1) \leq 0. \end{aligned}$$

База индукции установлена.

Если предположить, что неравенство (*) выполняется для некоторого $n \geq 2$, то в силу (*) и (**) имеем:

$$\frac{a_1 + x}{2} \cdot \frac{a_2 + x}{2} \cdot \dots \cdot \frac{a_n + x}{2} \cdot \frac{a_{n+1} + x}{2} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{a_1 a_2 \dots a_n + x}{2} \cdot \frac{a_{n+1} + x}{2} \stackrel{(**)}{\leq} \frac{a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} + x}{2},$$

что и требовалось доказать.

11.6. а) Для решения задачи достаточно в множестве M найти то число, дробная часть корня квадратного которого минимальна. Каждое число $n \in M$ однозначно представимо в виде

$$n = k^2 + r, \quad (*)$$

где $1 \leq r \leq 2k$, а $k = [\sqrt{n}]$ ($[\cdot]$ — целая часть числа). Тогда

$$\{\sqrt{n}\} = \sqrt{k^2 + r} - k = \frac{r}{\sqrt{k^2 + r} + k}.$$

Так как функция $y = \sqrt{x}$ на каждом отрезке $[l^2, (l+1)^2]$, $l \in \mathbb{N}$, монотонно возрастает и принимает значения в единичном отрезке $[l, l+1]$ с натуральными концами, то дробная часть $\{\sqrt{x}\}$ при натуральных $x \in (l^2, (l+1)^2)$ минимальна для $x = l^2 + 1$. Поэтому наименьшее значение $\{\sqrt{n}\}$ следует искать среди тех n , для которых $r = 1$ в представлении (*), т. е., другими словами, нужно найти минимум функции

$$\{\sqrt{n}\} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1} + k}, \quad (**)$$

если $n \in M$, а $k = [\sqrt{n}]$. Из равенства (**) очевидно вытекает, что наименьшее значение $\{\sqrt{n}\}$, $n \in M$, достигается при наибольшем возможном k . Так как $44^2 = 1936 < 2015 < 2025 = 45^2$, то наибольшее возможное значение k , если $n \in M$, равно 44. Значит, для любого $n \in M$ имеем

$$\{\sqrt{n}\} \geq \{\sqrt{44^2 + 1}\} = \frac{1}{\sqrt{44^2 + 1} + 44} > \frac{1}{89} > 0,011.$$

б) Имеем:

$$\{\sqrt{44^2 + 1}\} = \frac{1}{\sqrt{44^2 + 1} + 44} < \frac{1}{88} < 0,0115.$$

11.7. Пусть X – точка пересечения прямых LC_1 и KB_1 . Для доказательства требуемого утверждения достаточно показать, что точки X , I и A_1 лежат на одной прямой.

Пусть $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$. Так как четырехугольник LC_1B_1C вписанный, то

$$\begin{aligned} \angle C_1LC &= 180^\circ - \angle C_1B_1C = \angle C_1B_1A = \\ &= \angle B_1C_1A = 90^\circ - \alpha/2 = (\beta + \gamma)/2. \end{aligned}$$

Аналогично, $\angle B_1KB = (\beta + \gamma)/2$. Следовательно, треугольник LXK равнобедренный ($XL = XK$) и

$$\angle C_1XB_1 = \angle L XK = 180^\circ - (\beta + \gamma) = \alpha.$$

Так как $IC_1 \perp AB$ и $IB_1 \perp AC$, $\angle C_1IB_1 = 180^\circ - \alpha$. Следовательно, I , C_1 , A , X , B_1 лежат на окружности ω . Биссектриса угла C_1AB_1 пересекает ω в точках A и I . Поэтому

$$\angle C_1XI = \angle C_1AI = \angle IAB_1 = \angle IXB_1,$$

откуда следует, что XI – биссектриса угла C_1XB_1 . Поскольку $\triangle L XK$ – равнобедренный треугольник, то XI – высота этого треугольника. С другой стороны, $IA_1 \perp BC$. Таким образом, точки X , I , A лежат на одной прямой, что и следовало доказать.

11.8. Ответ: при $m = 7n - 4$.

Так как в каждой группе все числа должны быть различными, то одно из чисел (будем называть его главным в группе) может равняться сумме остальных чисел в этой группе только, если кроме главного числа в группе есть еще не менее двух чисел. Следовательно, в каждой группе должно быть не менее трех чисел. А так количество чисел от n до m равно $m - n + 1$, то число групп $k \leq \frac{m - n + 1}{3}$. Сумма всех чисел от n до m равна $S = \frac{(n + m)(m - n + 1)}{2}$. Оценим сумму чисел в k группах. Если a – главное число в группе, то согласно условию сумма чисел в данной группе равна $2a$. Поэтому сумма чисел в k группах не превосходит

$$\begin{aligned} 2 \cdot (m + (m - 1) + (m - 2) \dots + (m - k + 1)) &= 2 \cdot \frac{(m + m - k + 1) \cdot k}{2} = (2m + 1 - k) \cdot k \leq \\ &\leq \left(2m + 1 - \frac{m - n + 1}{3}\right) \cdot \frac{m - n + 1}{3} = \frac{(5m + n + 2)(m - n + 1)}{9}. \end{aligned}$$

Следовательно, разбиение возможно только при условии:

$$S \leq \frac{(5m + n + 2)(m - n + 1)}{9} \Leftrightarrow \frac{(n + m)(m - n + 1)}{2} \leq \frac{(5m + n + 2)(m - n + 1)}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9(n + m) \leq 2 \cdot (5m + n + 2) \Leftrightarrow m \geq 7n - 4.$$

Следующий пример показывает, что при $m = 7n - 4$ соответствующее разбиение действительно существует.

$7n - 4$	$7n - 5$	$7n - 6$	$6n - 2$	$6n - 3$
$5n - 3$	$5n - 5$	$5n - 7$	$3n + 1$	$3n - 1$
$2n - 1$	$2n$	$2n + 1$	$3n - 3$	$3n - 2$

$6n - 4$	$6n - 5$	$6n - 6$	$5n - 1$	$5n - 2$
$5n - 4$	$5n - 6$	$5n - 8$	$3n + 2$	$3n$
n	$n + 1$	$n + 2$	$2n - 3$	$2n - 2$