У С Л О В И Я   З А Д А Ч

8 класс

8.1. На дороге между поселками A и B расположен посёлок M, в два раза ближе к B, чем к A. Однажды Михаил, проживающий в поселке M, пригласил в гости Андрея и Василия, проживающих в поселках A и B. Андрей и Василий не имеют транспорта и могут передвигаться только пешком с одинаковой и постоянной скоростью. У Михаила есть мопед, скорость которого в 9 раз больше скорости приятелей. Михаил может, выехав навстречу, подвести до поселка M сначала Андрея, а потом Василия, или наоборот, сначала Василя, а потом Андрея. Михаил подсчитал, что если его друзья выйдут одновременно в сторону посёлка M, а Михаил в тот же момент выедет сначала на встречу Андрею, то затраченное на весь путь время будет отличаться на $2,4$ минуты от времени, затраченного на весь путь, если он сначала выедет навстречу Василию.

Сколько времени нужно Андрею на путь пешком от A до M?

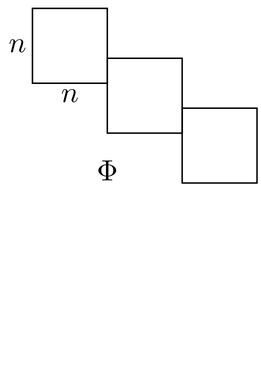
8.2. Найдите все пары натуральных чисел (m, n) таких, что
$$9^m - 7^m = 2^n.$$

8.3. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω. Точки B_1 и D_1 симметричны A относительно середин сторон BC и CD соответственно. Описанная окружность треугольника CB_1D_1 пересекает ω в точках C и G.

Докажите, что AG — диаметр окружности ω.

8.4. На клетчатой плоскости расположены три квадрата $n \times n$, образующие фигуру Φ, изображённую на рисунке. (Соседние квадраты соприкасаются по отрезку, длины 1 — стороне клетки.)

Найдите все $n > 1$, при которых фигуру Φ можно замостить плитками 1×3 и 3×1.



Φ

9 класс

9.1. Докажите, что множество всех натуральных делителей любого натурального числа, не являющегося полным квадратом, можно разбить на пары так, что в каждой паре одно число делится на другое.

9.2. Докажите, что для любого натурального $n \geqslant 2$ верно неравенство

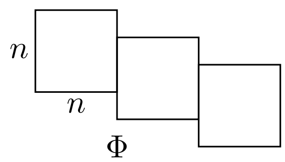
$$\frac{1}{2\,!} + \frac{2}{3\,!} + \ldots + \frac{2^{n-2}}{n\,!} \leqslant \frac{3}{2},$$

где через $k!$ обозначено произведение $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$.

9.3. Биссектриса угла CAB треугольника ABC пересекает сторону CB в точке L. Точка D — основание перпендикуляра, опущенного из вершины C на прямую AL, а E — основание перпендикуляра, опущенного из точки L на прямую AB. Прямые CB и DE пересекаются в точке F.

Докажите, что AF — высота треугольника ABC.

9.4. На клетчатой плоскости расположены три квадрата $n \times n$, образующие фигуру Φ, изображённую на рисунке. (Соседние квадраты соприкасаются по отрезку длины $n-1$.)



Φ

Найдите все $n > 1$, при которых фигуру Φ можно замостить плитками 1×3 и 3×1.

10 класс

10.1. Продолжение медианы AM треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке D. Описанная окружность треугольника CMD пересекает прямую AC в точках C и E. Описанная окружность треугольника AME пересекает прямую AB в точках A и F.

Докажите, что CF — высота треугольника ABC.

10.2. Существует ли функция f, определенная на множестве положительных действительных чисел и принимающая положительные значения, такая, что

$$f(x+y) \geqslant yf(x) + f(f(x))$$

для всех положительных x и y?

10.3. Для фиксированного натурального числа $n \geqslant 2$ определим последовательность $a_k = \text{НОК}(k, k+1, \ldots, k+(n-1))$.

Найдите все натуральные числа $n \geqslant 2$, для которых последовательность a_k с некоторого момента возрастает.

10.4. На клетчатой плоскости закрасили некоторые клетки так, что фигура A, образованная закрашенными клетками, удовлетворяет следующим двум условиям: 1) у любой клетки фигуры A ровно две соседние (имеющие с ней хотя бы одну общую сторону) принадлежат A; и 2) фигуру A можно разбить на равнобедренные трапеции площади 2 с вершинами в узлах сетки.

Докажите, что количество закрашенных клеток делится на 8.

11 класс

11.1. Найдите все действительные числа a, при которых найдётся функция f, определённая на множестве действительных чисел, принимающая в качестве своих значений все действительные числа ровно по одному разу и удовлетворяющая равенству $f(f(x)) = x^2 f(x) + ax^2$ при всех действительных x.

11.2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Биссектриса угла AA_1C пересекает отрезки CC_1 и CA в точках E и D, соответственно. Биссектриса угла AA_1B пересекает отрезки BB_1 и BA в точках F и G, соответственно. Описанные окружности треугольников FA_1D и EA_1G пересекаются в точках A_1 и X.

Докажите, что $\angle BXC = 90^\circ$.

11.3. Для всех пар (m, n) натуральных чисел, которые имеют одинаковое число $k > 1$ делителей введём операцию $\circ$. Выпишем все их делители в порядке возрастания: $1 = m_1 < \ldots < m_k = m$, $1 = n_1 < \ldots < n_k = n$ и положим $m \circ n = m_1 \cdot n_1 + \ldots + m_k \cdot n_k$.

Найдите все пары чисел (m, n), $m \geqslant n$, таких, что $m \circ n = 497$.

11.4. На плоскости нарисован клетчатый многоугольник A (т. е. с вершинами в узлах квадратной сетки и разбивающийся на клеточки). *Внутренними* назовём такие клетки этого многоугольника, у которых все 8 соседних клеток принадлежат A. Все остальные клетки A назовём *граничными*. Известно, что каждая граничная клетка имеет ровно две общие стороны с другими граничными клетками. Кроме того, множество граничных клеток можно разбить на равнобедренные трапеции площади 2 с вершинами в узлах сетки.

Докажите, что площадь многоугольника A при делении на 4 даёт остаток, равный 1.

Р Е Ш Е Н И Я   З А Д А Ч

8 класс

8.1. Ответ: 2 часа.

Пусть расстояние между поселками B и M равно S (км), тогда расстояние между A и M равно $2S$. Обозначим через v (км/ч) скорости Андрея и Василий, тогда скорость Михаила на мопеде равна $9v$.

Рассмотрим случай, при котором Михаил сначала подвозит Андрея. Так как расстояние между A и M равно $2S$, а скорость сближения Андрея и Василия равна $v+9v=10v$, то Андрей и Михаил встретятся через $\dfrac{2S}{10v}=\dfrac{S}{5v}$ (ч). Столько же времени уйдет на дорогу Михаила с Андреем на мопеде от места встречи то поселка M. За все это время, равное $2\cdot\dfrac{S}{5v}=\dfrac{2S}{5v}$ Василий пройдет расстояние $v\cdot\dfrac{2S}{5v}=\dfrac{2S}{5}$. Поэтому, когда Михаил (с Андреем окажутся в поселке M, его и Василия будет разделять расстояние равное $S-\dfrac{2S}{5}=\dfrac{3S}{5}$. Следовательно, после выезда из M Михаил встретит и подберет Василия через $\dfrac{3S}{5}:10v=\dfrac{3S}{50v}$. Столько же времени понадобится Михаилу (с Василием) на обратную дорогу до M. В результате, все трое друзей окажутся в поселке M через $\dfrac{2S}{5v}+2\cdot\dfrac{3S}{50v}=\dfrac{13S}{25v}$ (ч) после начала движения.

Аналогично подсчитаем такое же время в случае, при котором Михаил сначала подвозит Василия. Время Михаила на дорогу до встречи с Василием и обратно на дорогу с ним до поселка M равно $\dfrac{S}{5v}$. За это время Андрей пройдет расстояние $\dfrac{S}{5}$. Поэтому когда Михаил (с Василием прибудут) в поселок М, Андрей буде находиться на расстоянии $2S-\dfrac{S}{5}=\dfrac{9S}{5}$. Тогда Михаилу на дорогу от M до встречи с Андреем и обратно понадобится $2\cdot\dfrac{9S}{5}:10v=\dfrac{18S}{50v}$. В результате, в этом случае все трое друзей окажутся в поселке M через $\dfrac{S}{5v}+\dfrac{18S}{50v}=\dfrac{14S}{25v}$ (ч) после начала движения.

Согласно условию общее время на весь путь в первом случае отличается от аналогичного времени во втором случае на $2,4$ минуты, т.е. на $\dfrac{1}{25}$ часа. Поэтом имеем:

$$\frac{14S}{25v}-\frac{13S}{25v}=\frac{1}{25},$$

откуда $\dfrac{S}{v}=1$. Это означает, что расстояние S Андрей и Василий преодолевают пешком за 1 час. Следовательно, Андрею на дорогу пешком от A до M нужно 2 часа.

8.2. Ответ: $(m,n)=(1,1)$, $(m,n)=(2,5)$.

Легко видеть, что пара $(m,n)=(1,1)$ удовлетворяет условию. Для $m>1$ воспользуемся формулой сокращённого умножения

$$a^m-b^m=(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+\ldots+b^{m-1}).$$

При $a=9$, $b=7$, первый множитель равен 2, а второй больше единицы. Поскольку все слагаемые во втором множителе являются нечётными числами и их количество равно

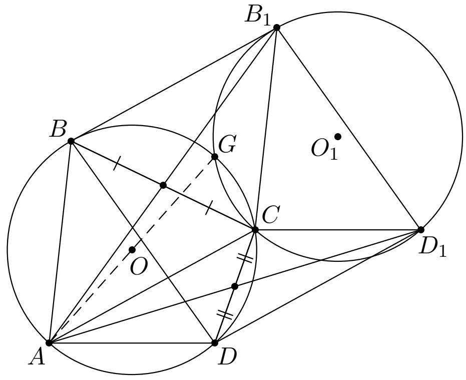
m, то для выполнения равенства из условия необходимо, чтобы m было чётным числом. Пусть $m = 2k$, тогда

$$9^{2k} - 7^{2k} = (9^k - 7^k)(9^k + 7^k) = 2^n.$$

Поэтому, $9^k - 7^k = 2^x$, $9^k + 7^k = 2^y$ где $x < y$ и $x + y = n$. Вычитая из второго равенства первое, получим $2 \cdot 7^k = 2^x(2^{y-x} - 1)$, откуда $x = 1$ и $7^k = 2^{y-1} - 1$. Значит, $7^k + 1$ должно делиться на 2^{y-1}. Однако при $y \geqslant 5$ остаток при делении числа $7^k + 1$ на 16, как легко видеть, равен или 2 или 8, т. е. $7^k + 1$ не делится на 16, и, следовательно, не существует таких натуральных k, при которых пара $(m, n) = (2k, n)$ удовлетворяла бы условию при $n = y + 1 \geqslant 5 + 1 = 6$.

Итак, $n \leqslant 5$ и тогда $y = n - x = n - 1 \leqslant 4$, откуда $7^k = 2^{y-1} - 1 \leqslant 7$, и, значит, $k \leqslant 1$. Легко видеть, что $m = 2k = 2 \cdot 1 = 2$ и $n = 5$ удовлетворяют условию. Таким образом, существует лишь две пары $(m, n) = (1, 1)$, $(m, n) = (2, 5)$, удовлетворяющие условию задачи.

8.3. Так как точка B_1 симметрична вершине A относительно середины стороны BC, то ABB_1C — параллелограмм, а значит, $BB_1 \parallel AC$ и $BB_1 = AC$. Аналогично доказывается, что $DD_1 \parallel AC$ и $DD_1 = AC$. Следовательно, треугольник CD_1B_1 получен из треугольника ADB параллельным переносом вдоль прямой AC на расстояние, равное длине отрезка AC. Пусть O — центр ω, а O_1 — центр описанной окружности треугольника CD_1B_1. Тогда $OO_1 \parallel AC$. Так как линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна общей хорде, то $OO_1 \perp CG$, а значит, $AC \perp CG$. Следовательно, $\angle ACG = 90°$, т.е. AG — диаметр окружности ω.



8.4. Ответ: $n = 3k$, $n = 3k + 1$.

Понятно, что любой прямоугольник, у которого одна из сторон делится на 3 можно замостить плитками. Следовательно, при $n = 3k$, каждый из трёх квадратов, а значит, и всю фигуру, можно замостить плитками.

Докажем, что Φ можно покрыть и при любом n вида $3k + 1$. Положим две горизонтальные плитки так, чтобы каждая из них закрывала две клетки в центральном квадрате и одну в крайнем. Тогда каждый из крайних квадратов разбивается на прямоугольники $(3k+1) \times 3k$ и $3k \times 1$, каждый из которых можно замостить плитками. Незанятая же часть центрального квадрата разбивается на прямоугольники размерами $3k \times 2$, $(3k+1) \times (3k-3)$ и $2 \times 3k$, каждый из которых можно замостить плитками.

Предположим, что при каком-то $n = 3k + 2$ фигуру Φ удалось замостить плитками. Так как каждый квадрат содержит $n^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ клеток, а два соседних квадрата могут иметь только одну общую (пересекающую их обоих) плитку, то плитки, целиком содержащиеся в верхнем квадрате покрывают его весь, за исключением одной только правой нижней клетки. Раскрасим клетки верхнего квадрата в три цвета как показано на рисунке. Нетрудно видеть, что каждая плитка накрывает по одной клетке каждого цвета. При этом, клеток цвета 2 на одну больше, чем клеток цвета 1. Значит, при $n = 3k + 2$ фигуру Φ замостить нельзя.

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	

9 класс

9.1. Рассмотрим произвольное натуральное число n, которое не является полным квадратом. Среди простых делителей n найдётся такой делитель p, что $n = p^{2k+1}m$, где m не делится на p. Построим требуемое разбиение множества делителей числа n на пары. Пусть d — произвольный делитель числа n, а s — максимальная степень p, на которую делится d. Если s — чётное число, то поставим в пару d число pd, а если s — нечётное число, то — d/p. Нетрудно видеть, что указанное разбиение на пары удовлетворяет условию задачи.

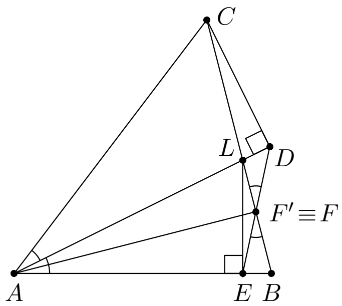
9.2. Преобразуем выражение, стоящее в левой части

$$\frac{1}{2\,!}+\frac{2}{3\,!}+\ldots+\frac{2^{n-2}}{n\,!}=\frac{1}{2\,!}\left(1+\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{2^{n-2}}{3\cdot 4\cdots n}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3^2}+\ldots+\frac{2^{n-2}}{3^{n-2}}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}+\ldots\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{2}{3}}=\frac{3}{2}.$$

9.3. Пусть AF' — высота, проведенная из вершины A, в треугольнике ABC. Докажем, что точки D, F' и E лежат на одной прямой, тем самым покажем, что $F \equiv F'$ и AF — высота треугольника ABC. Так как $\angle CDA = \angle CF'A = 90^\circ$, то четырёхугольник $CDF'A$ вписан, а значит, $\angle CF'D = \angle CAD$. Так как $\angle AF'L = \angle AEL = 90^\circ$, то четырёхугольник $AEF'L$ — вписан, а значит, $\angle BF'E = \angle LAE$. Так как $\angle CAL = \angle LAB$, то $\angle CF'D = \angle BF'E$, т.е. D, F' и E лежат на одной прямой.



9.4. Ответ: $n = 3k$.

Понятно, что любой прямоугольник, у которого одна из сторон делится на 3 можно замостить плитками. Следовательно, при $n = 3k$ каждый из трёх квадратов, а значит, и всю фигуру, можно замостить плитками.

Предположим, что при каком-то $n = 3k + 1$ или $3k + 2$ фигуру Φ удалось замостить плитками. Для каждого из двух случаев приведём раскраску фигуры Φ в три цвета такую, что каждая плитка накрывает по одной клетке каждого цвета, но клеток различных цветов не поровну. Это будет означать, что замостить фигуру Φ так, как требуется в условии, нельзя. Раскрасим каждый из квадратов так, как показано на рисунке. Нетрудно видеть, что при $n = 3k+1$ клеток первого цвета, а при $n = 3k+2$ клеток второго цвета, будет на три больше, чем клеток каждого из остальных цветов.

1	2	3	1	2	3	1
3	1	2	3	1	2	3
2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1
3	1	2	3	1	2	3
2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1

$n = 3k + 1$

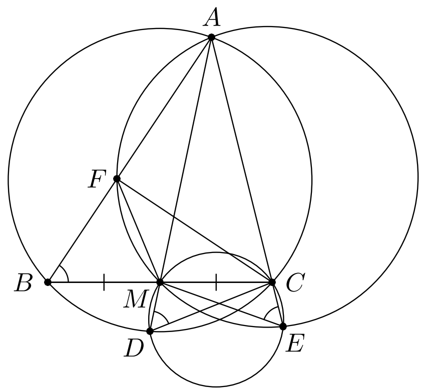
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

$n = 3k + 2$

10 класс

10.1. Докажем равенства $FM = BM = MC$, из которых следует, что $\angle CFB = 90°$. Так как четырёхугольник $ABDC$ вписанный, то

$$\angle ABC = \angle ADC.$$



Точки M, D, E и C лежат на одной окружности, а значит,

$$\angle MDC = \angle MEC.$$

Из вписанного четырёхугольника $AFME$ находим

$$\angle BFM = \angle MEA = \angle FBM.$$

Следовательно, треугольник BFM равнобедренный и $BM = FM$.

10.2. Ответ: не существует.

Предположим, что такая функция существует. Положим $x = 1$ в неравенстве

$$f(x+y) \geqslant yf(x) + f(f(x)). \tag{1}$$

Получим: $f(1+y) \geqslant ay + b$, где $a = f(1) > 0$, $b = f(f(1)) > 0$. Тогда

$$f(z) \geqslant az + b - a \tag{2}$$

для любого $z > 1$. Из (2) следует, что $f(x) > 1$ при всех достаточно больших x (а именно, при $x \geqslant \dfrac{1-b+a}{a}$). Положив в (1) $x = y = \dfrac{z}{2}$, получим

$$f(z) \geqslant \frac{z}{2} \cdot f\left(\frac{z}{2}\right) + f\left(f\left(\frac{z}{2}\right)\right) > \frac{z}{2} \cdot f\left(\frac{z}{2}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{z}{2}\left(a \cdot \frac{z}{2} + b - a\right) = \frac{a}{4} \cdot z^2 + \frac{b-a}{2} \cdot z.$$

Тогда

$$f(z) > \frac{a}{5} \cdot z^2 > z \tag{3}$$

при всех достаточно больших z. Далее, имеем

$$f(x+y) \geqslant yf(x) + f(f(x)) > f(f(x)) > f(x)$$

при всех достаточно больших x. Следовательно, $f(x)$ – возрастающая (при достаточно больших x) функция. Поэтому их неравенства $f(x+y) > f(f(x))$ следует, что $x+y > f(x)$ для всех $y > 0$ и всех достаточно больших x. Наряду с (3) это дает $x+y > \dfrac{a}{5} \cdot x^2$ при всех достаточно больших x, что, очевидно, не верно. Полученное противоречие доказывет,что такой функции не существует.

10.3. Ответ: $n = 2$.

Заметим, что при $n = 2$ последовательность имеет вид $a_k = k(k+1)$, поскольку последовательные числа всегда взаимно просты. Ясно, что $k(k+1) < (k+1)(k+2)$ и последовательность является возрастающей с самого начала.

Первое решение. Докажем, что при $n \geqslant 3$ последовательность не является возрастающей ни с какого момента. Выберем $k = np$, где p — произвольное простое число, большее n. Среди чисел $np+1, np+2, \ldots, np+n-1$ ни одно не делится на p и хотя бы одно чётное. Число $n(p+1)$ также не делится на p, причём $p+1$ является чётным. Следовательно,

$$a_k = p \cdot \text{НОК}(n, np+1, np+2, \ldots, np+n-1),$$
$$a_{k+1} \leqslant \frac{p+1}{2} \cdot \text{НОК}(n, np+1, np+2, \ldots, np+n-1).$$

Значит, $a_k > a_{k+1}$ для неограниченно больших номеров k, и последовательность a_k не является возрастающей ни с какого момента.

Второе решение. Покажем, как ещё можно доказать, что при $n \geqslant 3$ последовательность не является возрастающей ни с какого момента. Пусть a_k возрастает начиная с k_0, тогда при всех $k \geqslant k_0$ верно неравенство $a_{k+1} \geqslant a_k$. Рассмотрим $k = m! - n$, где число $m > \max(n! + n, k_0)$.

Обозначим $\text{НОК}(k+1, \ldots, k+n-1)$ через N. Тогда неравенство $a_{k+1} \geqslant a_k$ перепишется в виде $\text{НОК}(N, m!) > \text{НОК}(m!-n, N)$. Воспользовавшись равенством $\text{НОК}(a,b) \cdot \text{НОД}(a,b) = a \cdot b$, справедливым для любых натуральных чисел a и b, получим:

$$\text{НОК}(N, m!) > \text{НОК}(m!-n, N) \iff \frac{N \cdot m!}{\text{НОД}(N, m!)} > \frac{(m!-n) \cdot N}{\text{НОД}(m!-n, N)},$$

или, после равносильных преобразований,

$$n \cdot \text{НОД}(N, m!) > m! \cdot (\text{НОД}(N, m!) - \text{НОД}(m!-n, N)) \qquad (1)$$

Для всех ℓ от 1 до $n-1$ верны равенства $\text{НОД}(m!, m!-\ell) = \text{НОД}(m!, \ell) = \ell$, следовательно, $(n-1)! \geqslant \text{НОД}(N, m!) \geqslant \text{НОК}(1, 2, \ldots, n-1)$. Кроме того, поскольку $m!$ делится на ℓ, то $\text{НОД}(m!-n, m!-n+\ell) = \text{НОД}(n, n-\ell)$ — делитель числа n. Значит, и число $\text{НОД}(m!-n, N)$ является делителем числа n, (простые делители входят в N в максимальной из степеней их вхождения в $m!-n+1, \ldots, m!-n+(n-1)$).

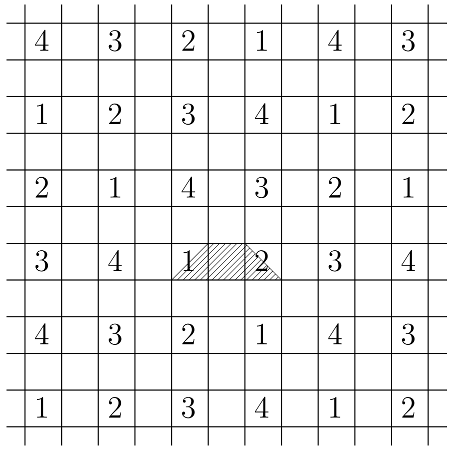
С учётом полученных оценок, из (1) следует неравенство

$$n \cdot (n-1)! > m! \cdot (\text{НОК}(1, 2, \ldots, n-1) - n). \qquad (2)$$

Так как $\text{НОК}(1, 2, \ldots, n-1) \geqslant (n-2)(n-1)$, то при $n \geqslant 4$ правая часть неравенства (2) не меньше $m!$, откуда получаем, что $n! > m!$ — противоречие. В случае $n = 3$ выполняется равенство $\text{НОД}(N, m!) = \text{НОД}(m!-2, m!) = 2$, но, при этом, $\text{НОД}(m! - n, N) = \text{НОД}(m!-3, (m!-2)(m!-1)) = 1$ и неравенство (1) примет вид $6 > m!$, то тоже неверно.

10.4. Очевидно, что достаточно доказать утверждение задачи для *связных* фигур A (т. е., таких, что от любой клетки можно перейти к любой, проходя только в соседние клетки), так как любая несвязная фигура разбивается на несколько связных частей, у каждой из которых (как мы докажем) количество клеток делится на 8. Раскрасим некоторые из клеток плоскости в четыре цвета, как показано на рисунке.

Не ограничивая общности, можно считать, что какая-то из трапеций разбиения размещается так, как показано на этом рисунке (к такому расположению можно прийти при помощи сдвига, симметрии и поворота раскраски). Начнём обходить клетки фигуры A, начиная с этой трапеции так, что мы переходим по клеткам от закрашенной цветом 1 к закрашенной цветом 2 клетке (назовём такую трапецию трапецией $1 \to 2$). Нетрудно видеть, что при таком обходе виды трапеций чередуются в порядке: $1 \to 2$, $2 \to 3$, $3 \to 4$, $4 \to 1$. Поскольку в какой-то момент мы закончим обход в той клетке цвета 1, с которой начинали, то количество пройденных трапеций делится на 4, а значит, общее количество клеток фигуры A делится на 8.



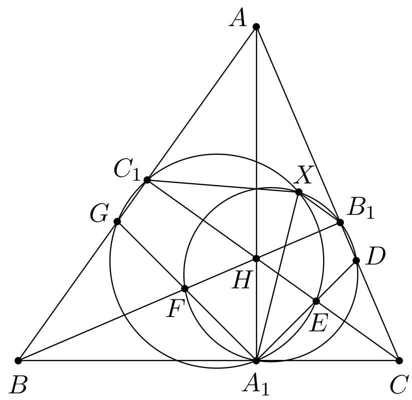
11 класс

11.1. Ответ: $a = 0$.

Для x такого, что $f(x) = -a$, равенство из условия примет вид $f(-a) = 0$. Для $x = -a$ равенство из условия примет вид $f(0) = a^3$. Для $x = 0$ равенство из условия примет вид $f(a^3) = 0$. Значит, согласно условию, $a^3 = -a$, что равносильно $a(a^2+1) = 0$, т. е. $a = 0$.

Нетрудно видеть, что при $a = 0$ подойдёт функция $f(x) = x|x|$.

11.2. Так как $\angle BB_1C = \angle CC_1B = 90°$, то для того, чтобы доказать утверждение задачи, достаточно показать, что точки B, C_1, X и B_1 лежат на одной окружности. Так как A_1D и A_1G — биссектрисы углов $\angle AA_1C$ и $\angle AA_1B$, соответственно, то $\angle GA_1D = 90°$. Так как $\angle FB_1D = \angle FA_1D = 90°$, то точка B_1 принадлежит описанной окружности треугольника FA_1D. Аналогичным образом доказывается, что точка C_1 принадлежит описанной окружности треугольников EA_1G. Из доказанного следует, что $\angle C_1XA_1 = \angle BGA_1 = 135° - \angle ABC$ и $\angle B_1XA_1 = \angle CDA_1 = 135° - \angle ACB$. Следовательно, $\angle C_1XB_1 = 270° - \angle ABC - \angle ACB = 90° + \angle BAC$. Так как $\angle B_1BA = 90° - \angle BAC$, то $\angle B_1BC_1 + \angle C_1XB_1 = 180°$, а значит, четырехугольник BC_1XB_1 вписан.



11.3. Ответ: $(20, 18)$.

Из определения $\circ$ ясно, что $m \circ n \geqslant 1 + n^2$, значит, $n \leqslant \sqrt{496} < 23$. Заметим, что наименьшее число, которое имеет хотя бы семь делителей — это 24, поэтому, достаточно рассмотреть значения k от 1 до 6.

Ровно два натуральных делителя имеют только простые числа, значит, при $k = 2$ числа m и n простые. Из равенства $m \circ n = 497$ следует, что $mn = 496$. Но $496 = 2^4 \cdot 31$ не является произведением двух простых чисел.

Ровно по три натуральных делителя имеют только квадраты простых чисел. Пусть $m = p^2$, $n = q^2$, тогда $m \cdot n = 1 + pq + (pq)^2 = 497$. Следовательно, $pq(pq+1) = 496 = 2^4 \cdot 31$, $p = 31$, $q = 2$, что не подходит.

Рассмотрим случай $k = 4$. Так как $1 < m_2 < m_3 < m$ — все натуральные делители числа m, то $m = m_2m_3$, аналогично, $n_2n_3 = n$. Разложим $m \circ n$ на множители:

$$m \circ n = 1 + m_2n_2 + m_3n_3 + (m_2m_3)(n_2n_3) = (1 + m_2n_2)(1 + m_3n_3).$$

Поскольку $497 = 7 \cdot 71$, то $m_2n_2 = 6$ и $m_3n_3 = 70$. Числа m_2 и n_2 простые, значит, одно из них 2, другое 3, а каждое из чисел m_3 и n_3 является либо простым, либо квадратом m_2 и, соответственно, n_2. Нетрудно видеть, что для $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$ не подойдёт ни один из вариантов.

Ровно пять делителей имеют только четвёртые степени простых чисел. До 23 есть ровно одно такое число — $n = 2^4$. Заметим, что

$$2^4 \circ 2^4 = (4^5 - 1)/3 = 341 < 497, \quad \text{а} \quad 3^4 \circ 2^4 = (6^5 - 1)/5 = 1555 > 497.$$

При бóльших значениях m решений тем более не найдётся.

Ровно шесть делителей имеют только числа вида p^5 и pq^2, где p и q — простые числа. До 23 есть ровно три таких числа: 12, 18 и 20, рассмотрим их по отдельности.

Пусть $n = 12$. Среди делителей числа 12 ровно два нечётных ($n_1 = 1$ и $n_3 = 3$), а число 497 тоже нечётное, значит $m_2 = 2$ и $m_3 = 4$. Поэтому, m имеет вид 2^5 или $4p$, где простое p больше трёх. $m = 2^5$ невозможно, так как $12 \cdot 32 = 529$. В случае $m = 4p$ получаем уравнение $17 + 64p = 497$, которое не имеет натуральных решений.

Пусть $n = 18$. Поскольку, $18 \circ m > 18 \cdot m + 9 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1$, то, $18 \leqslant m < 414/18 = 23$. Рассмотрев два варианта $m = 18$ и $m = 20$, получим решение единственное $(20, 18)$.

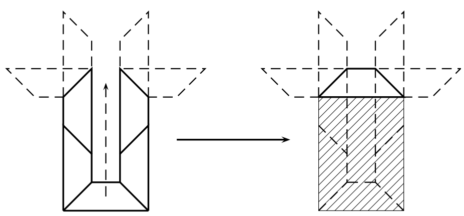
Предположим, что $n = 20$. Так как $20 \circ m > 20m + 10 + 5 + 4 + 2 + 1$, то $20 \leqslant m < 475/20 = 23.75$. Но $20 \circ 20 > 500$, следовательно, решений нет.

11.4. Ясно, что множество граничных клеток описанного в условии многоугольника разбивается на трапеции так, что можно перейти из любой из них в другую, переходя только лишь по боковым сторонам трапеций, не выходя за пределы его. Многоугольник с этим условием назовём *хорошим*. Докажем индукцией по $k \geqslant 2$ следующее утверждение: если площадь хорошего многоугольника $S \leqslant 4k + 1$, то $S \equiv 1 \pmod 4$.

База индукции, $k = 2$. Легко видеть, что в разбиении границы участвуют хотя бы 4 трапеции, при этом если их ровно 4, то многоугольник является квадратом 3×3. Если трапеций хотя бы 5, то площадь $S \geqslant 2 \cdot 5 > 2 \cdot 4 + 1$.

Шаг индукции. Пусть условие верно для $k = n - 1 \geqslant 2$. Покажем его справедливость для $k = n$, т. е. для любого хорошего многоугольника, площадь которого $S \in [4(n-1) + 2; 4n + 1]$.

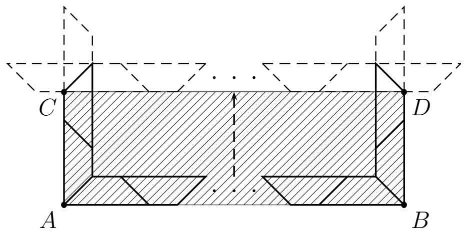
Рассмотрим любую сторону AB хорошего многоугольника, оба примыкающие угла к которой равны $90°$. Такая всегда найдётся: например, самая нижняя горизонтальная сторона многоугольника.



Пусть $AB = 3$ и многоугольник не является квадратом 3×3. Тогда по две прилегающие к AB трапеции восстанавливаются однозначно и от многоугольника можно отрезать прямоугольник 3×4 и получить снова хороший. Понятно, что при таком отрезании остаток от деления S на 4 не изменится.

Теперь будем считать, что у многоугольника нет сторон длины 3. (Если сторона многоугольника равна 3, то оба её обрамляющих угла по $90°$, что легко увидеть). Будем считать, что $AB = l$. Тогда к соседним с ней сторонам прилегают хоть по 2 трапеции, иначе их длина равна 3.

Если в построенном на AB в верхнюю сторону прямоугольнике $CABD$ размером $l \times 4$ нет клеток границы, кроме тех, что имеют общие точки с ломаной $CABD$, этот многоугольник можно отрезать и получить вновь хороший многоугольник, перенеся трапеции, прилегающие к AB на 4 клетки вверх (аналогично случаю $AB = 3$).

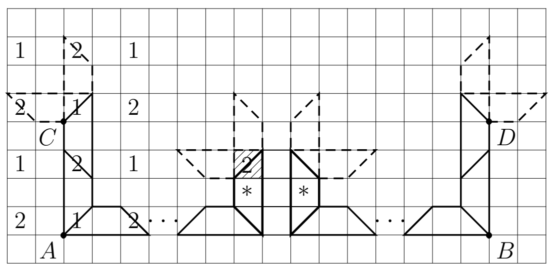


Допустим, в $CABD$ есть другие граничные клетки.

Раскрасим клетки плоскости (некоторые) в 2 цвета, как на рисунке. Тогда все граничные клетки вида ⧄ имеют цвет 1, вида ⧅ имеют цвет 2 (т. к. от каждой клетки первого типа клетка второго располагается через одну). Рассмотрим все граничные рамки внутри прямоугольника $CABD$ и выберем среди них нижнюю, не имеющую общих точек с ломаной. Тогда какая-то соседняя с ней слева или справа должна быть граничной, иначе граница не разобьётся на трапеции (если эта клетка окрашена, в ней содержится часть трапеции с горизонтальными основаниями, иначе клетка не нижняя, а если нет, то трапеция, содержащая эту клетку не может иметь вертикальные основания по тем же причинам).

Из двух соседних граничных клеток хотя бы одна пересечена диагональю трапеции. Не нарушая общности, будем считать, что она имеет вид ⧄, на рисунке она закрашена. Тогда она имеет цвет 1 и располагается на две клетки выше, чем клетка цвета 2 вида ⧅, прилегающая к AB, иначе она не сможет располагаться внутри $CABD$, что верно для любой его внутренней клетки цвета 1. Тогда ясно, что часть этой клетки содержит трапеция, располагающаяся справа от неё.

Теперь проведём разрезы, как показано на рисунке, тем самым разрезав многоугольник на 2 других и прямоугольник 3×1. Заметим, что эти 2 многоугольника хорошие, т.к. их рамки совпадают с частями рамок начального плюс ещё по 1-й клетке (помеченной (*)), покрываемой трапецией. Их площадями являются $4a + 1$ и $4b + 1$ соответственно. Итого площадь многоугольника



$$(4a + 1) + (4b + 1) + 3 \equiv 1 \pmod 4,$$

что и было нужно.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.5. Найдите наименьшее натуральное число n, у которого существуют три различных собственных делителя, сумма которых равна 1001.

(Собственный делитель числа n — это любой делитель n, отличный от 1 и n.)

8.6. В параллелограмме $ABCD$ ($BC \parallel AD$) сторона AB в два раза меньше стороны BC. Биссектриса угла ABC пересекает сторону AD в точке K, а диагональ AC в точке L. Биссектриса угла ADC пересекает продолжение стороны AB за точку B в точке M. Прямая ML пересекает сторону AD в точке F.

Найдите отношение $AF : AD$.

8.7. Натуральные числа a, b и c удовлетворяют равенству

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = abc(a^3 + b^3 + c^3).$$

Докажите, что произведение каких-то двух из этих чисел является квадратом некоторого натурального числа.

8.8. В социальной сети зарегистрированы 2018 человек, некоторые из которых являются друзьями. Известно, что у Бори наибольшее число друзей, а у Жени — наименьшее, причем общее число друзей у Бори и Жени не меньше k. По правилам, установленным администратором, обмениваться сообщениями могут только друзья. Аня и Маша также входят в данную социальную сеть, однако не являются друзьями.

При каком наименьшем k Аня всегда сможет передать привет Маше, возможно через других пользователей?

9 класс

9.5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в параболу $y = x^2$. Известно, что $\angle BAD = 90°$. Кроме того, диагональ AC параллельна оси Ox и является биссектрисой угла BAD.

Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если длина диагонали BD равна p.

9.6. Докажите, что при всех натуральных n и m справедливо неравенство
$$\left|n\sqrt{n^2+1}-m\right| \geqslant \sqrt{2}-1.$$

9.7. Внутри треугольника ABC отмечена точка O так, что длины отрезков OA, OB и OC равны соответственно 15, 12 и 20. Оказалось, что основания перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны треугольника ABC, являются вершинами равностороннего треугольника.

Определите величину угла ABC.

9.8. Дано натуральное число n. Таблицу $k \times n$ (k строк и n столбцов) заполненную нулями и единицами назовём хорошей, если выполняется следующее условие: для любого разбиения строк таблицы на две непустые группы найдётся такой непустой набор столбцов, что на пересечении любой строки из одной из этих групп с выбранными столбцами стоит чётное число единиц, а на пересечении любой строки из другой группы с выбранными столбцами стоит нечётное число единиц.

Найдите наибольшее натуральное число k, для которого существует хотя бы одна хорошая таблица $k \times n$.

10 класс

10.5. Вершины выпуклого четырёхугольника $ABCD$ принадлежат параболе $y = x^2$. Известно, что вокруг $ABCD$ можно описать окружность, причём AC — её диаметр. Пусть M и N — середины диагоналей AC и BD соответственно.

Найдите длину проекции отрезка MN на ось Oy.

10.6. В прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$) вписан квадрат $A_1B_1C_1D_1$ так, что точки A_1, B_1 лежат на катетах CB и CA соответственно, а точки C_1, D_1 — на гипотенузе AB. Окружности, описанные около треугольников B_1A_1C и BD_1A_1 пересекаются в точках A_1 и X, а окружности, описанные около треугольников B_1A_1C и AC_1B_1 пересекаются в точках B_1 и Y.

Докажите, что прямые A_1X и B_1Y пересекаются на гипотенузе AB.

10.7. Найдите все натуральные числа n, при которых уравнение
$$3a^2 - b^2 = 2018^n$$
имеет решение в целых числах a и b.

10.8. На окружности отмечены вершины правильного n-угольника и центр окружности. Двое по очереди соединяют их отрезками. За ход можно выбрать вершину и соединить её либо с соседней вершиной, либо с центром окружности. Побеждает тот, после чьего хода можно добраться по отрезкам из любой отмеченной точки в любую другую.

Для каждого натурального $n \geqslant 3$ определите, кто победит при правильной игре.

11 класс

11.5. Окружность S_1 пересекает гиперболу $y = \dfrac{1}{x}$ в четырёх точках A, B, C и D, а другая окружность S_2 пересекает эту же гиперболу в четырёх точках A, B, F и G. Известно, что радиусы окружностей S_1 и S_2 равны.

Докажите, что точки C, D, F и G являются вершинами параллелограмма.

11.6. Внутри треугольника ABC выбрана произвольная точка X. Описанные окружности треугольников AXB и AXC повторно пересекают сторону BC в точках D и E, соответственно. Прямая DX пересекает сторону AC в точке K, а прямая EX пересекает сторону AB в точке L.

Докажите, что $LK \parallel BC$.

11.7. Рассмотрим выражение $M(n,m) = \left|n\sqrt{n^2+a} - bm\right|$, где $n, m \in \mathbb{N}$, а числа a и b фиксированы, причём a — нечётное число, b — рациональное число, такое, что в представлении его в виде несократимой дроби знаменатель нечётен.

Докажите, что существует

а) не более конечного числа пар (n,m), для которых $M(n,m)=0$;

б) такая положительная постоянная C, что для тех пар (n,m), при которых $M(n,m) \neq 0$, выполняется неравенство $M(n,m) \geqslant C$.

11.8. На окружности отмечены вершины правильного n-угольника. Двое по очереди соединяют их отрезками. За ход можно выбрать вершину и соединить её либо с соседней вершиной, либо с центром окружности. Побеждает тот, после чьего хода можно добраться по отрезкам из любой вершины в любую другую.

Для каждого натурального $n \geqslant 3$ определите, кто победит при правильной игре.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.5. Ответ: $n = 924$.

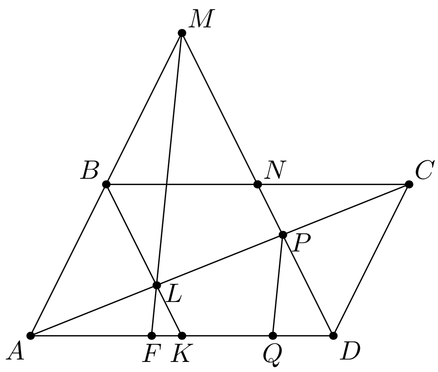
Пусть для определённости $d_1 < d_2 < d_3$ — данные делители числа n, расположенные в порядке возрастания. По условию $1 < d_1 < d_2 < d_3 < n$. Поскольку d_1, d_2, d_3 — делители n, то найдутся натуральные числа a, b, c, такие, что $d_1a = d_2b = d_3c = n$. Отсюда легко видим, что $1 < c < b < a < n$. Тогда $c \geqslant 2$, $b \geqslant 3$, $a \geqslant 4$. Так как по условию $d_1 + d_2 + d_3 = 1001$, имеем

$$1001 = \frac{n}{a} + \frac{n}{b} + \frac{n}{c} = n\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leqslant n\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{13n}{12},$$

или $12 \cdot 1001 \leqslant 13n$, т.е. $12 \cdot 77 \leqslant n$, $n \geqslant 924$. С другой стороны, значение $n = 924$ удовлетворяет условию задачи, так как у числа 924 есть собственные делители 462, 308 и 231, сумма которых $462 + 308 + 231$ действительно равна 1001.

8.6. Ответ: $\dfrac{2}{5}$.

Пусть отрезок MD пересекает сторону AC в точке N, а диагональ AC — в точке P. Так как $BC \parallel AD$, то $\angle CBK = \angle BKA$ (внутренние накрест лежащие углы).



По условию $\angle ABK = \angle CBK$, поэтому $\angle ABK = \angle BKA$, и, следовательно треугольник ABK равнобедренный и $AB = AK$. Так как $2AB = AD$, то K — середина стороны AD. Аналогично N — середина стороны BC. Поскольку очевидно, что $BNDK$ — параллелограмм, то $ND = BK$ и NP и LK — средние линии в треугольниках BCL и APD соответственно. Поэтому $2NP = BL$, $2LK = PD$, откуда $NP + PD = ND = BK = BL + LK$, и, следовательно, $2NP = 2LK = PD$. Поскольку N — середина BC, то $BN = 0,5BC = 0,5AD$, и так как $BC \parallel ADM$ то BN — средняя линия треугольника AMD, и, значит, N — середина отрезка MD, т.е.

$$MN = ND = NP + PD = \frac{3}{2}PD \implies MP = MN + NP = \frac{3}{2}PD + \frac{1}{2}PD = 2PD. \quad (1)$$

Пусть Q — точка пересечения стороны AD с прямой, проходящей через точку P параллельно прямой MF. Тогда по теореме Фалеса $FQ : QD = MP : PD \overset{(1)}{=} 2 : 1$. Поскольку LK — средняя линия в треугольнике APD, то $AK = KD$. Поэтому

$$AF : AD = AF : (AF + FQ + QD) = FQ : (2FQ + QD) = FQ : (4QD + QD) =$$

$$= 2QD : 5QD = 2 : 5.$$

8.7. Заметим, что

$$(ab-c^2)(ca-b^2)(bc-a^2)=(a^2bc-ab^3-ac^3+b^2c^2)(bc-a^2)=$$
$$=a^2b^2c^2-ab^4c-abc^4+b^3c^3-a^4bc+a^3b^3+a^3c^3-a^2b^2c^2=$$
$$=a^3b^3+b^3c^3+a^3c^3-a^4bc-a^4bc-abc^4=a^3b^3+b^3c^3+a^3c^3-abc(a^3+b^3+c^3).$$

Поэтому равенство

$$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3=abc(a^3+b^3+c^3) \tag{1}$$

из условия задачи равносильно равенству

$$(ab-c^2)(ca-b^2)(bc-a^2)=0. \tag{2}$$

Из (2) следует, что $ab=c^2$, или $ca=b^2$, или $bc=a^2$, что и требовалось доказать.

8.8. Ответ: $k=2017$.

Покажем, что $k\geqslant 2017$. Заметим, что у Бори и Маши вместе друзей не меньше, чем у Бори и Жени, так как у Жени наименьшее число друзей среди пользователей социальной сети. То есть у Бори и Маши вместе не менее 2017 друзей, а всего кроме Бори и Маши в социальной сети зарегистрировано 2016 человек. Следовательно, у Бори и Маши найдется общий друг, например, Павел. Аналогично у Ани и Бори найдется общий друг, например, Игорь. Таким образом, Аня всегда сможет передать привет Маше, прибегнув к помощи не более трех других пользователей сети.

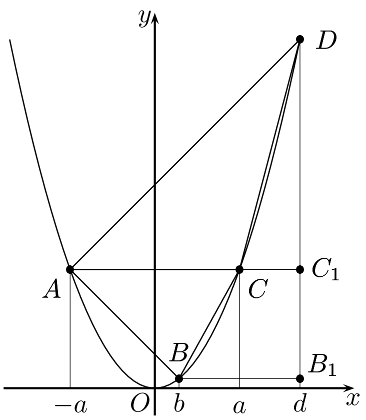
Теперь покажем, что $k\leqslant 2016$ недостаточно, чтобы существовала искомая цепочка пользователей. Пусть Боря дружит со всеми пользователями кроме Ани и Жени, а Аня и Женя дружат только друг с другом. Больше никто ни с кем не дружит. Тогда у Бори и Жени вместе $2016\geqslant k$ друзей, а также все пользователи имеют друзей не больше Бори, и не меньше Жени. Однако Аня не сможет передать привет Маше, так она сама и ее друг Женя не контактируют с остальными пользователями, среди которых есть Маша.

9 класс

9.5. Ответ: $S=\dfrac{p^2}{4}-1$.

Заметим, во-первых, что, если точки (m,m^2) и (n,n^2) принадлежат параболе $y=x^2$, то уравнение прямой, проходящей через них, имеет вид $y=(m+n)x-mn$. Действительно, легко видно, что координаты каждой из точек удовлетворяют этому линейному уравнению, следовательно, вся прямая задаётся этим уравнением.

Обозначим координаты точек из условия: $A(-a,a^2)$, $C(a,a^2)$, $B(b,b^2)$, $D(d,d^2)$ (мы учли, что $AC\parallel Ox$ по условию, так что точки A и C симметричны относительно Oy).



Уравнение прямой AD имеет вид $y=(d-a)x+da$. С другой стороны, по условию $\angle DAC=45^\circ$, так что угловой коэффициент этой прямой равен 1, т. е. $d-a=1$. Аналогично, уравнение прямой AB имеет вид $y=(b-a)x+ba$, а её угловой коэффициент равен -1, поэтому $b-a=-1$. На координатной плоскости отметим точки $B_1(d,b^2)$ и $C_1(d,c^2)$ (см. рис.). Из прямоугольного треугольника BB_1D получаем равенство $p^2=(d-b)^2+(d^2-b^2)^2$. Так как $d-b=2$, а $d+b=2a$, то $p^2=4+16a^2$, откуда $a^2=\frac{1}{16}(p^2-4)$.

Искомая площадь равна $S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ADC}$. У треугольников ABC и ADC (см. рис.) общее основание $AC=2a$, а сумма длин высот равна $C_1B_1+C_1D=DB_1=4a$. Следовательно, $S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 4a=\frac{1}{4}(p^2-4)$.

9.6. Обозначим $M(n,m)=\left|n\sqrt{n^2+1}-m\right|$. Воспользовавшись очевидным двойным неравенством

$$n^2<n\sqrt{n^2+1}<n^2+\frac{1}{2}\,,$$

получаем

$$n^2-m<n\sqrt{n^2+1}-m<n^2-m+\frac{1}{2}\,.$$

Следовательно, если $m\neq n^2$, то $M(n,m)>1/2$. Так как $1/2>\sqrt{2}-1$, то при $m\neq n^2$ нужное неравенство доказано.

Пусть $m=n^2$. Рассмотрим функцию $f(n)=M(n,n^2)=n\sqrt{n^2+1}-n^2$. Покажем, что она является является возрастающей при $n>0$. Действительно, для любых чисел $a>b>0$ разность $f(a)-f(b)$ преобразовывается как:

$$(a\sqrt{a^2+1}-a^2)-(b\sqrt{b^2+1}-b^2)=(a\sqrt{a^2+1}-b\sqrt{b^2+1})-(a^2-b^2)=$$

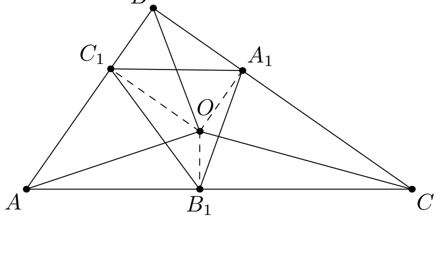
$$=\frac{a^2(a^2+1)-b^2(b^2+1)}{a\sqrt{a^2+1}+b\sqrt{b^2+1}}-(a^2-b^2)=(a^2-b^2)\Big(\frac{a^2+b^2+1}{a\sqrt{a^2+1}+b\sqrt{b^2+1}}-1\Big). \qquad (1)$$

Как уже отмечалось, $a^2+\frac{1}{2}>a\sqrt{a^2+1}$ и $b^2+\frac{1}{2}>b\sqrt{b^2+1}$. Сложив эти неравенства, получим, что второй множитель последнего выражения в (1) положителен, а значит, $f(a)-f(b)>0$.

Поэтому наименьшее значение функции $f(n)$ достигается при $n=1$ и равно $\sqrt{2}-1$.

9.7. $\angle B=90^\circ$.

Пусть A_1, B_1 и C_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны BC, CA и AB соответственно. Так как $\angle OA_1B=90^\circ=\angle OC_1B$, то четырёхугольник BA_1OC_1 вписан в окружность, диаметр которой — отрезок OB. Поэтому по теореме синусов для треугольника A_1BC_1 имеем $A_1C_1=OB\sin\angle B$. Аналогично, $A_1B_1=OC\sin\angle C$, $B_1C_1=OA\sin\angle A$.



Поскольку треугольник $A_1B_1C_1$ является равносторонним, получаем равенства

$$\frac{\sin\angle B}{\sin\angle C} = \frac{OC}{OB} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}, \quad \frac{\sin\angle B}{\sin\angle A} = \frac{OA}{OB} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}. \tag{1}$$

Кроме того, из теоремы синусов для треугольника ABC получаем $AB/\sin\angle C = BC/\sin\angle A = AC/\sin\angle B$. Поэтому

$$AB = AC\frac{\sin\angle C}{\sin\angle B} = \frac{3}{5}AC, \quad BC = AC\frac{\sin\angle A}{\sin\angle B} = \frac{4}{5}AC.$$

Нетрудно заметить, что $AB^2 + BC^2 = \dfrac{9}{25}AC^2 + \dfrac{16}{25}AC^2 = AC^2$, и, следовательно, треугольник ABC прямоугольный с прямым углом B.

9.8. Ответ: $k = n + 1$.

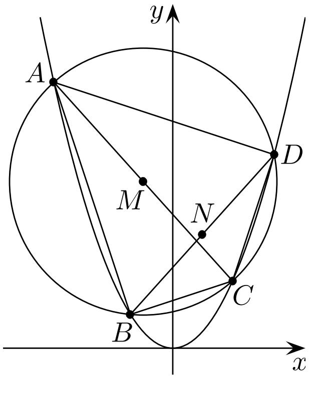
Всего существует $2^{k-1} - 1$ разбиений строк на две группы и $2^n - 1$ способов выбрать некоторый набор столбцов. Так как для любого разбиения строк существует хотя бы один набор столбцов и набор столбцов однозначно определяет разбиение строк, то $2^{k-1} - 1 \leqslant 2^n - 1$, и, следовательно, $k \leqslant n + 1$. Докажем, что для любого n существует хорошая таблица $(n+1) \times n$.

Рассмотрим таблицу в которой в i-ой строке сначала стоит $i-1$ единица, а далее все нули (в частности, в первой строке стоят только нули). Заметим, что для любых двух подряд идущих строк a_i и $a_i + 1$ чётность количества единиц в пересечении с набором столбцов у этих двух строк совпадает тогда и только тогда, когда в этом наборе столбцов нету i-го. Значит, наличие или отсутствие i-го столбца в наборе однозначно определяет в одну или разные группы попадут a_i и $a_i + 1$. Пусть задано некоторое разбиение строк. Выберем те и только те столбцы, для которых строка с тем же номером находится в разных группах со следующей за ней строкой. Полученный набор столбцов удовлетворяет условию, следовательно, указанная таблица является хорошей.

10 класс

10.5. Ответ: 1.

Пусть абсциссы данных точек A, B, C, D равны a, b, c, d соответственно.



Так как AC — диаметр данной в условии окружности, то точка M — её центр. Если (p, q) — координаты точки M, то уравнение окружности имеет вид $(x-p)^2 + (y-q)^2 = R^2$, где R — радиус окружности. Пара координат $(x; y)$ любой из точек A, B, C, D является решением системы уравнений

$$\begin{cases}(x-p)^2 + (y-q)^2 = R^2,\\ y = x^2,\end{cases}$$

следовательно, абсциссы a, b, c, d этих точек являются решениями уравнения $(x-p)^2 + (x^2-q)^2 - R^2 = 0$, т. е. уравнения

$x^4+(1-2q)x^2-2px+p^2+q^2-R^2=0$. В левой части последнего равенства стоит многочлен со старшим коэффициентом 1, корни которого равны a, b, c, d. Тогда

$$\begin{gathered}x^4+(1-2q)x^2-2px+p^2+q^2-R^2=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=\\=x^4-(a+b+c+d)x^3+(ab+bc+cd+ac+ad+bd)x^2-\\-(abc+bcd+cda+dab)x+abdc.\end{gathered}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему равенств

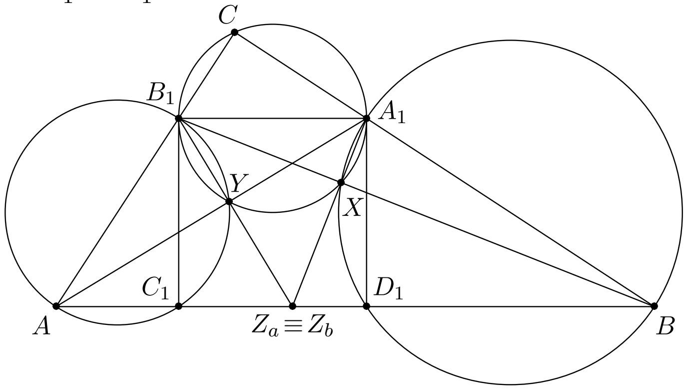
$$a+b+c+d=0; \tag{1}$$
$$ab+bc+cd+ad+ad+bd=1-2q; \tag{2}$$
$$abc+bcd+cda+dab=2p; \tag{3}$$
$$abcd=p^2+q^2-R^2. \tag{4}$$

Так как M — середина отрезка AC, то $2p=a+c$, и, ввиду (1), $b+d=-2p$. Далее, из (3) имеем

$$2p=(abc+acd)+(dab+bcd)=ac(b+d)+bd(a+c)=2p(bd-ac),$$

откуда или $p=0$, или $bd-ac=1$. Если $p=0$, то $a=-c$ и $b=-d$, а значит, точки A и B симметричны соответственно точкам C и D относительно оси Oy. Поэтому четырёхугольник $ABCD$ является самопересекающимся, что противоречит условию задачи. Таким образом, $bd-ac=1$. Перепишем (1) в виде $a+c=-(b+d)$. Отсюда $(a+c)^2=(b+d)^2$, или $a^2+2ac+c^2=b^2+d^2+2bd$, или, учитывая, что $2bd=2ac+2$, имеем $a^2+c^2=b^2+d^2+2$, т.е. $\dfrac{a^2+c^2}{2}=\dfrac{b^2+d^2}{2}+1$, или $\dfrac{a^2+c^2}{2}-\dfrac{b^2+d^2}{2}=1$. Осталось заметить, что $\dfrac{a^2+c^2}{2}$ и $\dfrac{b^2+d^2}{2}$ — ординаты точек M и N, поэтому проекция отрезка MN на ось Oy равна 1.

10.6. Так как AB_1 и B_1A_1 являются диаметрами окружностей, описанных около треугольников AC_1B_1 и A_1CB_1, соответственно, то $\angle AYB_1=\angle A_1YB_1=90^\circ$. Следовательно, точка Y лежит на прямой AA_1 и $AA_1\perp B_1Y$. Аналогично, X лежит на прямой BB_1 и $BB_1\perp A_1X$.



Через Z_b и Z_a обозначим, соответственно, точки пересечения прямых B_1Y и A_1X с гипотенузой AB. Пусть $CB=a$, $AC=b$, $AB=c$ и $A_1B_1=x$. Найдя длины отрезков BZ_a и AZ_b, докажем равенство $AZ_b+Z_aB=AB$, из которого следует утверждение задачи.

Так как $\angle B_1XZ_a = \angle B_1C_1Z_a = 90^\circ$, то четырёхугольник $B_1C_1Z_aX$ вписан. Из условия задачи следует, что четырёхугольник CA_1XB_1 также вписан, поэтому

$$BA_1 \cdot CB = BX \cdot BB_1 = BZ_a \cdot BC_1. \qquad (*)$$

Треугольник A_1BD_1 подобен треугольнику ABC, а значит, справедливы равенства

$$\frac{A_1B}{AB} = \frac{D_1B}{CB} = \frac{A_1D_1}{AC}.$$

Поэтому, $A_1B = \dfrac{cx}{b}$, $D_1B = \dfrac{ax}{b}$ и $BC_1 = x + \dfrac{ax}{b} = \dfrac{(a+b)x}{b}$. Из $(*)$ следует, что $BZ_a = \dfrac{ac}{a+b}$. Аналогичным образом доказывается равенство $AZ_b = \dfrac{bc}{a+b}$, а значит, $AZ_b + BZ_a = AB$.

10.7. Ответ: все нечётные числа.

При $n = 1$ существует решение $3\cdot 27^2 - 13^2 = 2018^1$. Для произвольного нечётного $n = 2k+1$ из этого равенства получается равенство $3 \cdot (27 \cdot 2018^k)^2 - (13 \cdot 2018^k)^2 = 2018^{2k+1}$, означающее, что все нечётные n удовлетворяют условию задачи.

Если же число n чётное, то $2018^n \equiv 2^n \equiv 1 \pmod 3$. Но левая часть не может давать остаток 1 при делении на 3, так как квадраты натуральных чисел дают остатки только 0 и 1 при делении на 3. Значит, все чётные числа n не удовлетворяют условию задачи.

10.8. Ответ: при нечётных n победит первый игрок, а при чётных — второй.

Пусть n чётно. Опишем выигрышную стратегию второго игрока. Рассмотрим первый ход первого игрока.

Случай ч1. Первый игрок первым ходом соединил некоторую точку с центром.

Второй игрок соединяет с центром диаметрально противоположную точку. После этого второму игроку для победы достаточно делать ходы симметрично относительного полученного диаметра. При этом, поскольку картина симметрична относительно диаметра, то после хода второго игрока всегда остаётся нечётное число компонент связности. Значит, своим ходом первый игрок не может добиться победы, объединив последние две компоненты связности.

Случай ч2. Первый игрок первым ходом соединил две соседние отмеченные точки.

Второй игрок каждый раз проводит отрезок, симметричный относительно центра окружности отрезку, проведённому первым игроком. Тогда после каждого хода второго игрока число компонент связности нечётно, причём они разбиваются на пары симметричных и ещё одну компоненту, симметричную самой себе. Такие ходы он делает до тех пор, пока у первого не появится возможность выиграть в один ход. Обозначим последний проведённый отрезок первым игроком через x, симметричный ему через x^*, а отрезок, проведя который первый выиграл бы, если бы второй провёл x^* — через z. Заметим, что можно не рассматривать случай, когда ход x соединяет точку на окружности с центром, так как, аналогично ч1. после хода x^* останется нечётное число компонент связности и ход z не может быть выигрышным.

Рассмотрим компоненты связности, которые есть перед проведением отрезка x. Очевидно, что отрезок x соединяет какие-то две различные из них, пусть A и B, а отрезок x^* соединяет симметричные им компоненты A^* и B^*. Рассмотрим центр окружности.

Предположим, что он входит в одну из компонент A или B. Не ограничивая общности, пусть в A. Тогда он также входит и в компоненту A^*, следовательно, эти компоненты совпадают. Это означает, то компонента $A = A^*$ центрально-симметричная и содержит центр окружности. Получаем, что после хода x^* количество компонент связности нечётно, как и перед ходом x. Следовательно, ход z не может быть победным и мы приходим к противоречию.

Предположим теперь, что центр не входит ни в одну из компонент A и B. Есть ещё как минимум одна компонента связности C, в которую входит центр окружности. Для того, чтобы ход z был победным необходимо, чтобы он соединял компоненту связности C с компонентой связности, которая получилась после ходов x и x^*. Так как после симметричных ходов x и x^* получилась общая компонента связности, не содержащая центр, то $B = A^*$, $A = B^*$ и ход x^* не добавил ни одной компоненты. Следовательно, для победы второму игроку достаточно провести отрезок z вместо x^*.

Пусть n нечётно. Докажем по индукции, что первый игрок всегда может выиграть, если первым ходом соединит произвольную точку с центром окружности. База индукции $n = 3$ очевидна.

Пусть мы уже доказали утверждение индукции для всех нечётных n от 3 до $2k-1$, докажем его для $n = 2k+1$. Занумеруем вершины n-угольника в порядке следования на окружности: $A_0, A_1, \ldots, A_{2k+1}$. Пусть, не ограничивая общности, первый игрок первым своим ходом соединит A_0 с центром окружности. Рассмотрим, какие точки мог соединить второй игрок:

Соединил две вершины, отличные от A_0. Пусть это A_{i-1} и A_i, где $2 \leqslant i \leqslant k+1$. Первый игрок соединяет A_i с A_{i+1}, после чего игра сводится к случаю $n = 2k-1$. А именно, можно считать вершины A_{i-1}, A_i, A_{i+1} одной вершиной, которая соединяется с одним соседом через A_{i-1}, с другим соседом через A_{i+1}, с центром через A_i, и, кроме того, у неё есть ещё два соединения с центром окружности, которые не играют никакой роли. Первый игрок проводит оставшееся соединение, если только что это сделал второй игрок — такая пара ходов не влияет на игру.

Соседнюю вершину соединил с A_0. Пусть это A_1. Первый игрок соединяет A_0 с A_{2k+1}, после чего игра сводится к случаю $n = 2k-1$. А именно, можно считать вершины A_{2k+1}, A_0, A_1 одной вершиной, аналогично предыдущему случаю. Единственное различие — первый игрок считает, что именно эту "тройную" вершину он соединил с центром первым ходом.

Вершину, смежную с A_0 соединил с центром. Пусть это A_1. Первый игрок соединяет A_{2k+1} с центром, после чего игра сводится к случаю $n = 2k-1$. А именно, можно считать вершины A_{2k+1}, A_0, A_1 одной вершиной, аналогично предыдущему случаю. Единственное различие — вместо дополнительной пары соединений с центром у точек A_1 и A_{2k+1} есть дополнительная пара соединений с A_0.

Вершину, не смежную с A_0 соединил с центром. Пусть эта вершина A_{2i}, если её номер нечётный, то пронумеруем вершины в противоположном направлении обхода окружности. Первый игрок соединит A_i с центром, после чего, задача сведётся к случаю $n = 2k-2i+1$ с небольшими оговорками. А именно, первый игрок будет считать, что все вершины от A_0 до A_{2i} одной вершиной, изначально соединённой с центром окружности. При этом, если второй игрок будет проводить отрезок внутри одного из секторов OA_0A_i и OA_iA_{2i}, то первый будет проводить симметричный ему отрезок относительно OA_i, где O — центр окружности.

В каждом из случаев ирга свелась к нечётной с меньшим числом вершин, следовательно, по предположению индукции, при нечётном $n \geqslant 3$ первый игрок может гарантировать себе победу.

11 класс

11.5. Пусть абсциссы точек A, B, C, D, F и G равны a, b, c, d, f и g, соответственно. Если $O_1(\alpha;\beta)$ — центр окружности S_1, то координаты точек A, B, C и D удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2,\\ y=\dfrac{1}{x}.\end{cases}$$

Исключая y, получаем уравнение

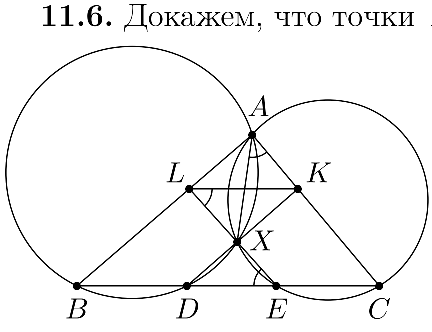
$$x^4-2\alpha x^3+(\alpha^2+\beta^2-R^2)x^2-2\beta x+1=0,$$

решениями которого являются числа a, b, c и d. Отсюда, в частности, $a+b+c+d=2\alpha$ и $abcd=1$. Аналогично, если $O_2(\lambda,\mu)$ — центр окружности S_2, то $a+b+f+g=2\lambda$ и $abfg=1$. Так как радиусы окружностей S_1 и S_2 равны, то AO_1BO_2 — ромб, и тогда середины отрезков AB и O_1O_2 совпадают, а значит, $\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{\alpha+\lambda}{2}$, или $a+b=\alpha+\lambda$. Следовательно,

$$\begin{gathered}2\alpha+2\lambda=(a+b+c+d)+(a+b+f+g)=\\ =2(a+b)+c+d+f+g=2\alpha+2\lambda+c+d+f+g,\end{gathered}$$

откуда $f+g=-(c+d)$. Кроме того, $cd=fg=(ab)^{-1}$. По-другому это можно записать как $f+g=(-c)+(-d)$ и $f\cdot g=(-c)\cdot(-d)$. Имеем пары чисел (f,g) и $(-c,-d)$, для которых равны суммы и равны произведения. Поэтому либо $f=-c$ и $g=-d$, либо $f=-d$ и $g=-c$. Если, скажем, $f=-c$ и $g=-d$, то пары точек F, C и G, D симметричны относительно начала координат, т. е. $FGCD$ — параллелограмм с центром в начале координат.

11.6. Докажем, что точки A, L, X и K лежат на одной окружности. Действительно, так как четырёхугольник $ABDX$ вписанный, то $\angle AXK=\angle ABC$. Аналогично доказывается равенство $\angle LXA=\angle BCA$. Следовательно, $\angle KAL+\angle LXK=\angle CAB+\angle ABC+\angle BCA=180°$, а значит, четырёхугольник $ALXK$ вписан. Поэтому, $\angle KLX=\angle KAX$. Так как точки A, X, E и C лежат на одной окружности, то $\angle DEX=\angle CAX$. Следовательно, $\angle KLX=\angle DEX$, т. е. $LK \parallel BC$.



11.7. Решение задачи п. **а)** почти очевидно, причём её утверждение справедливо для любых $b\in\mathbb{Q}$ и $a\in\mathbb{N}$. Действительно, если выполнено равенство $n\sqrt{n^2+a}=$

bm, то, поскольку $b \in \mathbb{Q}$, число $\sqrt{n^2+a}$ должно быть рациональным, а значит, целым. Поэтому $n^2+a=k^2$ для некоторого натурального k. Но поскольку разности между соседними квадратами натуральных чисел возрастают к бесконечности, то может существовать только конечное число пар (n,k) натуральных n и k, для которых при заданном натуральном a выполняется равенство $n^2-k^2=a$.

Утверждение п. **а)** задачи мы получим также и при решении её п. **б)**.

б) Пусть $b = p/q$ — несократимое представление дроби b и, согласно условию, a и q — нечётные числа. Обозначим через I_n множество натуральных чисел, принадлежащих отрезку $[qn^2, qn^2+aq/2]$, т. е., так как a и q — нечётные числа, то $I_n = \{qn^2+i : i = \overline{0,(aq-1)/2}\}$. Пусть также $P = \{(n,m) : n \in \mathbb{N}, pm \in I_n\}$. Подставив в выражение для $M(n,m)$ значение $b = p/q$, получим $M(n,m) = q^{-1}\left|qn\sqrt{n^2+a} - pm\right|$.

Из очевидного двойного неравенства

$$n^2 < n\sqrt{n^2+a} < n^2 + a/2 \qquad (*)$$

следует, что $qn^2 < qn\sqrt{n^2+a} < qn^2 + (aq)/2$, а значит, если натуральное число mp не принадлежит множеству I_n, то $M(n,m) \geqslant q^{-1}(1-\{aq/2\}) = 1/(2q)$ (здесь $\{\cdot\}$ – дробная часть числа, и поскольку aq нечётно, $\{aq/2\} = 1/2$). Поэтому

$$\inf\{M(n,m) : (n,m) \notin P\} \geqslant 1/(2q), \qquad (**)$$

а нули функции $M(n,m)$ могут принадлежать только точкам множества P.

Оценим снизу величину $M(n,m)$ при $(n,m) \in P$ для всех достаточно больших n. Пусть $(n,m) \in P$, тогда $pm = qn^2 + i$, где $i \in \{0,1,\ldots,(aq-1)/2\}$. Тогда при таких n и m получаем

$$M(n,m) = q^{-1}\left|qn\sqrt{n^2+a} - qn^2 - i\right| = \frac{(q^2a - 2qi)n^2 - i^2}{q(qn\sqrt{n^2+a} + qn^2 + i)}.$$

Поскольку у получившейся дроби числитель наименьший, а знаменатель наибольший при наибольшем возможном значении i, т. е. при $i = (aq-1)/2$, то, подставляя в них это значение i и учитывая правое неравенство $(*)$, получаем, что

$$M(n,m) \geqslant \frac{n^2 - (aq-1)^2/4}{2q^2n^2 + aq^2 - q/2} \to \frac{1}{2q^2} \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

а значит, найдётся такое n_0, что $M(n,m) > 1/(4q^2)$ при всех $n \geqslant n_0$ и $(n,m) \in P$. В частности, в силу неравенства $(**)$ это означает, что нули функции $M(n,m)$ могут принадлежать только конечному множеству $P_0 = \{(n,m) \in P : n \geqslant n_0\}$. Значит, нулей у функции $M((n,m)$ конечное число. Выберем из ненулевых значений функции $M(n,m)$ на множестве P_0 наименьшее (обозначим его C_0). Тогда в качестве постоянной C можно взять $C = \min\{C_0, 1/(4q^2)\}$. Утверждение п. **б)** доказано.

Замечание. Несложно привести примеры, показывающие, что предположения п. **б)** задачи существенны для справедливости её утверждения.

11.8. Ответ: при нечётных n победит первый игрок, а при чётных — второй.

Пусть n чётно. Опишем выигрышную стратегию второго игрока. Вначале, аналогично решению ч1. задачи 10 класса, заметим, что можно считать, что первый игрок своим первым ходом соединил две соседние вершины P и Q. Второй игрок своим первым ходом соединяет одну из них с соседней вершиной R. После этого, второй игрок играет в игру для $n-2$ вершин, считая, что вершины P, Q и R "слиплись" в одну.

Осталось проверить, что при $n=4$ второй игрок выигрывает. Первый игрок, без ограничения общности, соединил вершины A_0A_1. Второй игрок своим первым ходом соединит A_2 с центром окружности. После этого останутся три связных компоненты A_0A_1, OA_2 и A_3. Первый игрок своим ходом обязательно свяжет какие-то две из них, после чего второй игрок выиграет.

Пусть n нечётно. Решение задачи аналогично решению задачи 10 класса, поскольку первый игрок сразу задействует центр окружности.

Замечание 1. Условие, наложенное на центр не играет никакой роли, т. к. в обоих случаях он в итоге соединён с вершиной. Однако, оно, усложняет решение с использованием симметрии.

Замечание 2. Чётный случай задачи 10 класса также можно сделать по индукции. Тем не менее, в приведённом решении дан конкретный алгоритм действий.