

**8.1.** На доске записано натуральное число. Пете разрешено заменять имеющееся на доске число на сумму квадратов его цифр. Число назовем *интересным*, если из него за конечное число таких операций Петя не сможет получить единицу.

Докажите, что существует бесконечно много интересных натуральных чисел.

**Решение.** Докажем сначала, что интересные числа существуют. Рассмотрим цикл

$$4 \longrightarrow 16 \longrightarrow 37 \longrightarrow 58 \longrightarrow 89 \longrightarrow 145 \longrightarrow 42 \longrightarrow 20 \longrightarrow 4$$

Каждое следующее число в этом цикле получается из предыдущего описанной в условии операцией. Поэтому, начав с любого из чисел этого цикла, Петя никогда не получит 1. Значит, все числа в этом цикле интересные.

Заметим, что для любого интересного числа  $x$  число  $P(x)$ , состоящее из  $x$  единиц в десятичной записи, тоже является интересным, так как первое же число, которое Петя запишет на доске, будет равно  $x$ . При этом  $P(x) > x$  для любого  $x > 1$ . Поэтому для любого интересного числа  $x$  существует интересное число, большее него, откуда и следует требуемое.

По-другому, имея приведённый выше цикл, доказать существование бесконечного количества интересных чисел можно так. Добавим к произвольному числу этого цикла любое количество нулей, лишь бы никакой из них не стоял на первом месте. Например, к числу 16 так:  $1 \underbrace{0 \dots 0}_{n \text{ нулей}} 6$ .

Можно приписать нули ещё и справа. Очевидно, что каждое такое число является интересным.

**8.2.** Целые числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  удовлетворяют равенству  $a + b + c = 0$ . Обозначим  $S = ab + bc + ca$ ,  $A = a^2 + a + 1$ ,  $B = b^2 + b + 1$  и  $C = c^2 + c + 1$ .

Докажите, что число  $(S + A)(S + B)(S + C)$  является квадратом целого числа.

**Решение.** Из равенства  $a + b + c = 0$  следует, что  $b + c = -a$ , поэтому  $S + A = bc + a(b + c) + A = bc - a^2 + a^2 + a + 1 = bc - (b + c) + 1 = (b - 1)(c - 1)$ .

Аналогично, что  $S + B = (c - 1)(a - 1)$  и  $S + C = (a - 1)(b - 1)$ . Значит,

$$(S + A)(S + B)(S + C) = ((a - 1)(b - 1)(c - 1))^2,$$

действительно, является квадратом целого числа  $(a - 1)(b - 1)(c - 1)$ .

**8.3.** Внутри квадрата  $ABCD$  отметили точку  $P$ , а на его сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  отметили точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  соответственно. Прямые  $KP$ ,  $LP$ ,  $MP$  и  $NP$  пересекают стороны  $CD$ ,  $DA$ ,  $AB$  и  $BC$  в точках  $K_1$ ,  $L_1$ ,  $M_1$  и  $N_1$  соответственно. Оказалось, что

$$\frac{KP}{PK_1} + \frac{LP}{PL_1} + \frac{MP}{PM_1} + \frac{NP}{PN_1} = 4.$$

Докажите, что  $KP + LP + MP + NP = K_1P + L_1P + M_1P + N_1P$ .

**Решение.** Так как стороны  $AB$  и  $CD$  квадрата параллельны, то равны накрест лежащие углы:  $\angle PKM_1 = \angle PK_1M$  и  $\angle PM_1K = \angle PMK_1$ . Следовательно, треугольники  $PKM_1$  и  $PK_1M$  подобны и равны отношения  $KP : K_1P = M_1P : MP$ . Обозначим  $KP : K_1P = k$ , тогда полученное равенство равносильно  $MP : PM_1 = 1/k$ . Аналогично для  $LP : PL_1 = \ell$  верно равенство  $NP : PN_1 = 1/\ell$ . Таким образом, данное в задаче равенство равносильно равенству  $k + 1/k + \ell + 1/\ell = 4$ , которое можно преобразовать к виду

$$0 = k + \frac{1}{k} - 2 + \ell + \frac{1}{\ell} - 2 = \frac{k^2 + 1 - 2k}{k} + \frac{\ell^2 + 1 - 2\ell}{\ell} = \frac{(k-1)^2}{k} + \frac{(\ell-1)^2}{\ell}.$$

Это равенство выполняется, если и только если  $k = \ell = 1$ , а это означает, что

$$KP = K_1P, \quad LP = L_1P, \quad MP = M_1P \quad \text{и} \quad NP = N_1P$$

(и, в частности, что  $P$  — центр квадрата  $ABCD$ ). Из полученных равенств очевидно следует требуемое.

**8.4.** Дана клетчатая доска размера  $3 \times 2021$ , все клетки которой покрашены в белый цвет. Два игрока по очереди перекрашивают в чёрный цвет две не обязательно соседние белые клетки, расположенные либо в одной строке, либо в одном столбце. Игрок, который не может сделать ход, проигрывает.

Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш вне зависимости от игры соперника?

**Ответ:** первый игрок.

Так как за один ход перекрашиваются две клетки, а общее количество клеток доски нечётно, то в конце игры останется нечётное количество белых клеток. Очевидно, что в конце игры в каждой строке останется не более одной белой клетки, поэтому на всей доске останутся одна или три белые клетки. При этом, если осталась ровно одна белая клетка, то общее количество сделанных ходов будет равно  $3031$ , значит, первый игрок сделал последний ход и выиграл. А если на доске остались три белые клетки, то победил второй игрок. Но это может быть только, если в каждой строке осталось по одной белой клетке. Таким образом, чтобы победить, первому игроку достаточно полностью перекрасить одну из строк.

Покажем, как следует действовать первому игроку, чтобы обеспечить себе победу. Для этого первый игрок будет стремиться закрасить первую строку доски (строки доски нумеруются сверху вниз).

Первым ходом первый игрок закрашивает одну клетку 1-ой строки и одну клетку 2-ой строки, расположенные в одном столбце. Далее, он отвечает на ходы 2-ого игрока следующим образом:

1) Если второй игрок закрашивает две клетки не из 1-ой строки, то первый игрок закрашивает две клетки 1-ой строки, причём так, чтобы закрашенные им клетки находились в тех же столбцах, что и закрашенные вторым игроком (если это возможно; если же клетка в 1-ой строке нужного столбца закрашена, то первый игрок закрашивает какую-либо клетку 1-ой строки).

2) Если второй игрок закрашивает одну клетку 1-ой строки и одну клетку не 1-ой строки, первый игрок закрашивает одну клетку 1-ой строки и одну клетку не 1-ой строки.

3) Если второй игрок закрашивает две клетки 1-ой строки, то и первый игрок закрашивает две клетки 1-ой строки (если на текущий момент ещё не все клетки закрашены)

Таким образом, если первый игрок будет придерживаться указанной стратегии, после каждого его хода в первой строке будет оставаться чётное число белых клеток, а значит, на каком-то ходу все клетки 1-ой будут закрашены.

Остаётся показать, что описанная выше стратегия осуществима. Очевидно, что ходы 1) и 3) всегда возможны (если только уже все клетки 1-ой строки не закрашены). Покажем, что и ход 2) также осуществим. Действительно, благодаря тому, что на ходу 1) первый игрок закрашивает клетки 1-ой строки в тех же столбцах, в которых перед этим закрасил клетки второй игрок (если это возможно), то после каждого хода первого игрока, если в столбце имеется закрашенная клетка, то в нём закрашена и клетка из 1-ой строки (если второй игрок закрашивая клетки в столбце, не закрасил его клетку в 1-ом строке, то это сделает на следующем ходу 1) первый игрок). Следовательно, если в 1-ой строке имеется не закрашенная клетка, то обе клетки этого столбца, расположенные во 2-й и 3-ей строках, также не закрашены. Поэтому ход 2) сделать можно.

**9.1.** Дан равнобедренный треугольник  $ABC$  с основанием  $BC$ . На сторонах  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$  отмечены точки  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  соответственно так, что треугольники  $ABC$  и  $YXZ$  подобны. Точка  $W$  симметрична точке  $X$  относительно середины стороны  $BC$ .

Докажите, что точки  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  и  $W$  лежат на одной окружности.

**Решение.** Обозначим через  $O$  центр описанной окружности треугольника  $XYZ$ . Тогда

$$\angle YOZ = 2\angle YXZ = 2\angle ABC = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \angle ZAY,$$

значит, четырёхугольник  $ZAYO$  вписан в окружность. Равные хорды  $OY$  и  $OZ$  стягивают в этой окружности равные углы  $\angle ZAO = \angle OAY$ . Таким образом,  $O$  лежит на биссектрисе угла  $BAC$ , которая является серединным перпендикуляром к отрезку  $XW$ , поэтому,  $OW = OX = OY = OZ$ , откуда следует требуемое.

**9.2.** Докажите неравенство:

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{2022!} > \frac{1^2}{2!} + \frac{2^2}{3!} + \frac{3^2}{4!} + \dots + \frac{2022^2}{2023!}.$$

**Решение.** Докажем неравенство  $\sum_{n=1}^{2022} \frac{n^2}{(n+1)!} - \sum_{n=1}^{2022} \frac{1}{n!} < 0$ , которое равносильно требуемому. Заметим, что

$$\frac{n^2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{n(n+1) - 2(n+1) + 1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{2}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}.$$

С учётом этого тождества, сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2022} \frac{n^2}{(n+1)!} - \sum_{n=1}^{2022} \frac{1}{n!} &= \sum_{n=0}^{2021} \frac{1}{n!} - 2 \sum_{n=1}^{2022} \frac{1}{n!} + \sum_{n=2}^{2023} \frac{1}{n!} = \\ &= \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2022!} + \frac{1}{2023!} = \frac{1}{2023!} - \frac{1}{2022!} < 0. \end{aligned}$$

**9.3.** Натуральные числа  $a$  и  $b$  удовлетворяют равенству  $a + \tau(a) = b^2 + 2$ , где через  $\tau(n)$  обозначено количество всех натуральных делителей числа  $n$ , включая 1 и само число  $n$ .

Докажите, то число  $a + b$  чётно.

**Решение.** Предположим, что  $a$  является квадратом некоторого натурального числа  $c \geq 2$ . Тогда  $b^2 = c^2 + \tau(c^2) - 2 \geq c^2 + 3 - 2 > c^2$ , поэтому

$$c^2 + \tau(c^2) - 2 = b^2 \geq (c + 1)^2 = c^2 + 2c + 1,$$

а значит,  $\tau(c^2) > 2c$ . Все делители числа  $c^2$ , кроме  $c$ , разбиваются на пары вида  $(d, c^2/d)$ , где  $d < c$  и  $c^2/d > c$ , поэтому  $\tau(c^2) \leq 1 + 2(c - 1) = 2c - 1$ , что противоречит полученному ранее неравенству  $\tau(c^2) > 2c$ . Заметим также, что при  $a = 1$  число  $b$  равно нулю, что невозможно.

Таким образом,  $a$  не является полным квадратом. Тогда все натуральные делители  $a$  можно разбить на пары вида  $(d, a/d)$ , а значит  $\tau(a)$  — чётное число. Из равенства  $a + \tau(a) = b^2 + 2$  заключаем, что числа  $a$  и  $b$  имеют одну чётность, поэтому  $a + b$  чётно.

Хотя для решения это не нужно, отметим, что числа, удовлетворяющие равенству из условия задачи, существуют. Например,  $a = 14$ ,  $b = 4$  или  $a = 45$ ,  $b = 7$ . Действительно, для первой пары имеем:

$$a + \tau(a) = 14 + \tau(14) = 14 + 4 = 18 = 4^2 + 2 = b^2 + 2.$$

Для второй пары получаем:

$$a + \tau(a) = 45 + \tau(45) = 45 + 6 = 51 = 7^2 + 2 = b^2 + 2.$$

**9.4.** На доске записаны числа  $1, 2, \dots, 50$ . Аня проделывает следующие действия: стирает с доски любые два числа  $a$  и  $b$ , записывает на доску вместо них одно число — их сумму  $a + b$ , после чего выписывает себе в блокнот число  $ab(a + b)$ . Когда после 49 таких действий на доске осталось ровно одно число, Аня нашла сумму  $S$  всех 49 чисел, выписанных в блокнот.

а) Докажите, что  $S$  не зависит от порядка действий Ани.

б) Вычислите  $S$ .

**Ответ:** б)  $425 \cdot 1274 \cdot 1275 = 690348750$ .

Проследим, как в результате действий Ани изменяется сумма кубов чисел, записанных на доске. Из тождества  $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$  следует, что после каждого Аниного подхода к доске сумма кубов всех чисел, записанных на доске, увеличивается на утроенное число, которое Аня при этом записала в блокнот. Поэтому сумма всех чисел, выписанных в блокнот, равна разности между кубом последнего оставшегося на доске числа и суммой кубов всех чисел, записанных на доске изначально. Число, которое останется на доске, равно сумме всех чисел, записанных на ней первоначально, значит,

$$3S = (1 + 2 + \dots + 50)^3 - (1^3 + 2^3 + \dots + 50^3).$$

Воспользуемся известным тождеством

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 = \left( \frac{n(n + 1)}{2} \right)^2,$$

которое нетрудно доказать по индукции. Поскольку  $\frac{50 \cdot 51}{2} = 1275$ , то

$$3S = 1275^3 - 1275^2 = 1275^2 \cdot 1274 = 3 \cdot 425 \cdot 1274 \cdot 1275.$$

Значит, число  $S$  равно  $425 \cdot 1274 \cdot 1275 = 690348750$ .

**10.1.** Докажите, что для любого натурального числа все его натуральные делители можно расположить по кругу так, чтобы среди любых двух соседних делителей один делился на другой.

**Решение.** Докажем это утверждение методом математической индукции по количеству различных простых делителей данного числа. При этом данное число будем обозначать через  $n$ , количество его делителей — через  $d(n)$ , а делители, записанные в порядке обхода против часовой стрелки, — через  $a_1, a_2, \dots, a_{d(n)}$ , причём  $a_1 = 1$ .

*База индукции:* пусть  $n = p^k$ , где  $p$  — простое число. Расставим все делители числа  $n$  в порядке возрастания:  $a_1 = 1, a_2 = p, \dots, a_{k+1} = p^k$ . Очевидно, что такая расстановка удовлетворяет условию.

*Шаг индукции:* пусть утверждение доказано для всех чисел, имеющих не более  $s$  различных простых делителей, докажем его для произвольного числа  $n$ , имеющего  $s + 1$  простой делитель. Запишем  $n$  в виде  $n = p^k m$ , где  $p$  — простое число, не делящее  $m$ .

Если  $\ell$  — последовательность чисел, записанных по кругу по ходу часовой стрелки, то через  $\ell^*$  будем обозначать эту же последовательность, но записанную в обратном порядке, т. е. если  $\ell$  — это  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , то  $\ell^*$  — это  $a_k, \dots, a_2, a_1$ . Кроме того, если  $q$  — число, то через  $q\ell$  будем обозначать последовательность, получающуюся из  $\ell$  умножением всех её членов на  $q$ , т. е.  $q\ell$  — это  $qa_1, qa_2, \dots, qa_k$ .

По предположению индукции все делители числа  $m$  можно расположить по кругу согласно условию:  $a_1, a_2, \dots, a_{d(m)}$ . Обозначим эту последовательность  $\ell$ . Тогда расположим по кругу делители числа  $n$  в следующем порядке:

$$\ell, \quad (p\ell)^*, \quad p^2\ell, \quad \dots, \quad (p^{k-1}\ell)^*, \quad p^k\ell, \quad \text{если } k \text{ нечётно,}$$

и

$$\ell, \quad (p\ell)^*, \quad p^2\ell, \quad \dots, \quad p^{k-1}\ell, \quad (p^k\ell)^*, \quad \text{если } k \text{ чётно.}$$

Нетрудно видеть, что эти последовательности удовлетворяют условию задачи.

**10.2.** Дано натуральное число  $n$ . На отрезке  $[0, n]$  числовой прямой отметили  $m$  различных отрезков с целочисленными концами. Оказалось, что среди этих отрезков нельзя выбрать несколько отрезков суммарной длины  $n$ , объединение которых совпадало бы со всем отрезком  $[0, n]$ .

(Два отрезка считаются различными, если у них не совпадают пары концов. Смещать отрезки запрещено.)

Найдите максимально возможное значение числа  $m$ .

**Ответ:**  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

Каждый набор отрезков, удовлетворяющий условию задачи, назовём *хорошим*. Рассмотрим набор, состоящий из всех отрезков вида  $[a, b]$ , где  $a, b \in \mathbb{N}$  и  $a < b \leq n$ . Этот набор содержит  $n(n-1)/2$  отрезков и является хорошим, так как даже объединение всех отрезков набора не покрывает точку 0. Следовательно, максимально возможное значение числа  $m$  не меньше  $n(n-1)/2$ .

Докажем следующее

**Утверждение:** Для любого хорошего набора  $A$  существует хороший набор  $B$ , содержащий столько же отрезков, что и набор  $A$ , и не содержащий отрезков вида  $[0, k]$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

**Доказательство утверждения:** Если набор  $A$  не содержит отрезков вида  $[0, k]$ , то в качестве набора  $B$  можно выбрать сам набор  $A$ . В противном случае среди всех отрезков набора  $A$  вида  $[0, k]$  рассмотрим отрезок  $[0, s]$  минимальной длины. Исключим отрезок  $[0, s]$  из набора, а вместо него добавим отрезок  $[s, n]$ , который, очевидно, ранее не содержался в наборе. Полученный набор тоже будет хорошим. Действительно, если бы из нового набора удалось выбрать несколько отрезков суммарной длины  $n$ , объединение которых совпадало бы со всем отрезком  $[0, n]$ , то среди них обязательно должен быть отрезок  $[s, n]$ , однако тогда несколько непересекающихся отрезков покрывали бы отрезок  $[0, s]$  и среди них нашёлся бы отрезок вида  $[0, t]$ , где  $t < s$ , что невозможно в силу минимальности числа  $s$ . Повторяя описанную процедуру несколько раз, мы получим искомый набор  $B$ . Утверждение доказано.

Из доказанного утверждения, в частности, следует, что количество отрезков в произвольном хорошем наборе не больше чем  $n(n-1)/2$ , а значит, максимально возможное значение числа  $m$  в точности равно  $n(n-1)/2$ .

**10.3.** Через точку  $F(0; \frac{1}{4})$  координатной плоскости проведены две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающие параболу  $y = x^2$  в точках  $A, B, C$  и  $D$  (точки названы в порядке возрастания их абсцисс). Разность проекций отрезков  $AD$  и  $BC$  на ось абсцисс равна  $m$ .

Найдите площадь четырёхугольника  $ABCD$ .

**Ответ:**  $m^2/2$ .

Обозначим абсциссы точек  $A, B, C$  и  $D$  через  $a, b, c$  и  $d$  соответственно. Несложно видеть, что перпендикулярность прямых  $AC$  и  $BD$  равносильна равенству  $(a + c)(b + d) = -1$ , а условие про разность проекций — равенству  $(a + c) - (b + d) = m$ . Принадлежность точки  $F$  прямым  $AC$  и  $BD$  означает, что  $ac = bd = -\frac{1}{4}$ . Пусть  $a + c = p$  и  $b + d = q$ , тогда числа  $a$  и  $c$  — корни квадратного уравнения  $x^2 - px - \frac{1}{4} = 0$ , а числа  $b$  и  $d$  — корни квадратного уравнения  $x^2 - qx - \frac{1}{4} = 0$ . Следовательно,  $c - a = \sqrt{p^2 + 1}$  и  $d - b = \sqrt{q^2 + 1}$ . Так как диагонали  $AC$  и  $BD$  четырёхугольника  $ABCD$  взаимно перпендикулярны, его площадь  $S$  равна половине произведения длин диагоналей. Значит,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(c - a)(d - b)\sqrt{1 + (c + a)^2}\sqrt{1 + (d + b)^2} = \\ &= \frac{1}{2}(1 + p^2)(1 + q^2) = \frac{(q + qp^2)(p + pq^2)}{2pq} = \frac{-(p - q)^2}{-2} = \frac{m^2}{2}. \end{aligned}$$

**10.4.** На полуокружности с диаметром  $AB$  и центром  $O$  отмечена точка  $D$ . Точки  $E$  и  $F$  — середины меньших дуг  $AD$  и  $BD$  соответственно. Оказалось, что прямая, соединяющая точки пересечения высот треугольников  $ADF$  и  $BDE$ , проходит через точку  $O$ .

Найдите градусную меру угла  $AOD$ .

**Ответ:**  $30^\circ$  или  $150^\circ$ .

**Первое решение.** Пусть  $H_1$  и  $H_2$  — точки пересечения высот треугольников  $ADF$  и  $BDE$ . Заметим, что точка  $O$  является центром описанной окружности для обоих треугольников  $ADF$  и  $BDE$ . Поэтому совпадающие прямые  $H_1O$  и  $H_2O$  являются прямыми Эйлера этих треугольников и содержат точки  $M_1$  и  $M_2$  пересечения медиан треугольников  $ADF$  и  $BDE$  соответственно.

Пусть  $K$  и  $N$  — середины отрезков  $AD$  и  $BD$  соответственно. Тогда  $M_1 \in FK$ ,  $M_2 \in EN$ , причём  $KM_1 : M_1F = NM_2 : M_2E = 1 : 2$ . Обозначим за  $R$  радиус полуокружности, данной в условии.

На продолжении луча  $OM_1$  за точку  $M_1$  отметим точку  $L_1$  такую, что  $M_1L_1 = 2OM_1$ . Так как  $KM_1 : M_1F = OM_1 : M_1L_1 = 1 : 2$ , то треугольники  $KM_1O$  и  $FM_1L_1$  подобны с коэффициентом  $1/2$ . Значит

$$\angle FL_1O = \angle FL_1M = \angle KOM_1 = \angle EOL_2 \quad \text{и} \quad L_1F = 2OK = BD. \quad (1)$$

На продолжении луча  $OM_2$  за точку  $M_2$  отметим точку  $L_2$  такую, что  $M_2L_2 = 2OM_2$ . Аналогичными рассуждениями получим равенства

$$\angle EL_2O = \angle FOM_1 \quad \text{и} \quad EL_2 = AD. \quad (2)$$

Рассмотрим равенства (1) и (2): из равенств углов следует, что треугольники  $OEL_2$  и  $L_1FO$  подобны по двум углам, поэтому, воспользовавшись равенствами длин, заключаем, что

$$\frac{EL_2}{EO} = \frac{OF}{FL_1} \iff \frac{AD}{R} = \frac{R}{BD} \iff AD \cdot BD = R^2.$$

Проведём высоту  $DH$  треугольника  $ABD$ . Согласно формуле длины высоты, проведённой к гипотенузе,  $DH = \frac{AD \cdot BD}{AB} = \frac{R^2}{2R} = \frac{DO}{2}$ . Значит, в прямоугольном треугольнике  $DOH$  верно равенство  $\angle DOH = 30^\circ$ . Если точка  $H$  лежит на отрезке  $OB$ , то  $\angle DOB = \angle DOH = 30^\circ$ , а если на отрезке  $OA$ , то  $\angle DOB = 180^\circ - \angle DOH = 150^\circ$ .

**Второе решение.** Аналогично первому решению заменим прямые  $H_1O$  и  $H_2O$  прямыми  $M_1O$  и  $M_2O$ . Введём комплексную систему координат, в которой точки  $A$  и  $B$  имеют координаты  $-1$  и  $1$  соответственно, тогда точка  $O$  имеет координату  $0$ . Пусть точка  $F$  имеет координату  $d$  ( $\text{Im}(d) > 0$ ), тогда координаты точек  $D$  и  $E$  равны  $d^2$  и  $-id$  соответственно. Поскольку координаты точки пересечения медиан треугольника равны среднему арифметическому координат вершин, то координаты точек  $M_1$  и  $M_2$  равны  $(d^2 + d - 1)/3$  и  $(d^2 + id + 1)/3$ . Условие коллинеарности точек  $M_1$ ,  $M_2$  и  $O$  равносильно

$$\frac{d^2 + d - 1}{d^2 + id + 1} = \frac{\frac{1}{d^2} + \frac{1}{d} - 1}{\frac{1}{d^2} - \frac{i}{d} + 1} \iff \frac{d^2 + d - 1}{d^2 + id + 1} = \frac{1 + d - d^2}{1 - id + d^2}.$$

Воспользовавшись свойством пропорции и приведя подобные слагаемые, получим биквадратное уравнение  $d^4 - id^2 - 1 = 0$  переменной  $d$ . Его решения удовлетворяют равенствам  $d^2 = \frac{i \pm \sqrt{3}i}{2}$  и соответствуют точкам  $D$  таким, что  $\angle BAD = 30^\circ$  и  $\angle BAD = 150^\circ$ .

**11.1.** Дана последовательность натуральных чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , члены которой при каждом натуральном  $i \geq 3$  удовлетворяют равенству

$$a_{i+1} = a_i + \text{НОД}(a_{i-1}, a_{i-2}).$$

Докажите, что существуют такие натуральные числа  $N$  и  $M$ , для которых при всех  $n \geq N$  верно равенство  $a_{n+1} - a_n = M$ .

**Решение.** Так как член  $a_1$  участвует только при нахождении  $a_4$ , причём в слагаемом  $\text{НОД}(a_1, a_2)$ , то не ограничивая общности можно считать, что  $a_1 = \text{НОД}(a_1, a_2)$ . Если числа  $a_1, a_2$  и  $a_3$  разделить на одно и то же число, то на это число разделятся все числа последовательности  $(a_n)$ , что не повлияет на истинность утверждения, которое нужно доказать. Поэтому не ограничивая общности будем считать, что  $\text{НОД}(a_1, a_2, a_3) = 1$ , что равносильно  $\text{НОД}(a_1, a_3) = 1$ . Обозначим  $\text{НОД}(a_2, a_3) = d$ , тогда  $a_2 = bd$  и  $a_3 = cd$ , где  $b$  и  $c$  — взаимно простые натуральные числа такие, что  $a_1 \mid b$  и  $\text{НОД}(a_1, cd) = 1$ . Найдём следующие несколько членов последовательности:

$$\begin{aligned} a_4 &= a_3 + \text{НОД}(a_1, a_2) = a_3 + a_1 = cd + a_1, \\ a_5 &= a_4 + \text{НОД}(a_2, a_3) = a_4 + d = cd + a_1 + d, \\ a_6 &= a_5 + \text{НОД}(a_3, a_4) = a_5 + \text{НОД}(cd, cd + a_1) = \\ &= a_5 + \text{НОД}(cd, a_1) = a_5 + 1, \\ a_7 &= a_6 + \text{НОД}(a_4, a_5) = a_6 + \text{НОД}(cd + a_1, cd + a_1 + d) = \\ &= a_6 + \text{НОД}(cd + a_1, d) = a_6 + \text{НОД}(a_1, d) = a_6 + 1. \end{aligned}$$

Так как три подряд идущих числа  $a_5, a_6$  и  $a_7$  отличаются на единицу, т.е. соседние числа взаимно просты, то все последующие числа также будут отличаться на единицу, т.е. при любом  $n \geq 5$  будет верно равенство  $a_{n+1} - a_n = 1$ , что и требовалось доказать.

**11.2.** Через точку  $F(1; 1)$  координатной плоскости проведены две взаимно перпендикулярные прямые. Одна из прямых пересекает правую ветвь гиперболы  $y = \frac{1}{2x}$  в точках  $A$  и  $C$  (у  $C$  абсцисса больше, чем у  $A$ ). А другая прямая пересекает левую ветвь этой гиперболы в точке  $B$ , а правую — в точке  $D$ . Произведение проекций отрезков  $AC$  и  $BD$  на ось абсцисс равна  $m$ .

Найдите площадь невыпуклого четырёхугольника  $ABCD$ .

**Ответ:**  $m^2/2$ .

Обозначим абсциссы точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  через  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  соответственно. Перпендикулярность прямых  $AB$  и  $CD$  равносильна равенству  $acbd = -1/4$ , а принадлежность точки  $F$  прямым  $AC$  и  $BD$  — равенствам  $a + c = 2ac + 1$  и  $b + d = 2bd + 1$ . Обозначим  $ac = p$  и  $bd = q$ , тогда числа  $a$  и  $c$  — корни квадратного уравнения  $x^2 - (2p + 1)x + p = 0$ , а числа  $b$  и  $d$  — корни квадратного уравнения  $x^2 - (2q + 1)x + q = 0$ . Следовательно,  $c - a = \sqrt{4p^2 + 1}$  и  $d - b = \sqrt{4q^2 + 1}$ . Заметим, что

$$\frac{1}{2a} - \frac{1}{2c} = \frac{c - a}{2ac} = \frac{\sqrt{4p^2 + 1}}{2p} = -2q \cdot \sqrt{\frac{1}{4q^2} + 1} = \sqrt{4q^2 + 1} = d - b.$$

Аналогично доказывается равенство  $\frac{1}{2d} - \frac{1}{2b} = c - a$ . Таким образом, проекции отрезка  $AC$  на оси абсцисс и ординат равны соответственно проекциям отрезка  $BD$  на оси ординат и абсцисс, значит,  $AC = BD$ . Так как диагонали  $AC$  и  $BD$  четырёхугольника  $ABCD$  взаимно перпендикулярны, его площадь  $S$  равна половине произведения диагоналей. Значит,

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} AC^2 = \frac{1}{2} ((c - a)^2 + (b - d)^2) = \frac{1}{2} (4p^2 + 4q^2 + 2).$$

Произведение проекций отрезков  $AC$  и  $BD$  на ось абсцисс равно

$$m = (c - a)(b - d) = \sqrt{(4p^2 + 1)(4q^2 + 1)} = \sqrt{4p^2 + 4q^2 + 2}.$$

Сопоставляя полученные равенства, находим ответ  $S = m^2/2$ .

**11.3.** На окружности отметили 2021 точку и провели 2021 отрезок с концами в отмеченных точках. После этого вычислили количество различных точек, в которых пересекаются проведённые отрезки (концы отрезков не считаются точками пересечения).

Найдите наибольшее количество точек пересечения, которое могло получиться.

**Ответ:**  $2021 \cdot 1009 = 2039189$ .

Решим задачу для произвольного нечётного числа  $n$  отмеченных точек и проведённых отрезков. Пронумеруем отмеченные точки на окружности числами от 1 до  $n$  в порядке обхода окружности. Для каждого  $i = \overline{1, n}$  через  $a_i$  обозначим количество проведённых отрезков, для которых точка  $i$  является концевой. Из общего количества  $\binom{n}{2}$  пар отрезков по крайней мере  $\binom{a_i}{2}$  пар не пересекаются, поскольку у них есть общий конец  $i$ , так как для различных  $i = \overline{1, n}$  эти пары не совпадают, то количество точек пересечения не превосходит

$$M = \binom{n}{2} - \left( \binom{a_1}{2} + \binom{a_2}{2} + \dots + \binom{a_n}{2} \right).$$

Определим наибольшее возможное значение  $M$ , для чего найдём наименьшее возможное значение суммы в скобках. Как нетрудно убедиться, раскрыв скобки, неравенство  $\binom{b}{2} + \binom{a}{2} > \binom{b-1}{2} + \binom{a+1}{2}$  равносильно неравенству  $b-1 > a$ . Следовательно, среди чисел  $a_i, i = \overline{1, n}$ , не должно быть отличающихся больше, чем на единицу. Учитывая, что  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2n$ , это возможно только, если  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 2$ . Значит, наибольшее возможное значение  $M$  равно  $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$ .

Чтобы убедиться, что это значение является ответом к задаче, приведём пример того, что такое количество точек пересечения могло получиться. Расставим точки в вершинах правильного  $n$ -угольника и последовательно с каждой из них сделаем следующую операцию: выберем точку  $i$  и рассмотрим множество  $p_i$  точек пересечения всевозможных отрезков с вершинами в оставшихся точках. Множество  $p_i$  конечно, а множество точек на дуге, содержащей точку  $i$ , бесконечно. Поэтому для неё можно выбрать такое новое расположение, что ни один отрезок, соединяющий точку  $i$  с какой-либо другой точкой, не проходит через точки множества  $p_i$ . В результате таких операций мы получим расположение точек такое, что никакие три отрезка с вершинами в этих точках не име-

ют общей точки внутри окружности. Теперь достаточно провести отрезки, соединяющие точки с номерами  $i$  и  $i + [n/2]$ ,  $i = \overline{1, n}$ , (считаем, что номера цикличны по модулю  $n$ , т. е.  $n + k = k$ , если  $k = \overline{1, n}$ ). При этом, любые два отрезка, не имеющие общего конца, пересекутся и все  $a_i$  будут равны двум.

Подставляя в найденную формулу  $\frac{n(n-3)}{2}$  значение  $n = 2021$ , находим ответ  $2021 \cdot 1009 = 2039189$ .

**11.4.** На плоскости даны три окружности  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ , и  $\omega_3$  с центрами  $O_1$ ,  $O_2$ , и  $O_3$  соответственно, причём  $\omega_1$  касается внешним образом  $\omega_2$  и  $\omega_3$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. На окружности  $\omega_1$  выбирается произвольная точка  $C$ . Прямая  $CP$  повторно пересекает  $\omega_2$  в точке  $B$ , а прямая  $CQ$  повторно пересекает  $\omega_3$  в точке  $A$ . Точка  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ .

Докажите, что, если точка  $C$  пробегает окружность  $\omega_1$ , то геометрическое место точек  $O$  — окружность, центр которой лежит на описанной окружности треугольника  $O_1O_2O_3$ .

**Решение.** Разберём вначале случай, когда радиусы окружностей  $\omega_2$  и  $\omega_3$  различны (не ограничивая общности, считаем, что радиус  $\omega_3$  больше радиуса  $\omega_2$ ). Рассмотрим три гомотетии:  $l_1$  с центром  $Q$ , переводящую  $\omega_3$  в  $\omega_1$ ;  $l_2$  с центром  $P$ , переводящую  $\omega_1$  в  $\omega_2$ ; и  $l_3 = l_2 \circ l_1$ , переводящую  $\omega_3$  в  $\omega_2$ . Так как  $l_1$  переводит  $A$  в  $C$ ,  $l_2$  переводит  $C$  в  $B$ , то  $l_3$  переводит  $A$  в  $B$ , поэтому её центр (обозначим его через  $I$ ) лежит на прямой  $AB$ . Каждую величину, не зависящую от положения точки  $C$ , будем называть *фиксированной*.

Обозначим  $\angle ACB = \angle PCQ = \alpha$ , этот угол фиксированный. Тогда угол  $\angle AOB = 2\alpha$  тоже фиксированный, значит, все треугольники  $AOB$  подобны между собой и отношение  $\frac{OA}{AB} = \frac{1}{2 \sin \alpha}$  фиксировано.

Обозначим  $\frac{IA}{IB} = t > 1$  — коэффициент гомотетии  $l_3$ , это число фиксировано. Отношение  $\frac{AB}{IA} = \frac{IB-IA}{IA} = \frac{1}{t} - 1$  тоже фиксировано.

Таким образом, в треугольнике  $IAO$  фиксированы отношение

$$\frac{OA}{IA} = \frac{OA}{AB} \cdot \frac{AB}{IA} = \frac{1}{2 \sin \alpha} \cdot \left( \frac{1}{t} - 1 \right)$$

и угол

$$\angle OAI = 180^\circ - \angle OAB = 90^\circ + \alpha.$$

Значит, все треугольники  $IAO$  подобны между собой, в частности, фиксированы угол  $AIO$  и отношение  $\frac{IO}{IA}$ . Следовательно, для любого положения точки  $C$  на окружности  $\omega_1$  поворотная гомотетия  $\ell$  с центром  $I$ , углом  $AIO$  и коэффициентом  $\frac{IO}{IA}$  переводит  $A$  в  $O$ . Так как точка  $A$  может занимать любое положение на  $\omega_3$ , то  $\Gamma\text{MT}(O)$  — окружность  $\omega = \ell(\omega_3)$ .

Заметим, что гомотетия  $l_3$  и поворотная гомотетия  $\ell$  имеют общий центр — точку  $I$ . Поэтому  $\ell(B) = \ell \circ l_3(A) = l_3 \circ \ell(A) = l_3(O_3) = O_2$ . Следовательно,  $\ell$  переводит треугольник  $AOB$  в треугольник  $O_3O'O_2$  и

верно равенство

$$\angle O_3O'O_2 = \angle AOB = 2\angle ACB = \angle QO_1P = \angle O_3O_1O_2,$$

из которого заключаем, что  $O'$  лежит на описанной окружности треугольника  $O_1O_2O_3$ .

Пусть теперь радиусы окружностей  $\omega_2$  и  $\omega_3$  равны. В этом случае  $\ell_3$  является параллельным переносом на вектор  $O_3O_2$ , точка  $I$  не определена, а четырёхугольник  $ABO_2O_3$  — параллелограмм. Отметим точку  $D$  такую, что треугольники  $ABD$  и  $O_3O_2O_1$  равны и одинаково ориентированы. Четырёхугольник  $O_3ADO_1$  — параллелограмм, а треугольники  $QAO_3$  и  $QCO_1$  подобны. Значит, отрезки  $DO_1$  и  $O_1C$  параллельны и

$$DO_1 + O_1C = O_3A \left(1 + \frac{QO_1}{QO_3}\right) = O_3Q \left(1 + \frac{QO_1}{QO_3}\right) = O_1O_3 = DA = DB.$$

Следовательно, точка  $D$  совпадает с точкой  $O$ . Заметим также, что расстояние  $O_1D = O_3A$  фиксировано, т. е. все точки  $O$  равноудалены от  $O_1$ . Нетрудно видеть, что  $O$  может занимать любое положение на окружности с центром  $O_1$  и радиусом  $O_3A$  — требуемое утверждение доказано.

**Замечание.** Из равнобедренности треугольника  $AOB$  следует, что точка  $O'$  является серединой дуги  $O_2O_3$ , содержащей точку  $O_1$ .

**8.5.** Внутри треугольника  $ABC$  расположены три непересекающихся круга радиуса 1. (Круги могут касаться друг друга и сторон треугольника, но не могут иметь общих внутренних точек.)

Найдите наибольшее значение  $r$ , при котором можно гарантированно утверждать, что внутри треугольника возможно нарисовать четвёртый круг радиуса  $r$ , не пересекающийся с уже нарисованными тремя кругами.

**Ответ:**  $r = 1/3$ .

Рассмотрим три круга попарно касающихся друг друга круга  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  радиуса 1 с центрами  $O_1, O_2, O_3$ , соответственно, и равносторонний треугольник  $ABC$  такой, что стороны  $AB, BC, AC$  касаются кругов  $\omega_1$  и  $\omega_2, \omega_2$  и  $\omega_3, \omega_1$  и  $\omega_3$  соответственно. Вся внутренность треугольника  $ABC$ , не покрытая кругами, разобьётся на семь частей трёх видов: центральная часть, ограниченная тремя кругами, три боковые части, ограниченные двумя кругами и стороной, и три угловые части, ограниченные кругом и двумя сторонами. Центральную часть можно целиком накрыть одной боковой, поэтому нет смысла вписывать туда четвёртый круг. Нарисуем круг наибольшего радиуса  $r$ , который можно вписать в боковую часть, заключённую между  $AB$  и кругами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Очевидно, что этот круг касается  $AB, \omega_1$  и  $\omega_2$ , поэтому из теоремы Пифагора легко находим, что  $(1+r)^2 = (1-r)^2 + 1$ , т. е.  $r = 1/4$ . Нарисуем круг наибольшего радиуса  $r$ , который можно вписать в угловую часть, заключённую между  $AC, CB$  и  $\omega_3$ . Очевидно, что этот круг касается  $AC, CB$  и  $\omega_3$ , поэтому его центр  $O$  лежит на биссектрисе угла  $ACB$  и, так как катет, расположенный напротив угла в  $30^\circ$  вдвое меньше гипотенузы, то верно равенство

$$2 = CO_3 = CO + OO_3 = 2r + (r + 1),$$

откуда находим  $r = 1/3$ . Следовательно в этом случае невозможно расположить круг радиуса больше  $1/3$ , не пересекающийся с уже нарисованными тремя. Значит при  $r > 1/3$  нельзя гарантированно утверждать, что всегда найдётся круг, удовлетворяющий условию.

Хотя бы один угол треугольника  $ABC$  не больше  $60^\circ$ , не ограничивая общности пусть этот угол —  $ACB$ . Пусть  $\omega$  — любой из данных трёх кругов. Если  $\omega$  не касается ни одной из сторон угла  $ACB$ , заменим его на круг, который: имеет тот же центр, находится внутри угла  $ACB$  и касается хотя бы одной из сторон этого угла (не ограничивая общности пусть он касается стороны  $BC$  в точке  $T$ ). Если полученный круг не касается



стороны  $AC$ , то заменим его на круг, который: касается стороны  $BC$  в точке  $T$  и касается стороны  $AC$ . Обозначим полученный круг через  $\Omega$ , он находится внутри угла  $ACB$  и содержит круг  $\omega$  внутри себя. Рассмотрим круг  $\Gamma$ , который касается сторон угла  $ACB$  и круга  $\Omega$ , а его центр  $O_1$  находится ближе к  $C$  чем центр  $O$  круга  $\Omega$ . Обозначим через  $r$  и  $R$  радиусы, а через  $T_1$  и  $T$  — точки касания с  $BC$  кругов  $\Gamma$  и  $\Omega$ . Тогда

$$R + r = OO_1 = OC - O_1C = \frac{R}{\sin \frac{\angle ABC}{2}} - \frac{r}{\sin \frac{\angle ABC}{2}} = \frac{R - r}{\sin \frac{\angle ABC}{2}}.$$

Следовательно

$$\frac{R - r}{R + r} = \sin \frac{\angle ABC}{2} \leq \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Решая это неравенство находим, что  $r \geq R/3 \geq 1/3$ . Найдём для каждого из трёх данных в условии кругов соответствующий круг  $\Gamma$ , очевидно, что круг  $\Gamma$  наименьшего радиуса удовлетворяет условию задачи.

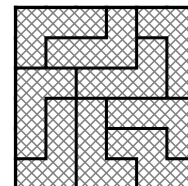
**8.6.** Клетчатую доску размера  $2022 \times 2022$  разрезали на фигуры двух видов: L-тетрамино  и Z-тетрамино . Каждое тетрамино состоит из четырёх единичных квадратов, тетрамино можно поворачивать и переворачивать.

Определите, какое наименьшее количество Z-тетрамино могло получиться.

**Ответ:** 1.

Пронумеруем столбцы таблицы снизу вверх числами от 1 до 2022 и раскрасим все клетки строк с нечётными номерами в жёлтый цвет, а с чётными — в синий. Каждая L-тетрамино состоит из трёх клеток одного цвета и одной клетки другого. Предположим, что не получилось ни одного Z-тетрамино. Так как клеток двух цветов поровну, то и количество L-тетрамино, состоящих из трёх жёлтых клеток и одной синей, равно количеству L-тетрамино, состоящих из трёх синих клеток и одной жёлтой. Значит вся доска разбилась на чётное количество L-тетрамино, но тогда общее количество клеток доски кратно восьми, что не так. Поэтому хотя бы одно Z-тетрамино должно было получиться.

Приведём пример, показывающий, что это возможно. Для этого покажем, как разрезать доску размера  $6 \times 6$ , используя только одно Z-тетрамино. Если её расположить в углу доски  $2022 \times 2022$ , то оставшаяся часть доски легко разбивается на прямоугольники размера  $2 \times 4$  и  $4 \times 2$ , которые составлены из двух L-тетрамино.



**8.7.** Многочлен  $p(x)$  с целыми коэффициентами удовлетворяет равенству  $p(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ .

**а)** Найдите все возможные значения  $p(\sqrt{2} - \sqrt{3})$ .

**б)** Приведите пример хотя бы одного многочлена  $p(x)$ , удовлетворяющего условию.

**Ответ:** **а)**  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ; **б)**  $x^3 - 10x$ .

**а)** Рассмотрим любой одночлен  $a_n x^n$  многочлена  $p(x)$  и подставим в него значения  $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$  и  $x = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ . При раскрытии скобок в выражении  $a_n(\sqrt{2} + \sqrt{3})^n$  все слагаемые будут иметь вид  $a_n C_n^m \sqrt{2}^k \sqrt{3}^m$ , где  $k + m = n$ . Если  $m$  чётно, то при замене  $x$  на  $\sqrt{2} - \sqrt{3}$  знак слагаемого не изменится, а значение этого слагаемого будет натуральным либо натуральным, умноженным на  $\sqrt{3}$ . Если же  $m$  нечётно, то при такой замене знак слагаемого изменится, а значение этого слагаемого будет натуральным, натуральным, умноженным на  $\sqrt{3}$  либо натуральным, умноженным на  $\sqrt{6}$ . Поскольку эти наблюдения верны для каждого одночлена, то они верны и для значения всего многочлена, т. е.  $p(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ .

**б)** Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что многочлен  $p(x) = x^3 - 10x$  удовлетворяет условию задачи. Покажем, как можно было найти этот пример. Рассуждая как в пункте а), можно выписать ещё два равенства  $p(-\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \sqrt{2} + \sqrt{3}$  и  $p(-\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ . Каждое из этих равенств говорит о том, что числа  $\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$  удовлетворяют равенству  $p(x) = \frac{1}{x}$ , поэтому они являются корнями многочлена  $xp(x) - 1 = 0$ . По теореме Безу многочлен с такими корнями делится на многочлен

$$(x - \sqrt{2} - \sqrt{3})(x - \sqrt{2} + \sqrt{3})(x + \sqrt{2} - \sqrt{3})(x + \sqrt{2} + \sqrt{3}) = x^4 - 10x^2 + 1.$$

Осталось выразить  $p(x)$  из равенства  $xp(x) - 1 = x^4 - 10x^2 + 1$ .

**8.8.** Витя и Маша играют в игру. Сначала Витя загадывает три различных целых числа. За один раз Маша может спросить одну из следующих величин: либо сумму чисел, либо сумму попарных произведений чисел, либо произведение чисел, загаданных Витей. Маша задаёт вопросы последовательно, причём Витя даёт ответ до того, как будет задан следующий вопрос.

а) Докажите, что Маша всегда может отгадать числа, загаданные Витей.

б) За какое наименьшее число вопросов Маша гарантированно сможет это сделать вне зависимости от того, какие числа загадал Витя?

**Ответ:** б) 3 вопроса; в) может.

а) Если Маша задаст все три различных вопроса, то для загаданных Витей чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  она будет знать коэффициенты многочлена

$$p(x) = (x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ac)x - abc.$$

Решив кубическое уравнение  $p(x) = 0$  (например, по формулам Кардано), она найдёт числа  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

б) **Первое решение.** Предположим, что у Маши есть стратегия, которая позволяет ей узнать числа за не более, чем два вопроса. Рассмотрим три варианта развития игры в зависимости от первого вопроса Маши.

1) Если Маша вначале спросила произведение чисел, то пусть Витя ответит „0”. Если далее Маша захочет узнать сумму чисел, то после ответа „0” она не сможет различить тройки  $(0, 1, -1)$  и  $(0, 2, -2)$ . А для суммы попарных произведений после ответа „12” она не сможет различить тройки  $(0, 2, 6)$  и  $(0, 3, 4)$ .

2) Если Маша вначале спросила сумму чисел, пусть Витя ответит „0”. Если далее Маша захочет узнать произведение чисел, то после ответа „0” она не сможет различить тройки  $(0, 1, -1)$  и  $(0, 2, -2)$ . А для суммы попарных произведений после ответа „-49” она не сможет различить тройки  $(0, 7, -7)$  и  $(3, 5, -8)$ .

3) Если Маша вначале спросила сумму попарных произведений чисел, то пусть Витя ответит „-18”. Если далее Маша захочет узнать сумму чисел, то после ответа „3” она не сможет различить тройки  $(0, -3, 6)$  и  $(2, 5, -4)$ . А для произведения после ответа „-72” она не сможет различить тройки  $(3, -4, 6)$  и  $(2, -3, 12)$ .

В каждом из вариантов после двух вопросов Маше не хватает информации, чтобы определить тройку однозначно, следовательно у неё нет стратегии, которая позволила бы ей гарантированно определить загаданные Витей числа за два хода.

**б) Второе решение.** Для произвольной тройки  $t$  целых чисел введём стандартные обозначения:  $\sigma_1(t)$ ,  $\sigma_2(t)$  и  $\sigma_3(t)$  для суммы, суммы попарных произведений и произведения чисел этой тройки соответственно. Покажем, что у Маши нет стратегии, которая позволила бы ей гарантированно определить загаданные Витей числа за один или два хода. Для этого приведём пример четырёх троек целых чисел:  $t$ ,  $t_{23}$ ,  $t_{13}$  и  $t_{12}$ , удовлетворяющих следующим трём системам:

$$\begin{cases} \sigma_2(t) = \sigma_2(t_{23}), \\ \sigma_3(t) = \sigma_3(t_{23}); \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1(t) = \sigma_1(t_{13}), \\ \sigma_3(t) = \sigma_3(t_{13}); \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1(t) = \sigma_1(t_{12}), \\ \sigma_2(t) = \sigma_2(t_{12}). \end{cases}$$

Если такие тройки существуют, то спросив величины  $\sigma_i$  и  $\sigma_j$  и получив в ответ значения  $\sigma_i(t)$  и  $\sigma_j(t)$ , Маша не сможет определить загаданные Витей числа, поскольку они могут образовывать как тройку  $t$ , так и  $t_{ij}$ .

Подходящий набор троек вместе с соответствующими значениями приведён в таблице:

	тройка	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$
$t$	$(9, -12, 72)$	69	-324	-7776
$t_{23}$	$(-18, 18, 24)$		-324	-7776
$t_{13}$	$(-6, 27, 48)$	69		-7776
$t_{12}$	$(-26, 37, 58)$	69	-324	

Хотя в задаче этого и не требуется, покажем, как можно было построить пример. Заметим, что для тройки  $t = (a, b, c)$  в качестве  $t_{12}$  всегда можно взять тройку  $(\frac{2}{3}\sigma_1 - a, \frac{2}{3}\sigma_1 - b, \frac{2}{3}\sigma_1 - c)$ , что легко проверить. При необходимости числа потом можно увеличить в три раза. Поэтому достаточно найти тройки  $t$ ,  $t_{23}$  и  $t_{13}$ , в которой числа из  $t$  не образуют арифметическую прогрессию. Для этого можно воспользоваться методом неопределённых коэффициентов. Положим

$$\begin{cases} t = (xyz, zkl, lmx); \\ t_{23} = (xlk, zxm, lzy); \\ t_{13} = (xzk, zlm, lxy). \end{cases}$$

Тогда равенства  $\sigma_3(t) = \sigma_3(t_{23}) = \sigma_3(t_{13})$  выполнены и нам осталось подобрать значения шести неизвестных  $x, y, z, k, \ell, m$  так, чтобы выполнялись равенства  $\sigma_2(t) = \sigma_2(t_{23})$  и  $\sigma_1(t) = \sigma_1(t_{13})$ . После сокращения обеих частей первого равенства на  $xz\ell$  получим систему

$$\begin{cases} kzy + k\ell m + xym = kxm + zym + kyl; \\ xyz + k\ell z + \ell mx = xzk + z\ell m + xyl. \end{cases}$$

Возьмём наугад три наименьших натуральных числа:  $m = 1$ ,  $k = 2$  и  $y = 3$  (переменные выбраны так, чтобы первое уравнение стало линейным), и получим систему

$$\begin{cases} 3z + x = 4\ell; \\ xz + \ell z = 2x\ell. \end{cases}$$

Одно решение этой системы:  $x = \ell = z$  нам не подходит (оно, очевидно, является решением при любом выборе значений  $m, k$  и  $y$ ). Второе решение имеет вид  $(x, \ell, z) = (-12t, 3t, 8t), t \in \mathbb{Z}$ . Выбирая  $z = 1$  получим требуемый набор троек (приведённые выше получаются из троек этого набора после сокращения всех чисел на  $-4$ ).

**9.5.** Даны  $n \geq 2$  различных целых чисел, больших  $-10$ . Оказалось, что среди них количество нечётных чисел равно максимальному чётному числу, а количество чётных — максимальному нечётному числу.

а) Найдите наименьшее возможное значение  $n$ .

б) Найдите наибольшее возможное значение  $n$ .

**Ответ:** а) 3; б) 19.

а) Наибольшие нечётное и чётное числа натуральны, так как есть числа обеих чётностей. Значит наибольшее чётное число не меньше двух, наибольшее чётное число не меньше единицы, а общее количество чисел не меньше трёх. Заметим, что  $n = 3$  могло быть, например, если даны числа  $-1$ ,  $1$  и  $2$ .

б) Пусть  $2a+1$  — наибольшее нечётное число, а  $2b$  — наибольшее чётное число. Количество  $2a+1$  чётных чисел не превышает  $b+5$ , поскольку они все не больше  $2b$  и не меньше  $-8$ . При этом, количество  $2b$  нечётных чисел не превышает  $a+6$ , поскольку они все не больше  $2a+1$  и не меньше  $-9$ . Значит выполнены равенства

$$\begin{cases} 2a + 1 \leq b + 5, \\ 2b \leq a + 6. \end{cases} \quad (1)$$

Сложив эти равенства, получим, что  $a + b \leq 10$ . Оценим наибольшее возможное значение числа  $n$  в зависимости от суммы  $a + b$ .

Если  $a + b = 10$ , то первое неравенство системы (1) равносильно неравенству  $3a \leq 14$ , поэтому левая часть меньше правой хотя бы на 2, второе неравенство системы (1) равносильно  $3b \leq 16$  и в нём левая часть меньше правой хотя бы на единицу. Значит общее количество чисел не превышает  $(b + 5 - 2) + (a + 6 - 1) = 18$ .

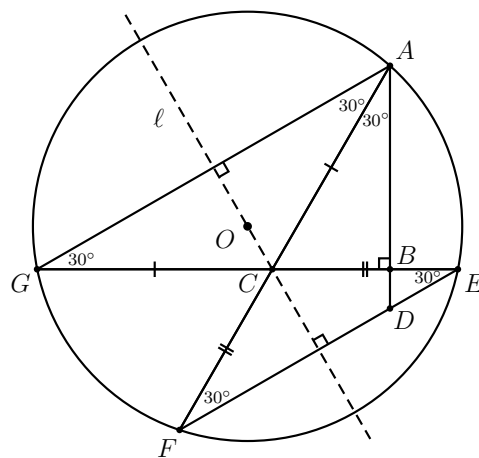
Если  $a + b = 9$ , то первое неравенство системы (1) равносильно неравенству  $3a \leq 13$ , поэтому левая часть меньше правой хотя бы на 1. Значит общее количество чисел не превышает  $(b + 5 - 1) + (a + 6) = 19$ . Заметим, что  $n = 19$  в этом случае возможно при  $a = 4$  и  $b = 5$ , например, если даны все нечётные числа от  $-9$  до  $9$  и все чётные числа от  $-6$  до  $10$ .

Если  $a + b \leq 8$ , то  $n$  не превышает  $(b + 5) + (a + 6) \leq 19$ . Таким образом, во всех случаях  $n \leq 19$ , причём эта оценка достижима.

**9.6.** Дан треугольник  $ABC$ , в котором  $\angle CAB = 30^\circ$  и  $\angle ACB = 60^\circ$ . На продолжении луча  $AB$  за точку  $B$  выбирается произвольная точка  $D$ , а на продолжении луча  $CB$  за точку  $B$  отмечается точка  $E$  такая, что  $\angle BDE = 60^\circ$ . Прямые  $AC$  и  $DE$  пересекаются в точке  $F$ .

Докажите, что описанная окружность треугольника  $AEF$  проходит через некоторую фиксированную точку, отличную от  $A$  и не зависящую от выбора точки  $D$ .

**Решение.** Отметим на луче  $BC$  точку  $G$  такую, что  $BG = 3BC$ , и покажем, что она лежит на описанной окружности треугольника  $AEF$ . Углы  $\angle ECF$  и  $\angle ACG$  равны по  $120^\circ$  как смежные с  $\angle ACB = 60^\circ$ . Так как  $\angle BED = 30^\circ$  и  $\angle FCE = 120^\circ$ , то и  $\angle CFE = 30^\circ$ . Следовательно треугольник  $FCE$  равнобедренный с равными сторонами  $CF = CE$ . Катет  $CB$ , лежащий напротив угла в  $30^\circ$ , равен половине гипотенузы  $AC$ , поэтому  $AC = 2CB = BG - CB = CG$ . Значит треугольник  $GCA$  равнобедренный,  $CG = CA$  и  $\angle GAC = \angle AGC = 30^\circ$ . Заметим, что общая биссектриса  $\ell$  углов  $ACG$  и  $ECF$  является также общим серединным перпендикуляром отрезков  $AG$  и  $EF$ . Следовательно треугольники  $AEF$  и  $GFE$  симметричны друг другу относительно  $\ell$ , причём центры их описанных окружностей лежат на прямой симметрии. Значит у них общая описанная окружность, т. е. точка  $G$  лежит на описанной окружности треугольника  $AEF$ .



**9.7.** Докажите, что для любого натурального числа  $n$  существуют взаимно простые натуральные числа  $a$  и  $b$  такие, что при всех  $k$  от 1 до  $n$  числа  $a + k$  и  $b + k$  не являются взаимно простыми.

**Решение.** Выберем  $n$  различных простых чисел  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , больших  $n$ , и обозначим  $d = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ . Согласно Китайской Теореме об Остатках существует решение системы сравнений

$$\begin{cases} x \equiv -1 \pmod{p_1}, \\ x \equiv -2 \pmod{p_2}, \\ \dots\dots\dots \\ x \equiv -n \pmod{p_n}. \end{cases}$$

Пусть  $a$  — решение этой системы и  $b = a + d$ . Тогда, из сравнений  $a_k \equiv -k \pmod{p_k}$ ,  $k = \overline{1, n}$ , следует, что  $\text{НОД}(a + k, b + k) \div p_k$  и

$$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, b - a) = \text{НОД}(a, p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n) = 1,$$

поскольку  $a_k \equiv -k \pmod{p_k}$ , а  $p_k$  — простое число, большее  $k$ . Следовательно, такие числа  $a$  и  $b$  удовлетворяют условию задачи.

**9.8.** Существует ли многочлен  $p(x)$  с целыми коэффициентами, удовлетворяющий равенствам

$$p(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \quad \text{и} \quad p(2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 2?$$

**Ответ:** не существует.

Предположим, что такой многочлен  $p(x)$  с целыми коэффициентами существует. Из равенства  $p(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$  следует, что  $p(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ , т. е. числа  $\sqrt{2}$  и  $-\sqrt{2}$  являются корнями многочлена  $p(x) - x$ . Согласно теореме Безу многочлен  $p(x) - x$  делится на  $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = x^2 - 2$  как многочлены с рациональными коэффициентами. Более того, из леммы Гаусса следует, что в равенстве  $p(x) - x = (x^2 - 2)h(x)$  рациональные коэффициенты многочлена  $h(x)$  являются целыми числами. Подставив в это равенство вместо переменной  $x$  числа  $2\sqrt{2}$  и  $-2\sqrt{2}$ , получим равенства

$$2 = (10 + 8\sqrt{2})h(2 + \sqrt{2}) \quad \text{и} \quad 2 = (10 - 8\sqrt{2})h(2 - \sqrt{2}).$$

Перемножив эти равенства и сократив на 4, получим равенство

$$1 = -7 \cdot (h(2 + \sqrt{2})h(2 - \sqrt{2})).$$

Так как в скобках стоит произведение сопряжённых чисел, то оно является целым числом, откуда следует, что 1 делится на 7 — противоречие.

**10.1.** Даны  $n \geq 2$  различных целых чисел, больших  $-a$ , где  $a$  — натуральное число. Оказалось, что среди них количество нечётных чисел равно наибольшему чётному числу, а количество чётных — наибольшему нечётному числу.

а) Найдите наименьшее возможное значение  $n$  при всех  $a$ .

б) Для каждого  $a \geq 2$  найдите наибольшее возможное значение  $n$ .

**Ответ:** а) 3; б)  $2a - 1$ .

а) Наибольшие нечётное и чётное числа натуральны, так как есть числа обеих чётностей. Значит наибольшее чётное число не меньше двух, наибольшее чётное число не меньше единицы, а общее количество чисел не меньше трёх. Заметим, что  $n = 3$  могло быть, например, если  $a = 3$  и даны числа  $-1, 1$  и  $2$ .

б) Пусть  $2x + 1$  — наибольшее нечётное число, а  $2y$  — наибольшее чётное число. Количество  $2x + 1$  чётных чисел не превышает  $y + \lfloor \frac{a+1}{2} \rfloor$ , поскольку они все не больше  $2y$  и не меньше  $-a + 1$ . А количество  $2y$  нечётных чисел не превышает  $x + 1 + \lfloor \frac{a}{2} \rfloor$ , поскольку они все не больше  $2x + 1$  и не меньше  $-a + 1$ . Значит выполнены равенства

$$\begin{cases} 2x + 1 \leq y + \lfloor \frac{a+1}{2} \rfloor, \\ 2y \leq x + 1 + \lfloor \frac{a}{2} \rfloor. \end{cases} \quad (1)$$

Сложив эти равенства, получим  $x + y \leq \lfloor \frac{a+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{a}{2} \rfloor = a$ . Запишем систему неравенств (1) в виде

$$\begin{cases} 3x \leq (x + y) + \lfloor \frac{a-1}{2} \rfloor, \\ 3y \leq (x + y) + \lfloor \frac{a}{2} \rfloor + 1. \end{cases}$$

Разности между правой и левой частями в этих неравенствах не меньше, чем остатки чисел  $(x + y) + \lfloor \frac{a-1}{2} \rfloor$  и  $(x + y) + \lfloor \frac{a}{2} \rfloor + 1$  при делении на 3. Обозначим эти остатки через  $\delta_1$  и  $\delta_2$  соответственно. Тогда

$$n \leq y + \lfloor \frac{a+1}{2} \rfloor + x + 1 + \lfloor \frac{a}{2} \rfloor - \delta_1 - \delta_2 = a + 1 + (x + y - \delta_1 - \delta_2).$$

Следовательно нам необходимо найти наибольшее возможное значение выражения  $x + y - \delta_1 - \delta_2$ , где  $x + y \leq a$ . Это значение легко найти, перебрав все возможные остатки числа  $a$  при делении на 6. Найденные

значения приведены в таблице:

$a$	$x$	$y$	$x + y$	$\delta_1$	$\delta_2$	$n$
$6k$	$3k - 1$	$3k$	$6k - 1$	1	0	$2a - 1$
$6k + 1$	$3k$	$3k$	$6k$	0	1	$2a - 1$
$6k + 2$	$3k$	$3k + 1$	$6k + 1$	1	0	$2a - 1$
$6k + 3$	$3k + 1$	$3k + 1$	$6k + 2$	0	1	$2a - 1$
$6k + 4$	$3k + 1$	$3k + 2$	$6k + 3$	1	0	$2a - 1$
$6k + 5$	$3k + 2$	$3k + 2$	$6k + 4$	0	1	$2a - 1$

Поскольку найденные значения  $x$  и  $y$  удовлетворяют системе (1), для каждой пары, очевидно, найдётся соответствующая  $n$ -ка чисел, удовлетворяющих условию.

**10.2.** Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $X$  и  $Y$ . Через точку  $Y$  проведены две прямые, одна из которых повторно пересекает окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно, а другая — в точках  $C$  и  $D$  соответственно. Прямая  $AD$  повторно пересекает окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Оказалось, что  $YP = YQ$ .

Докажите, что описанные окружности треугольников  $BCY$  и  $PQY$  касаются друг друга.

**Решение.** Из вписанности четырёхугольников  $ACY P$  и  $BDQY$  следует, что  $\angle ACD = \angle ACY = \angle YPQ$  и  $\angle ABD = \angle YBD = \angle YQP$ . Так как треугольник  $YPQ$  равнобедренный,  $\angle YPQ = \angle YQP$ , откуда  $\angle ACD = \angle ABD$ . Значит четырёхугольник  $ACBD$  вписанный. Следовательно верны равенства

$$\begin{aligned}\angle CYP &= \angle CYA + \angle AYP = \angle BYD + (\angle YPQ - \angle YAP) = \\ &= \angle YPQ + (\angle BYD - \angle BAD) = \angle YQP + \angle ADC = \\ &= \angle YQP + \angle ABC = \angle YQP + \angle YBC.\end{aligned}$$

Последнее равенство равносильно касанию описанных окружностей треугольников  $BCY$  и  $PQY$ .

(Другие расположения точек рассматриваются аналогично.)

**10.3.** Найдите все натуральные числа  $a$ , для которых найдётся многочлен  $p(x)$  с целыми коэффициентами, удовлетворяющий равенствам

$$p(\sqrt{2} + 1) = 2 - \sqrt{2} \quad \text{и} \quad p(\sqrt{2} + 2) = a.$$

**Ответ:**  $a = 7k - 2$ , где  $k$  — произвольное натуральное число.

Предположим, что целое число  $a$  и многочлен  $p(x)$  удовлетворяют условию. Для многочлена  $q(x) = p(x + 1)$  равенства из условия имеют вид  $q(\sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2}$  и  $q(1 + \sqrt{2}) = a$ . Поскольку коэффициенты многочлена  $q(x)$  целые, справедливо равенство  $q(-\sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2}$ . Следовательно, числа  $\sqrt{2}$  и  $-\sqrt{2}$  удовлетворяют равенству  $q(x) = 2 - x$ , т. е. они являются корнями многочлена  $q(x) + x - 2$ . Согласно теореме Безу многочлен  $q(x) + x - 2$  делится на  $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = x^2 - 2$ . Пусть  $q(x) + x - 2 = (x^2 - 2)h(x)$ , из леммы Гаусса следует, что рациональные коэффициенты многочлена  $h(x)$  являются целыми числами. Подставим в полученное равенство  $x = 1 + \sqrt{2}$  и учтём, что  $q(1 + \sqrt{2}) = a$ , после преобразований получим равенство

$$a + \sqrt{2} - 1 = (1 + 2\sqrt{2}) \cdot h(1 + \sqrt{2}). \quad (1)$$

Так как коэффициенты многочлена  $h(x)$  — целые числа, то верно

$$a - \sqrt{2} - 1 = (1 - 2\sqrt{2}) \cdot h(1 - \sqrt{2}).$$

Перемножим это равенство с (1):

$$(a - 1)^2 - 2 = -7 \cdot (h(1 + \sqrt{2}) \cdot h(1 - \sqrt{2})).$$

Поскольку выражение в скобках является произведением сопряжённых чисел, то оно целое, значит,  $(a - 1)^2 - 2$  делится на 7. Это равносильно тому, что  $a$  сравнимо с 4 или 5 по модулю 7.

Для чисел  $a = 7k + 4$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , равенство (1) примет вид

$$7k + 3 - \sqrt{2} = (1 + 2\sqrt{2}) \cdot h(1 + \sqrt{2}),$$

которое равносильно

$$h(1 + \sqrt{2}) = \frac{7k + 3 - \sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} = \frac{1 - 7k}{7} + \frac{14k + 5}{7} \cdot \sqrt{2},$$

что невозможно, так как коэффициенты  $h(x)$  — целые числа.

Для чисел  $a = 7k + 5$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , равенство (1) примет вид

$$7k + 4 - \sqrt{2} = (1 + 2\sqrt{2}) \cdot h(1 + \sqrt{2}),$$

которое равносильно

$$h(1 + \sqrt{2}) = \frac{7k + 4 - \sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} = (2k - 1)\sqrt{2} - k,$$

поэтому, можно выбрать многочлен  $h(x) = (2k - 1)x - (3k - 1)$ . Следовательно, все такие числа удовлетворяют условию.

**10.4.** Дана последовательность  $a_1, a_2, \dots, a_n$  натуральных чисел. Для каждого  $\ell$  от 1 до  $n - 1$  нашли следующие наборы:

$$(\text{НОД}(a_1, a_{1+\ell}), \text{НОД}(a_2, a_{2+\ell}), \dots, \text{НОД}(a_n, a_{n+\ell})),$$

где все индексы берутся по модулю  $n$ , т.е. если  $s > n$ , то  $a_s = a_{s-n}$ . Оказалось, что все найденные наборы состоят из одних и тех же  $n$  попарно различных чисел и различаются, возможно, порядком их следования.

Выясните, может ли  $n$  быть равно **а)** 21; **б)** 2021.

**Ответ:** **а)** да; **б)** нет.

Докажем вспомогательное

**Утверждение:**  $n = k^2 - k + 1$  для некоторого натурального числа  $k$ .

**Доказательство:** Пусть  $d$  — наибольший из найденных наибольших общих делителей. Тогда равенство  $\text{НОД}(a_i, a_{i+\ell}) = d$  равносильно тому, что каждое из чисел  $a_i$  и  $a_{i+\ell}$  кратно  $d$ . Пусть  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  — все индексы чисел последовательности, кратных  $d$ , выписанные в порядке возрастания. Заметим, что каждая пара  $i_j < i_s$  индексов даёт  $d$  по два раза: при  $\ell = s - j$  и при  $\ell = j + n - s$ . Следовательно,  $d$  встретится в качестве наибольшего общего делителя ровно  $2 \binom{k}{2}$  раз, а по условию это число равно  $n - 1$ . Таким образом,  $n = 1 + 2 \binom{k}{2} = k^2 - k + 1$ . Утверждение доказано.

**б)** Уравнение  $k^2 - k + 1 = 2021$  равносильно уравнению  $k(k - 1) = 2020$ . Левая часть этого уравнения возрастает при  $k > 0.5$  и  $90 \cdot 89 = 8010$ , а  $91 \cdot 90 = 8190$ , поэтому, уравнение не имеет натуральных решений. Согласно доказанному утверждению, ответ в это пункте: „нет”.

**а)** Заметим, что  $21 = 5^2 - 5 + 1$ , т.е.  $n = 21$  удовлетворяет утверждению при  $k = 5$ . Нетрудно построить последовательность  $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$  из доказательства этого утверждения, например, подойдёт  $(1, 2, 4, 14, 19)$ . Положим  $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{21} = 1$ , а затем выберем 20 различных простых чисел  $p_1 > p_2 > \dots > p_{20}$  и для каждого  $i$  от 1 до 20 последовательно умножим на  $p_i$  числа  $a_i, a_{i+1}, a_{i+3}, a_{i+13}, a_{i+18}$ . Нетрудно видеть, что для каждого  $\ell$  от 1 до 20 множество наибольших общих делителей из условия задачи совпадает с множеством  $\{p_1, p_2, \dots, p_{20}\}$ .

**Замечание:** Из доказанного утверждения следует, что  $n$  должно быть равно  $k^2 - k + 1$  для некоторого натурального числа  $k$ , а также, должна существовать последовательность  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  такая, что все попарные разности между её номерами  $i_j - i_s$  должны давать все возможные ненулевые остатки при делении на  $n$ . Как нетрудно видеть, конструкция из

решения пункта а) показывает, что эти необходимые условия являются также и достаточными.

**11.5.** В клетки таблицы размера  $2022 \times 2022$  записаны натуральные числа от 1 до  $2022^2$ , в каждой клетке — ровно одно число, все числа использованы по разу. Для каждой строки Влад выписал себе по одному числу, являющемуся вторым по убыванию в этой строке. А Дима проделал то же для каждого столбца. Оказалось, что мальчики выписали 4044 попарно различных числа и найдутся  $k$  чисел, выписанных Владом, каждое из которых меньше любого числа, выписанного Димой.

Найдите наибольшее возможное значение числа  $k$ .

**Ответ:** 2020.

Пусть Дима выписал числа  $d_1 > d_2 > \dots > d_{2022}$ , а Влад — числа  $v_1 > v_2 > \dots > v_{2022}$ . Предположим, что ответ в задаче равен 2022 или 2021, тогда  $d_{2022} > v_2$ . В каждой из 2021 строк, не содержащих  $v_1$ , находится не меньше 2021 числа, не превышающего  $v_2$ : число, выписанное Владом, и все меньшие его. А в каждом столбце находится не меньше 2 чисел, не меньших  $d_{2022}$ : число, выписанное Димой, и все бóльшие его. Следовательно, общее количество чисел в таблице не меньше

$$2021 \cdot 2021 + 2022 \cdot 2 = 2022 \cdot 2022 + 1,$$

что превышает количество всех чисел таблицы — противоречие.

Покажем, что могло оказаться так, что 2020 чисел, выписанных Владом, меньше любого числа, выписанного Димой. Заполним таблицу

$v_1$	$d_1$	$\infty$	$d_4$	$d_5$	$d_6$	$\dots$	$d_{2022}$
$d_2$	$v_2$	$d_3$	$\infty$	$y$	$y$	$\dots$	$y$
$x$		$v_3$					
$x$			$v_4$				
$x$				$v_5$			
$x$					$v_6$		
$\vdots$						$\ddots$	
$x$					$v_6$		$v_{2022}$

числами от 1 до  $2022^2$  так, чтобы выполнялись неравенства

$$\infty > v_1 > v_2 > y > d_1 > \dots > d_{2022} > x > v_3 > \dots > v_{2020}$$

(под  $\infty$ ,  $y$  и  $x$  в этих неравенствах мы подразумеваем каждое число, записанное на клетке с соответствующей меткой), а числа, стоящие на пустых клетках, меньше каждого из чисел, стоящих на отмеченных клетках.

**11.6.** Вписанная окружность прямоугольного треугольника  $ABC$  касается гипотенузы  $AB$  в точке  $P$ , а катетов  $AC$  и  $BC$  — в точках  $Q$  и  $R$  соответственно. Точки  $C_1$  и  $C_2$  симметричны точке  $C$  относительно прямых  $PQ$  и  $PR$ .

Найдите градусную меру угла  $C_1IC_2$ , где  $I$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ .

**Ответ:**  $135^\circ$ .

**Первое решение.** Пусть  $PR \cap CC_2 = X$ .

$$\angle RCC_2 = 90^\circ - \angle CRX = 90^\circ - \angle PRB = \frac{\angle B}{2}$$

Несложно заметить, что  $RI = RC = RC_2$ , то есть  $R$  является центром описанной окружности треугольника  $ICC_2$ . Отсюда следует, что

$$\angle RIC_2 = 90^\circ - \frac{\angle IRC_2}{2} = 90^\circ - \angle ICC_2 = 90^\circ - (45^\circ + \angle RCC_2) = 45^\circ - \frac{\angle B}{2}$$

Аналогично  $\angle QIC_1 = 45^\circ - \frac{\angle A}{2}$ . Тогда

$$\angle C_1IC_2 = 90^\circ + \angle QIC_1 + \angle RIC_2 = 180^\circ - \frac{\angle A + \angle B}{2} = 135^\circ$$

**Второе решение** Обозначим через  $M$  основание перпендикуляра опущенного из точки  $C$  на  $BI$ . Известно<sup>1</sup>, что  $M$  лежит на  $PQ$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \angle CMQ &= 180^\circ - \angle CMP = 90^\circ - \angle BMP = \\ &= 90^\circ - (\angle APM - \angle ABM) = \frac{\angle CAB + \angle CBA}{2} = 45^\circ. \end{aligned}$$

Следовательно,  $QM$  — биссектриса прямого угла, смежного с  $\angle CBM$ . Поскольку точки  $C$  и  $C_1$  симметричны относительно прямой  $QM$ , то  $C_1$  лежит на  $BM$ . Более того, треугольник  $CMC_1$  прямоугольный и равнобедренный. Аналогично, если  $N$  — основание перпендикуляра опущенного из точки  $C_1$  на  $AI$ , то  $C_2 \in BI$  и треугольник  $CNC_2$  равнобедренный и прямоугольный. В четырёхугольнике  $CC_1IC_2$  противоположные стороны  $CC_1$  и  $IC_2$  параллельны, так как они перпендикулярны прямой  $PQ$ , а стороны  $CC_2$  и  $IC_1$  параллельны, так как они перпендикулярны прямой

---

<sup>1</sup>4.5.5), стр. 39, Акоюян А. В. Геометрия в картинках. — 2-е изд. — М.: МЦНМО, 2017. — 236 с. — ISBN 978-5-600-02023-8.

$PR$ , следовательно,  $CC_1IC_2$  — параллелограмм. Так как углы  $CC_1I$  и  $CC_2I$  равны  $45^\circ$ , то  $\angle C_1IC_2 = \angle C_1CC_2 = 135^\circ$ .

Для полноты изложения докажем использованное нами

**Утверждение.** Если окружность  $\omega$  с центром  $I$  вписана в треугольник  $ABC$  и касается сторон  $AB$  и  $BC$  в точках  $P$  и  $R$  соответственно, то основание  $M$  перпендикуляра, опущенного из точки  $C$  на прямую  $AI$  лежит на прямой  $PR$ .

**Доказательство утверждения.** Опустим перпендикуляр  $BK$  на прямую  $AI$ . Угол  $BIK$  является внешним углом треугольника  $ABI$ , поэтому

$$\angle BIK = (\angle CAB + \angle ABC)/2 = (\pi - \angle BCA)/2 = \angle CIR.$$

Аналогично  $\angle CIM = \angle BIR$ . Следовательно

$$IK \cdot IM = BI \sin \angle BIK \cdot CI \sin \angle CIM = BI \sin \angle BIR \cdot CI \sin \angle CIR = r^2,$$

где  $r$  — радиус  $\omega$ . Значит точки  $M$  и  $K$  сопряжены относительно  $\omega$ , а прямая  $BK$  — полярна точки  $M$  относительно  $\omega$ . Поэтому точка  $M$  лежит на поляре точки  $B$  относительно  $\omega$  — прямой  $PR$ . Утверждение доказано.

**11.7.** Числа  $-1011, -1010, \dots, -1, 1, 2, \dots, 1010, 1011$  образуют в некотором порядке последовательность  $a_1, a_2, \dots, a_{2022}$ .

Найдите наибольшее возможное значение суммы

$$|a_1| + |a_1 + a_2| + |a_1 + a_2 + a_3| + \dots + |a_1 + a_2 + \dots + a_{2022}|.$$

**Ответ:**  $\frac{1011 \cdot 1012 \cdot 4043}{6}$ .

Для каждого номера  $k$  от 1 до 2022 введём переменную  $\varepsilon_k = \pm 1$  такую, что  $|a_1 + a_2 + \dots + a_k| = \varepsilon_k(a_1 + a_2 + \dots + a_k)$ . Выберем произвольное натуральное число  $d$  от 1 до 1011 и найдём номера  $i_d < j_d$ , на которых в последовательности стоят числа  $d$  и  $-d$ . Раскроем в сумме

$$|a_1| + |a_1 + a_2| + |a_1 + a_2 + a_3| + \dots + |a_1 + a_2 + \dots + a_{2022}| \quad (1)$$

все модули и соберём все слагаемые, равные  $\pm d$ . Получим сумму

$$s_d = (\varepsilon_{i_d} + \varepsilon_{i_d+1} + \dots + \varepsilon_{j_d-1})a_{i_d} + (\varepsilon_{j_d} + \varepsilon_{j_d+1} + \dots + \varepsilon_{2022})(a_{i_d} + a_{j_d}),$$

в которой  $|\varepsilon_{i_d} + \varepsilon_{i_d+1} + \dots + \varepsilon_{j_d-1}| \leq j_d - i_d$  и  $a_{i_d} + a_{j_d} = 0$ .

Следовательно,  $s_d \leq (j_d - i_d)d$  вся сумма (1) не превосходит сумму

$$(j_1 - i_1) + 2(j_2 - i_2) + \dots + 1011(j_{1011} - i_{1011}) = S_+ - S_-, \quad (2)$$

где  $S_+ = j_1 + 2j_2 + \dots + 1011j_{1011}$  и  $S_- = i_1 + 2i_2 + \dots + 1011i_{1011}$ . Согласно перестановочному неравенству, для того, чтобы при фиксированном множестве  $\{j_1, j_2, \dots, j_{1011}\}$  сумма  $S_+$  была максимальной, должны выполняться неравенства  $j_1 < j_2 < \dots < j_{1011}$ , а при этих условиях, наибольшее значение  $S_+$ , очевидно, достигается, когда  $j_m = 1011 + m$ ,  $m = \overline{1, 1011}$ . Аналогично, для того, чтобы при фиксированном множестве  $\{i_1, i_2, \dots, i_{1011}\}$  сумма  $S_-$  была минимальной, должны выполняться неравенства  $i_1 > i_2 > \dots > i_{1011}$ , и наибольшее значение  $S_-$  достигается, когда  $i_m = 1012 - m$ ,  $m = \overline{1, 1011}$ .

Заметим, что все полученные оценки достигаются, если расставить числа по убыванию или возрастанию. Действительно, если

$$\begin{cases} a_1 = 1011, a_2 = 1010, \dots, a_{1011} = 1, \\ a_{1012} = -1, a_{1013} = -2, \dots, a_{2022} = -1011, \end{cases}$$

то все модули раскрываются со знаком «плюс», поэтому  $\varepsilon_\ell = 1$  для всех  $\ell$  от 1 до 2022, и, следовательно,  $s_d = j_d - i_d = 2023 - 2d$  при всех  $d$  от 1 до 1011. Значит, наибольшее значение исходной суммы (1) равно

$$\begin{aligned} & 2 \cdot 1011 + 2 \cdot (1011 + 1010) + \dots + 2 \cdot (1011 + 1010 + \dots + 2) + (1011 + \dots + 1) = \\ & = 2 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + 1011^2) - (1 + 2 + \dots + 1011) = \\ & 2 \cdot \frac{1011 \cdot 1012 \cdot 2023}{6} - \frac{1011 \cdot 1012 \cdot 3}{6} = \frac{1011 \cdot 1012 \cdot 4043}{6}. \end{aligned}$$

**11.8.** Многочлен  $P(x, y)$  двух переменных с целыми коэффициентами удовлетворяет следующим двум условиям: 1) для каждого целого числа  $a$  существует, причём ровно одно, целое значение  $y$  такое, что  $P(a, y) = 0$ ; и 2) для каждого целого числа  $b$  существует, причём ровно одно, целое значение  $x$  такое, что  $P(x, b) = 0$ .

а) Докажите, что, если степень  $P(x, y)$  равна двум, то он делится на многочлен  $x - y + C$  либо на многочлен  $x + y + C$ , где  $C$  — целое число.

б) Существует ли такой многочлен  $P(x, y)$ , не кратный ни одному многочлену вида  $x - y + C$  и  $x + y + C$ , где  $C$  — целое число?

**Ответ: б)** да, существует.

а) Докажем, что верна следующая

**Лемма.** Если трёхчлен  $Q(x) = bx^2 + cx + d$  с целыми коэффициентами принимает при каждом целом  $x$  значения, являющееся квадратом целого числа, то существуют целые числа  $m$  и  $n$  такие, что  $b = m^2$ ,  $c = 2mn$ ,  $d = n^2$  и, в частности,  $Q(x) = (mx + n)^2$ .

**Доказательство леммы.** Если  $b = 0$ , то при всех целых  $x$  разность  $Q(x + 1) - Q(x) = c$  постоянна. Однако, разность между соседними квадратами целых чисел неограниченно возрастает, поэтому в случае  $c \neq 0$  получим, что непостоянный многочлен  $Q(x)$  принимать одинаковые значения бесконечно много раз, что невозможно. Если же  $b = c = 0$ , то  $d$  — полный квадрат и подходят числа  $m = 0$  и  $n = \sqrt{d}$ .

Пусть  $b \neq 0$ , тогда, очевидно,  $b > 0$ , иначе при достаточно больших значениях  $x$  многочлен будет принимать отрицательные значения. Если дискриминант  $c^2 - 4bd$  равен нулю, то  $Q(x) = b(x + \frac{c}{2b})^2$ . Так как число  $4b^2Q(x) = b(2bx + c)^2$  является полным квадратом для любого целого числа  $x$ , то  $b$  — полный квадрат. Пусть  $b = e^2$ , тогда число  $Q(x) = (ex + \frac{c}{2e})^2$  является полным квадратом для любого целого числа  $x$ , откуда, очевидно, следует, что  $c$  кратно  $2e$  и утверждение леммы выполнено.

Если же дискриминант  $c^2 - 4bd$  не равен нулю, то среди простых делителей значений  $Q(x)$  в целых точках (их, как известно, бесконечно много) выберем простой делитель  $p$ , больший  $|c^2 - 4bd|$ . Пусть  $Q(x)$  кратно  $p$ , рассмотрим число  $Q(x + p)$ :

$$Q(x + p) = Q(x) + bp^2 + p(2bx + c). \quad (1)$$

Заметим, что число  $(2bx + c)^2 = 4aQ(x) + c^2 - 4bd$  не кратно  $p$ , поэтому

и  $2bx + c$  не кратно  $p$  и из равенства (1) получаем, что

$$v_p(Q(x+p)) = v_p(Q(x)) + 1,$$

что невозможно, ибо  $Q(x)$  и  $Q(x+p)$  являются полными квадратами. Следовательно этот случай невозможен и лемма доказана.

Перейдем к решению самой задачи. Обозначим данный в условии многочлен через  $P(x, y)$  и покажем, что его можно разложить в произведение двух многочленов первой степени с рациональными коэффициентами. Пусть

$$P(x, y) = a_0x^2 + a_1y^2 + a_2xy + a_3x + a_4y + a_5.$$

Предположим, что  $a_1 \neq 0$ . Представим  $P(x, y)$  в виде квадратного трёхчлена переменной  $y$ :

$$P(y) = a_1y^2 + (a_2x + a_4)y + (a_0x^2 + a_3x + a_5).$$

Так как этого квадратный трёхчлен имеет целый корень для любого целого значения  $x$ , то его дискриминант

$$D(x) = (a_2x + a_4)^2 - 4a_1(a_0x^2 + a_3x + a_5)$$

является полным квадратом при всех целых значениях  $x$ . Степень этого многочлена не выше второй, поэтому к нему применимо утверждение доказанной леммы. Значит,  $D(x) = (mx + n)^2$  при для некоторых целых  $m$  и  $n$ . Тогда многочлен  $P(y)$  можно разложить в произведение двух линейных множителей с рациональными коэффициентами  $P(y) = a_1(y - y_1)(y - y_2)$ , которое можно записать в виде

$$P(x, y) = \frac{1}{4a_1}(2a_1y - (a_2x + a_4) - (mx + n))(2a_1y - (a_2x + a_4) + (mx + n)).$$

Аналогичное разложение можно записать в случае  $a_0 \neq 0$ .

Предположим теперь, что  $a_0 = a_1 = 0$ . Тогда, так как данный многочлен имеет степень 2, то  $a_2 \neq 0$ , поэтому

$$P(x, y) = a_2xy + a_3x + a_4y + a_5.$$

По условию для любого целого значения  $x$  число  $y = \frac{a_3x + a_5}{a_2x + a_4}$  целое, так как только для него  $P(x, y) = 0$ . Значит, при любом целом значении  $x$  число

$$a_2(a_3x + a_5) - a_3(a_2x + a_4) = a_2a_5 - a_3a_4$$

кратно знаменателю  $a_2x + a_4$ , что возможно только лишь если  $a_2a_5 = a_3a_4$ . Для числа  $t = \frac{a_3}{a_2}$  верно равенство  $\frac{a_5}{a_4} = \frac{a_3}{a_2} = t$  (если  $a_4 = 0$ , то  $a_5 = 0$ , а случай  $a_3 = 0$ , очевидно, невозможен). Тогда  $\frac{a_3x + a_5}{a_2x + a_4} = t$  для всех целых  $x$ , что противоречит условию задачи для  $b = t$ . Следовательно, этот случай невозможен.

Таким образом, многочлен  $P(x, y)$  раскладывается в произведение двух многочленов первой степени с рациональными коэффициентами запишем это равенство в виде

$$P(x, y) = M \cdot (k_1x + \ell_1y + C_1)(k_2x + \ell_2y + C_2),$$

где все коэффициенты целые. Заметим, что уравнения  $k_1x + \ell_1y + C_1$  и  $k_2x + \ell_2y + C_2$  — являются линейными диофантовыми уравнениями и для каждого из них есть три альтернативы: 1) у уравнения нет целых решений; 2) у уравнения при каждом значении одной из переменных есть всегда одно и то же подходящее значение второй переменной; 3) решение уравнения имеет вид  $(x_0 + lt, y_0 - kt)$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ . При этом вторая альтернатива невозможна согласно условию, а в третьей возможности всегда можно считать, что в парах  $(k_1, \ell_1)$  и  $(k_2, \ell_2)$  коэффициенты взаимно просты.

Если  $|\ell_i| = 1$ , то все решения  $P(a, y) = 0$  находятся из соответствующей скобки, поэтому для другой скобки выполнена первая возможность и, следовательно,  $|k_i|$  тоже равен единице, что и даёт требуемый в условии множитель. Аналогично рассматривается случай  $|k_i| = 1$ . Рассмотрим оставшийся случай: все коэффициенты  $k_i$  и  $\ell_i$  по модулю не меньше двух. Заметим, что в ряду натуральных чисел в качестве решений уравнения  $P(x, b) = 0$  из первой скобки подойдёт каждое  $|\ell_1|$ -ое число, а из второй скобки — каждое  $|\ell_2|$ -ое. Следовательно,  $\frac{1}{|\ell_1|} + \frac{1}{|\ell_2|} \geq 1$  и аналогично  $\frac{1}{|k_1|} + \frac{1}{|k_2|} \geq 1$ . Однако при наших предположениях это возможно только для  $|\ell_1| = |\ell_2| = |k_1| = |k_2| = 2$ , что противоречит их взаимной простоте.

**б)** Рассмотрим в качестве примера многочлен  $P(x, y)$ , равный произведению  $(3x - 5y)(6x - 5y - 1)(6x - 5y - 2)(6x - 5y + 2)(6x - 5y + 1)$ . Каждый из множителей является линейной функцией, а нулями этих множителей являются соответственно пары  $(5k, 3k)$ ,  $(5k + 1, 6k + 1)$ ,  $(5k + 2, 6k + 2)$ ,  $(5k + 3, 6k + 4)$  и  $(5k + 4, 6k + 5)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Нетрудно видеть, что этот многочлен удовлетворяет условию.